

# 带感性直流负载扼流磁放大器的静、动态过程的理论分析及其公式\*

潘守鲁

## 摘要

带感性直流负载的扼流磁放大器,是磁放大器中最基本的典型线路之一,其静、动态特性的非线性非常突出,给理论分析带来很大困难。

在实测波形分析的基础上,本文严谨地推导得一组新的公式,这些公式表明:带感性直流负载扼流磁放大器的静态特性,与电路的阻值比( $r_x/r_y$  和  $R_L/r_y$ )密切相关,而其传递函数的形式则为

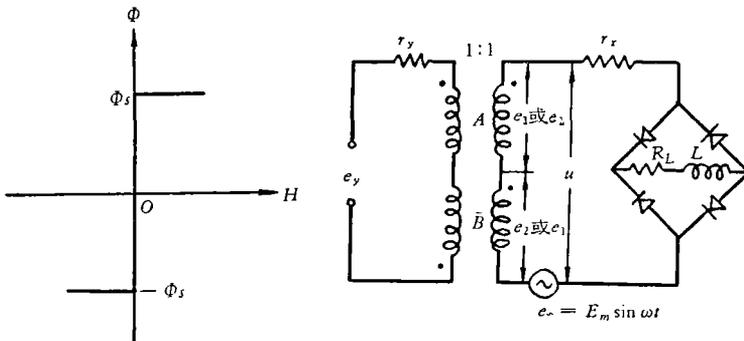
$$Y(s) = (1 + \tau_a s) / (1 + T_1 s + T_2^2 s^2).$$

这些结果与本文所引述的各文献[1~8,11]对同一问题的公式是不同的。大量实验证明:本文推导得的这些公式是正确的,与实验数据符合得很好,具有很大的通用性,并解释了一些过去所难以解释的“不正常”现象。

## 一、前言

随着磁放大器的日益推广应用,磁放大器的静、动态物理过程的分析,引起了人们很大的重视。但是磁放大器是一个典型的利用非线性现象(磁芯磁化曲线及二极管特性)的元件,其输入和输出的波形畸变很严重(见图2),从而给磁放大器的特性分析,特别是给具有非电阻性负载的磁放大器的动态特性分析,带来很大困难。

带直流电感负载的扼流磁放大器,是磁放大器中最基本的典型线路之一,其线路(见图1)看来很简单,但其磁电耦合关系和静、动态物理过程,在所有带感性直流负载的磁放大器线路中却是最复杂的。



a 磁芯 A 和 B 的磁化曲线

b 带感性直流负载的扼流磁放大器线路图

图 1

\* 本文初稿曾在 1965 年全国自动化学会年会上宣读。

近十余年来,国内外曾先后发表过不少有关本专题的论文<sup>[1-9,11]</sup>。但必须指出:这些论文迄今尚未完全解决它们所提出的问题,它们或者是在理论分析中一些主要假设的概念上就存在原则性的问题<sup>[1-4,7,8]</sup>,或者只是从线性等效线路等概念推导得一些很近似的公式<sup>[5,6]</sup>,而没有触及问题的本质。

考虑到以后叙述方便,现把常用的一些符号及本文的一些基本假设条件,先归列如下<sup>1)</sup>:

$e_{\sim}, E_{\sim}$ ——交流激励电压,其中  $e_{\sim} = E_m \sin \omega t$  (小写表示瞬时值,大写表示半波平均值,下同);

$i_p, I_p$ ——交流绕组电流;

$i, I$ ——负载电流;

$u_H, U_H$ ——负载端电压;

$e_y, I_y$ ——折合到交流绕组边的等效控制电压;

$i_y, I_y$ ——折合到交流绕组边的等效控制电流;

$r_y$ ——折合到交流绕组边的等效控制回路电阻;

$r_x$ ——交流绕组电阻(包括交流电源内阻);

$R_L$  和  $L$ ——负载电阻(包括整流电桥二极管导向电阻)及电感;

$T \triangleq 1/2 f$ ——交流电源半周期(其中符号“ $\triangleq$ ”表示“定义等于”,下同);

$T_y \triangleq R_y/4fr_y$ ——负载电感  $L = 0$  时扼流磁放大器的时间常数;

$T_H \triangleq L/R_L$ ——负载时间常数;

$K_{is} \triangleq \Delta I/\Delta I_y$ ——电流增量增益;

$K_{is} \triangleq I/I_y$ ——静态电流增益;

$\varphi = R_L/L$ ;

$\eta = (r_x + r_y + R_L)/L = R/L$ ;

$r = r_x + r_y$ ;

$\sigma_n$ ——在第  $n$  半周波内二磁芯都开始进入不饱和磁化状态时的角度(以交流电压波形为基准,参看图 4 中的标注,下同);

$\beta_n$ ——在第  $n$  半周波内二磁芯之一开始进入饱和磁化状态时的角度,即所谓饱和角;

$\gamma_n$ ——在第  $n$  半周波内二磁芯之一仍处于不饱和磁化状态但  $i$  和  $i_p$  开始不相等时的角度;

$\theta_n$ ——定义为  $\theta_n \triangleq \pi - \gamma_n$ ;

$\xi$ ——负载阻抗角,即  $\xi = \arctan \omega T_H$ ;

$\alpha_n$ ——定义为  $\alpha_n \triangleq E_{y,n}/E_m$ 。

本文在分析中所作的基本假设如下:

(1) 磁芯磁化曲线为理想的(如图 1a 所示);

(2) 各绕组漏电感略而不计;

1) 为了以后便于和各文献的结果相比较,本文所采用的符号及数学表达式,尽可能与文献[7]一致。

(3) 二极管特性是理想的<sup>1)</sup>;

(4) 交流激励电压恒定,且恰等于二磁芯的饱和磁化电压,即

$$E_m = 2\sqrt{2}fW_p\Phi_s \times 10^{-8};$$

(5) 设控制电压变化可表达为梯级函数形式,即设

$$e_y(t) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} E_{y,n} \cdot p(t - nT),$$

式中

$$p(t) \triangleq u(t) - u(t - T)$$

系单位梯级脉冲。换言之,即设控制电压的变化率大大低于交流激励电源的频率。



图2 扼流磁放大器的输入-输出电流波形变化图

## 二、问题的性质

现在先对过去有关本专题的几篇主要文献<sup>[1-3,11]</sup>的分析方法及所存在的问题加以概述,以说明本文所牵涉的问题的性质。

文献[1,2],就作者所知,是第一篇指出带感性直流负载扼流磁放大器的负载电流和控制电压的传递函数具有二阶环节特性的论文。它的分析方法是:先在前述基本假设条件下补充假设  $E_y \ll E_m$ ,  $L = 0$ , 且  $r_y = r_x = 0$ , 然后结合图解,推导出带纯电阻直流负载的扼流磁放大器在上述假设条件下的线性近似传递函数

$$G(s) \triangleq \Delta u / \Delta E_y = 4f/s, \quad (1)$$

继而就以此传递函数作为磁放大器的基本组成单元,用电感负载 ( $R_L + LS$ ) 置换原来的纯电阻负载,并加入由于控制回路电阻而产生的负反馈电压,从而构成带感性直流负载的扼流磁放大器的系统方块图,推得其传递函数为:

$$Y(s) = \Delta I(s) / \Delta E_y(s) = \frac{K_{is}}{r_y} [1 / (1 + sT_y K_{is} + s^2 T_y T_H K_{is})], \quad (2)$$

式(2)清楚地指出:扼流磁放大器在感性直流负载情况下将具有二阶环节的特性。但是这种近似方法显然是很粗糙的。首先,磁放大器是经常工作在非线性状态的,因此线性迭加律在此显然不适用。又纯电阻负载和感性负载下的磁化过程以及输入、输出的电流波形变化都截然不同(见图2)。所以,式(2)事实上只能作为很粗糙的近似式来看待。实验证明(见本文第五部分):在很多情况下式(2)与实验结果之间确然存在很大分歧,远不能满足工程计算的精度要求。

在文献[4]中,根据磁放大器的二磁芯之一饱和磁化后存在如下关系(参看图1b):

$$u(t) = e_-(t) - \left[ i_p r_x + i R_L + L \frac{di}{dt} \right], \quad (3)$$

1) 实际上,在本文的实验验证中(见本文第五部分),二极管的特性系假设其反向电阻等于无穷大,而顺向电阻则为一常数值。根据实验数据可估算其顺向电阻值,然后把它视为实际负载的一部分对  $R_L$  进行修正。

凭定性观察便直接写出此线路的电压和电流的半波平均值近似动态关系式:

$$U = E_{\sim} - I(r_x + R_L) - L \frac{dI}{dt}. \quad (4)$$

对于控制电流  $I_y$ , 则根据静态情况下控制电流和负载电流之间存在静态增益  $K_{is}$ , 便近似地把动态情况下控制电流  $I_y$  和负载电流  $I$  之间的关系也表达为:

$$I_y = I_p = I/K_{is}. \quad (5)$$

然后便在(4)式和(5)式的基础上, 推导得带电感性直流负载的扼流磁放大器的传递函数:

$$Y(s) = \frac{\Delta I(s)}{\Delta E_y(s)} = \frac{K_{is}}{r_y} \frac{1}{1 + T_y K_{is} s + T_y T_H K_{is} s^2}. \quad (6)$$

文献[5]根据负载端电压  $u_H$  和负载电流  $i$  之间存在如下函数关系:

$$u_H = L \frac{di}{dt} + i R_L, \quad (7)$$

仿照文献[4]的分析方法也直接写出对应的电压和电流的半波平均值增量关系:

$$\Delta U_H = L \frac{d\Delta I}{dt} + \Delta I \cdot R_L. \quad (8)$$

然后又假设

$$\Delta U_H = \frac{\partial U_H}{\partial I_y} \Delta I_y - r_i \Delta I_p \quad (9)$$

这里  $r_i \triangleq -\frac{\partial U_H}{\partial I_p}$  定义为等效内阻, 在过渡过程中假设为常数. 并根据式(8)和(9)<sup>[5]</sup>推证得理想的带电感性直流负载的扼流磁放大器的传递函数为:

$$Y(s) = \frac{K_{is}}{r_y} \cdot \frac{1}{1 + \left( K_{is} T_y + \frac{I}{m T_m} \right) s + T_y T_H K_{is} s^2}, \quad (10)$$

式中  $I_m$  为当  $L = 0$  时负载电流最大值(见式(13)),  $m$  为经验系数, 定义为

$$\frac{I}{m I_m} = R_L / (R_L + r_i), \quad (11)$$

对于E形变压器铁芯,  $m = 1.05 - 1.15$ .

显然, 从数学关系说, 上述公式(4)和(8)都是不能成立的, 因为

$$\frac{1}{T} \int_0^{\tau} \left( L \frac{di}{dt} \right) dt = \frac{L}{T} (i_{\tau} - i_0), \quad (\tau \leq T) \quad (12)$$

$$\approx L \frac{dI}{dt}. \quad (13)$$

这里,  $i_{\tau}$  和  $i_0$  分别表示当  $t = \tau$  和  $t = 0$  时负载电流  $i$  的瞬时值.

再者, 一参变量的半波平均值增量对时间的微分(即  $\frac{dI}{dt}$ ) 在物理含意上也是牵强的, 只当过渡过程时间远大于交流电源半周期时才勉强可以解释.

因此, 在这样粗糙近似的基础上所进行的分析(例如文献[4, 5, 9]), 其结论的可靠性和适用性自然是可怀疑的.

此外, 公式(5)和(11)也都是些很粗糙的近似式, 因为静态中存在的关系在动态过程中不一定仍能保持不变, 特别是在非线性现象很突出的带电感性直流负载扼流磁放大

器的动态过程中,其情况更是如此。

文献[6]则在弱信号条件下假设输入和输出电流的静态关系为线性,并利用等效内阻概念推证理想的带感性直流负载的扼流磁放大器的传递函数与式(2)同。这等于从不同的角度论证公式(2)<sup>[1,3]</sup>最多也只适用于磁放大器的静态特性线性段。此外,文献[6]的分析也存在着与上述式(5)和式(11)相同性质的问题。

对于文献[1—6,8]来说,虽然它们的推理各不相同,所存在的问题的性质也不尽一样,但都有着共同的不足之处,即它们都不考虑实际的磁芯磁化状态和输出电流等的波形变化,而只片面地根据一些很不充足的“线性化”的基本动态近似方程进行分析。因此,各文献所推得的结果只能在很局限的范围内才与实验数据相接近,而对于我们一般更感兴趣的问题——磁放大器的动态物理过程,则可以说都没有涉及。换言之,这些文献都没有从问题的实质加以解决。

较之早期的文献,文献[7]的分析是前进了一大步。与上述各文献不同,它系在交流绕组电阻  $r_x$  等于零的假设条件下,根据实际的电流和磁化状态的波形变化,逐段逐点地进行分析,求得负载电流的半波平均值公式,最后推得理想的带感性直流负载的扼流磁放大器的增量传递函数:

$$Y(s) = \frac{\Delta I(s)}{\Delta E_y(s)} = \frac{K_{is}}{r_y} \cdot \frac{1 + T_a s + T_b^2 s^2}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2} \quad (14)$$

这里

$$T_a = \frac{1}{2f} \cdot \frac{3K_{is} - 1}{2K_{is}}; \quad (15)$$

$$T_b^2 = \frac{1}{8f^2} \cdot \frac{K_{is} - 1}{K_{is}}; \quad (16)$$

$$T_1 = aT_H + T_y K_{is} + \frac{1}{2f} \left[ \frac{K_{is}}{K_{is}} + \frac{3}{2} \frac{a}{K_{is}} \right]; \quad (17)$$

$$T_2^2 = \left( T_H + \frac{1}{2fK_{is}} \right) \left( T_y K_{is} + \frac{a}{4fK_{is}} \right). \quad (18)$$

在上述假设条件下,传递函数(14)式与实验数据接近的程度确比早期文献优越。但是必须指出:相对于  $R_L$  和  $r_y$  来说,  $r_x \cong 0$  的假设条件并不是在一般情况下都能满足的,因而限制了它的适用范围。再者,式(14)表示:在前述基本假设条件下,带感性直流负载的扼流磁放大器,对一阶跃输入尚具有较显著的瞬时反应能力<sup>1)</sup>(见图 5b 和 6b)。此推论和磁放大器在纯电阻负载及上述同样假设条件下公认的固有的半波滞后反应特性<sup>[10]</sup>是不相一致的。

此外,文献[7]所推得的负载电流  $I$  和控制电流  $I_y$  之间的静态关系为

$$I/I_m = (1 + \cos\beta)/2, \quad (19)$$

$$I/I_y \triangleq K_{is} = \frac{\pi}{\pi - \beta}. \quad (20)$$

和其他文献<sup>[1,3,11]</sup>所推得的结果完全一样,都不包含  $r_x$ ,  $r_y$  和  $R_L$  等因子。但事实上,此结论是难以令人信服的。实验证明(见本文第五部分图 7):静态特性曲线( $I-I_y$ )的形

1) 可参阅文献[7]中的式(38),原式为  $rI_n/E_n = \theta_n + \alpha_n$ 。

状与电阻比  $R_L/r_y$  及  $r_x/r_y$  之值有着密切关系。

综上所述,尽管过去先后曾发表过许多有关本专题的论述,但是应该说,迄今尚没有一文在前述基本假设条件下,用数学表达式正确地反映出带电感性直流负载的扼流磁放大器各参变量在静、动态物理过程中所存在的关系,并给出一般适用的传递函数表达式。

本文系在前述基本假设条件下,对照实测的电流波形变化,严格遵循实际线路中存在的物理关系,在瞬时值关系分析的基础上,直接推导出各电流和电压的半波平均值表达式,并进而求得带电感性直流负载扼流磁放大器中各参变量之间的静、动态关系及其传递函数式,具体地指出了上述各文献中有争论之点以及严格的表达式和结论之间的分歧,最后,并对上述各文献和本文的理论分析结果进行实验验证和比较。

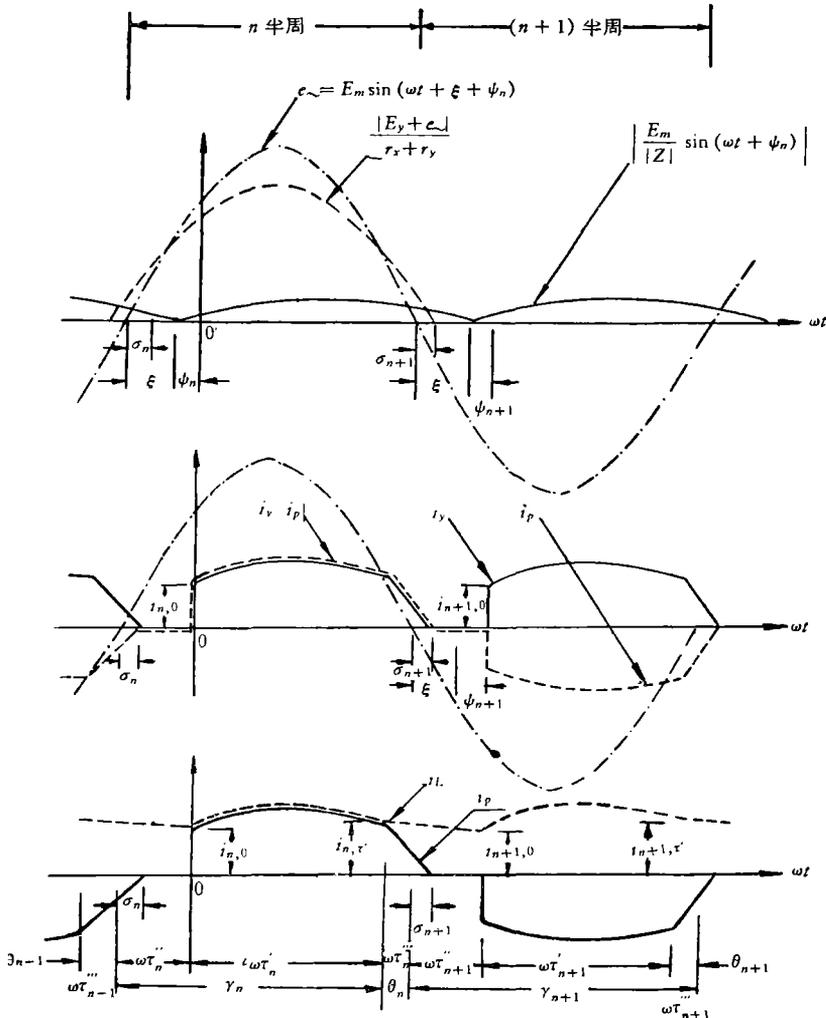


图3 带电感性直流负载的扼流磁放大器的输入-输出电流波形变化图

### 三、基本动态方程的建立

关于纯电阻负载情况下的磁放大器的静、动态分析,现在已似乎不是一个很困难的问

题了。但是在电感性直流负载情况下,即使对于最基本的扼流磁放大器线路来说,其静动态特性的分析仍存在一定的困难,不能直接套用纯电阻负载情况下的结果。不过,仔细地观察一下线路就可发现:如果在分析中对磁放大器线路的各参变量作适当的选择,则不论在纯电阻或电感负载情况下,磁放大器的二磁芯的磁化状态显然都可轮流地用整定半周和输出半周来加以描述,进而推导出把控制电压和输出电压半波平均值相关联起来的关系式。

一般地说,在一磁芯的整定半周内,该磁芯将从原来的饱和磁化被整定至一定的、比例于控制电压强弱的某磁化状态;而在输出半周内,该磁芯将从上半周(整定半周)内的整定磁化状态反向磁化,直至又达饱和磁化为止。

现以控制电压施加后的第  $n$  半周为例。假设此时磁芯  $B$  处于整定半周的,磁芯  $A$  处于输出半周内,则根据线路图(图 1)可得

$$E_{y,n} = I_{y,n}r_y + E_{1,n} - E_{2,n}, \quad (21)$$

$$E_{\sim} = U_n + E_{1,n} + E_{2,n}. \quad (22)$$

同理,在第  $(n+1)$  半周内可得

$$E_{y,n+1} = I_{y,n+1}r_y + E_{1,n+1} - E_{2,n+1}, \quad (23)$$

$$E_{\sim} = U_{n+1} + E_{1,n+1} + E_{2,n+1}. \quad (24)$$

上式中  $E_{1,n}$  和  $E_{2,n}$  (或  $E_{2,n+1}$  和  $E_{1,n+1}$ ) 分别表示第  $n$  半周 (或第  $n+1$  半周) 内磁芯  $A$  和  $B$  的绕组的端电压,  $E_{\sim}$  表示交流电压,而  $U_n$  和  $U_{n+1}$  则系特别选定的参变量,分别表示第  $n$  和  $n+1$  半周内的负载(包括  $r_x$  在内)的端电压(见图 1)。

因为输出半周内一磁芯磁通的总变化量必等于前半周(整定半周)内同一磁芯的磁通总变化量,故

$$E_{2,n} = E_{1,n+1}. \quad (25)$$

对上列各式联立求解,便可得如下差分方程:

$$E_{y,n+1} + E_{y,n} = (I_{y,n+1} + I_{y,n})r_y + U_{n+1} - U_n. \quad (26)$$

式中  $I_{y,n}$ ,  $I_{y,n+1}$ ,  $U_{n+1}$  和  $U_n$  都系未知数,为了求解它们,还需根据实际线路中的各种物理关系,参照实际的输出波形变化建立其他关系式。但是通过选择新的参变量  $U_n$  和  $U_{n+1}$ ,式(26)可把有关磁放大器中一些主要的参变量联系起来,为以后的求解创造了条件。

在电感性直流负载情况下,扼流磁放大器的负载电流、控制电流和交流绕组电流的波形变化,可根据实测波形(图 2b)表示如图 3 所示。

现以控制电压  $u_c(t)$  加入后的第  $n$  半周波为准。显然,根据工作中存在的物理状态,可把交流激励电压  $e_{\sim}(t)$  的半波分为三个期间,即  $\tau_n''$ ,  $\tau_n'$  和  $\tau_n'''$  ( $\tau_n'' + \tau_n' + \tau_n''' = T$ , 其中  $\omega\tau_n'' = \beta_n$ ,  $\omega(\tau_n'' + \tau_n') = \gamma_n$ ,  $\omega\tau_n''' = \theta_n$ ), 进行分析如下:

(1) 当  $0 \leq \omega t \leq \omega\tau_n'$  时,二磁芯之一达到饱和磁化状态,负载电流  $i_n$  和控制电压  $E_{y,n}$  之间存在如下瞬时关系:

$$L \frac{di_n}{dt} + i_n r_x + e_{1,n} = e_{\sim},$$

$$e_{y,n} + e_{1,n} = i_y r_y = i_n r_y,$$

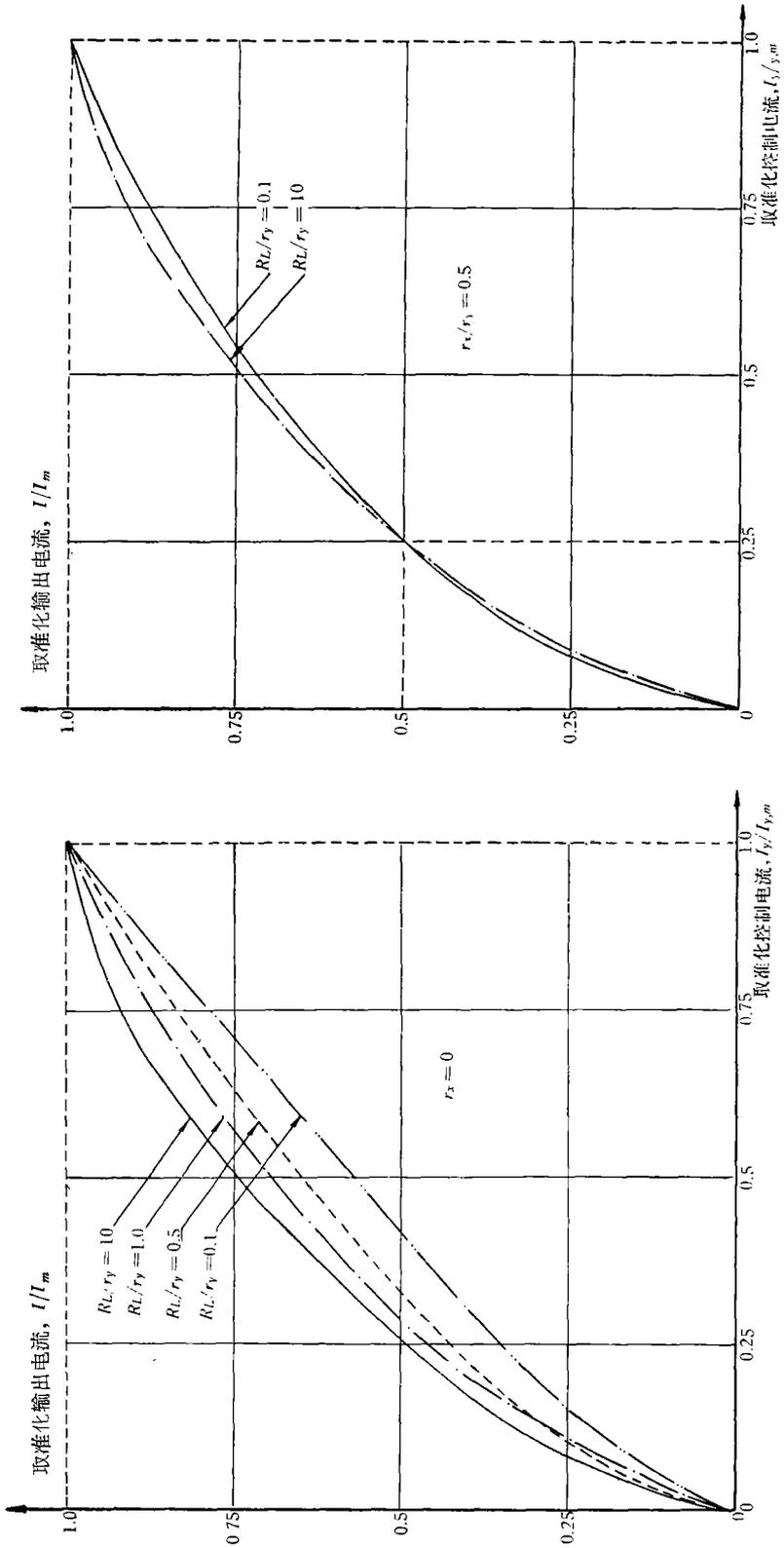


图 4b

图 4a

在不同的  $r_x/r_y$  和  $R_L/r_y$  诸比值情况下,带电感性直流负载扼流磁放大器的静态取准化控制特性理论曲线.

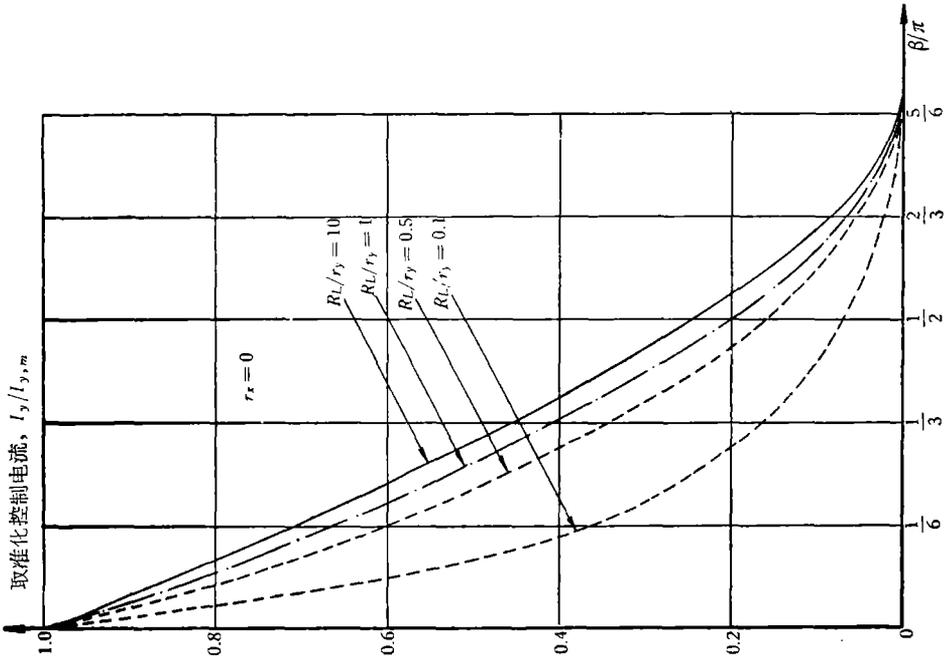


图 4d

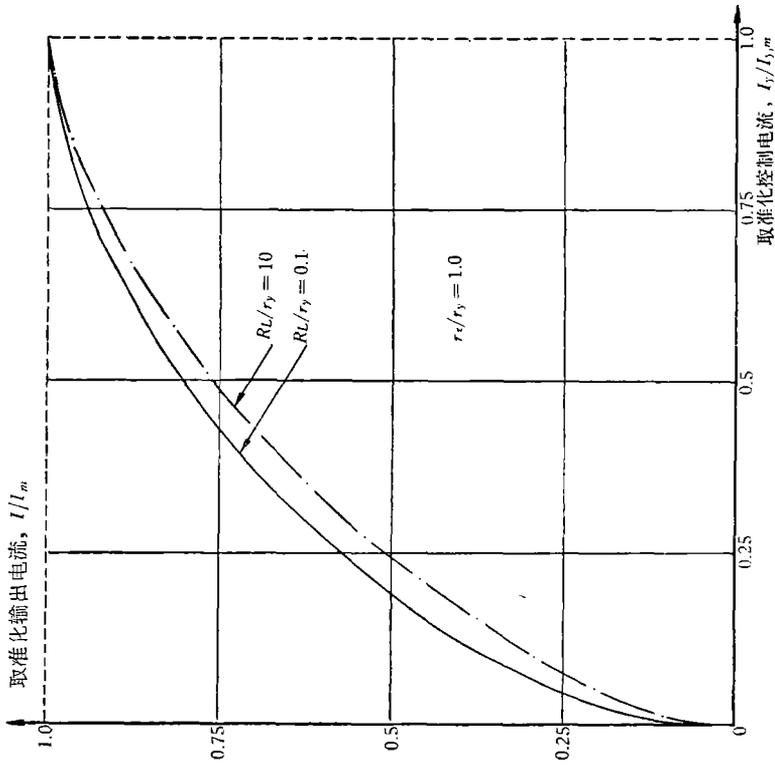


图 4c

即

$$L \frac{di_n}{dt} + i_n R = E_{y,n} + E_m \sin \omega(t + \tau_n'') \quad (27)$$

和

$$i_n = i_{y,n} = i_{p,n} \quad (28)$$

对式(27)求解可得

$$i_n = i_{y,n} = i_{p,n} = i_{n,0} e^{-\eta t} + \frac{E_{y,n}}{R} (1 - e^{-\eta t}) + \frac{E_m}{|Z|} [\sin(\omega t + \varphi_n) - (e^{-\eta t}) \sin \varphi_n] \quad (29)$$

现进一步对式(27)两边求半波平均值得

$$\frac{L}{T} (i_{n,\tau'} - i_{n,0}) + R I_n' = \frac{E_{y,n} \tau_n'}{T} + \frac{E_m}{T} \int_{\tau_n''}^{\tau_n' + \tau_n''} \sin \omega t dt \quad (30)$$

式(29)和式(30)中的  $i_{n,0}$  和  $i_{n,\tau'}$  分别表示当  $t = 0$  和  $t = \tau_n'$  时  $i_n$  的值,  $I_n'$  则定义为:

$$I_n' \triangleq \frac{1}{T} \int_0^{\tau_n'} i_n dt = I_{y,n}' = I_{p,n}' \quad (31)$$

即在此期间内负载电流或控制回路电流的半波平均值。

现若把  $A_n$  定义为:

$$A_n \triangleq \frac{E_{y,n} \tau_n'}{T} + \frac{E_m}{T} \int_{\tau_n''}^{\tau_n' + \tau_n''} \sin \omega t dt \quad (32)$$

$$\triangleq \frac{E_{y,n} \tau_n'}{T} + \frac{E_m}{\omega T} (\cos \omega \tau_n''' + \cos \omega \tau_n'') \quad (33)$$

则由式(30)得:

$$A_n = \frac{L}{T} (i_{n,\tau'} - i_{n,0}) + R I_n' \quad (34)$$

当  $\omega t = \omega \tau_n'$  时, 等式(28)不再成立.  $i_{p,n}$  将继续向零值变化, 而  $i_n$  则由于负载电感反电势  $(-L \frac{di_n}{dt})$  的作用存在如下关系:

$$L \frac{di_n}{dt} + i_n R_L = 0 \quad (35)$$

即负载电桥的四个臂这时将处于闭路状态。

(2) 当  $\omega \tau_n' \leq \omega t \leq \omega(\tau_n' + \tau_n''')$  时, (35)式仍适用. 对(35)式求解, 便得在此期间的负载电流瞬时值为:

$$i_{n,t} = i_{n,\tau'} e^{-\varphi(t-\tau_n')} \quad (36)$$

而控制绕组电流则根据式(27)求得:

$$i_{y,n} = i_{p,n} = \frac{E_{y,n} + E_m \sin \omega(t + \tau_n'')}{(r_x + r_y)} \quad (37)$$

从式(36)和(37)可见: 在此期间负载电流和绕组电流已不相等(见图2a和2b), 它们在  $t = \tau_n'$  时便开始分开. 故从式(29), (36)和(37)可得在第  $n$  半周内负载电流和绕组

电流开始不等时的瞬时电流  $i_{n,\tau'}$  及二磁芯之一刚开始饱和时的瞬时负载电流  $i_{n,0}$  分别为:

$$\begin{aligned} i_{n,\tau'} &= i_{n,0} e^{-\eta\tau'_n} + \frac{E_{y,n}}{R} (1 - e^{-\eta\tau'_n}) + \\ &+ \frac{E_m}{|Z|} [\sin(\omega\tau'_n + \varphi_n) - e^{-\eta\tau'_n} \sin\varphi_n] = \\ &= (E_{y,n} + E_m \sin \omega\tau'_n) / r \end{aligned} \quad (38)$$

和

$$i_{n,0} = i_{n-1,\tau'} e^{\varphi(\tau''_{n-1} - \tau'_n)} \quad (39)$$

(3) 在  $\tau''_{n+1}$  期间, 当  $\omega t < \omega(\tau'_n + \tau''_n) + \sigma_{n+1}$  时, 二磁芯之一仍处于饱和磁化状态。显然, 式(36)和(37)仍然适用。但当  $\omega t = \omega(\tau'_n + \tau''_n) + \sigma_{n+1}$  时,  $i_{y,n+1} = 0$ , 即:

$$E_{y,n+1} = E_m \sin \sigma_{n+1} \quad (40)$$

这时二磁芯反向磁化, 都处于不饱和磁化状态, 重新开始另一个磁化过程。

同理, 对于第  $n$  半周的  $\tau''_n$  期间, 上述推理亦适用。因此, 从式(36)可得在  $\tau''_n$  和  $\tau''_n$  期间内负载电流的半波平均值  $I''_n$  为:

$$\begin{aligned} I''_n &= \frac{1}{T} \left[ \int_0^{\tau''_n} i_{n-1,\tau'} e^{-\varphi(\tau''_{n-1} + t)} dt + \int_0^{\tau''_n} i_{n,\tau'} e^{-\varphi t} dt \right] = \\ &= \frac{L}{TR_L} [(i_{n-1,\tau'} e^{-\varphi\tau''_{n-1}} - i_{n,0}) + i_{n,\tau'} (1 - e^{-\varphi\tau''_n})] \quad (41) \end{aligned}$$

而在  $\tau''_n$  和  $\tau''_n$  期间内控制回路电流的半波平均值  $I''_{y,n}$  则从式(37)可得

$$\begin{aligned} I''_{y,n} &= \frac{1}{T} \int_{\tau'_n}^{\tau'_n + \tau''_n} \frac{E_{y,n} + E_m \sin \omega(t + \tau'_n)}{(r_x + r_y)} dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^{\sigma_n/\omega} \frac{E_{y,n} - E_m \sin \omega t}{(r_x + r_y)} dt \quad (42) \end{aligned}$$

故从式(34), (41)和(42)可得第  $n$  半周内负载电流和控制回路电流的半波平均值分别为:

$$I_n = I'_n + I''_n = \quad (43)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{A_n}{R} - \frac{1}{\varphi T} \left[ i_{n,\tau'} \left( e^{-\varphi\tau''_n} - \frac{r}{R} \right) + \right. \\ &\left. + i_{n-1,\tau'} e^{-\varphi\tau''_{n-1}} \left( \frac{r}{R} e^{-\varphi\tau''_n} - 1 \right) \right] \quad (44) \end{aligned}$$

和

$$I_{y,n} = I_n - I''_n + I''_{y,n} \cong \quad (45)$$

$$\cong I_n - I''_n \cong \quad (46)$$

$$\cong I_n - \frac{1}{\varphi T} [i_{n,\tau'} (1 - e^{-\varphi\tau''_n}) + i_{n-1,\tau'} e^{-\varphi\tau''_{n-1}} (1 - e^{-\varphi\tau''_n})] \quad (47)$$

1) 为了计算方便起见, 式(41)内各积分的时间坐标原点已分别从图3中的原点移至  $\omega t = -\omega\tau'_n$  和  $\omega t = \omega\tau'_n$ 。

2) 在此式的推导中,  $I''_{y,n}$  和  $\int_0^{\sigma_n/\omega} i_{y,n} dt$  都是被略去的项。换言之,  $\sigma_n \cong 0$  对结果的影响在此被略而不计。

现再回到式(22). 把上列各式的推导结果代入式(22)中, 可得

$$U_n = E_n - \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\sigma_n} \frac{r_y e_{\sim} + E_{y,n} r_x}{r} d\omega t + \int_{\sigma_n}^{\beta_n} e_{\sim} d\omega t + \int_{\beta_n}^{\gamma_n} (-E_{y,n} + i_{y,n} r_y) d\omega t + \int_{\gamma_n}^{\pi} \frac{r_y e_{\sim} - r_x E_{y,n}}{r} d\omega t = \right. \quad (48)$$

$$= A_n - I_{y,n} r_y + I''_{y,n} r - \frac{2r_x}{T} \int_0^{\sigma_n/\omega} i_{y,n} dt \cong \quad (49)$$

$$\cong A_n - I_{y,n} r_y^{1)}. \quad (50)$$

把上式代入式(26)便得

$$E_{y,n} + E_{y,n+1} \cong 2I_{y,n} r_y + (A_{n+1} - A_n). \quad (51)$$

再把式(47)和(34)代入式(51)可得

$$E_{y,n} + E_{y,n+1} \cong RI_{n+1} - (R - 2r_y) I_n + \frac{R}{\varphi T} \left\{ i_{n+1, \tau'} \left( e^{-\varphi \tau''_{n+1}} - \frac{r}{R} \right) + i_{n, \tau'} \left[ -2e^{-\varphi \tau''_n} + \frac{r}{R} (1 + e^{-\varphi(\tau''_n + \tau''_{n+1})}) - \frac{2r_y}{R} (1 - e^{-\varphi \tau''_n}) \right] - i_{n-1, \tau'} e^{-\varphi \tau''_{n-1}} \left[ \frac{r}{R} e^{-\varphi \tau''_n} - 1 + \frac{2r_y}{R} (1 - e^{-\varphi \tau''_n}) \right] \right\}. \quad (52)$$

对带感性直流负载的扼流磁放大器来说, 式(38), (39), (44), (47)和(52)便是其动态物理过程的全部表征方程。

试把式(4)和(30)相比较, 就显见这两个方程的差别是很大的. 这说明类似式(4)和(8)那样的动态方程的建立<sup>[4,5,9]</sup>是缺乏足够的依据的, 它们只是在控制电压很小, 且过渡过程时间远大于交流激励半周期的条件下才勉强近似真实情况. 其次, 从式(47)又可见: 在控制回路电流及负载电流半波平均值之间, 实际存在的的是一个相当复杂的函数关系, 式(5)和(11)<sup>[4,5]</sup>是远不能表达它们在整个动态过程中的正确关系的。

#### 四、输入-输出电流的静态公式及增量传递函数

在前述假设条件下, 上面推导的各基本动态方程, 对于不同的  $r_x/r_y$ ,  $R_L/r_y$  和  $\omega T_H$  之值, 一般都适用. 但是, 为了简化动态分析, 现针对一般实际情况补充假设如下:

(1)  $\omega T_H \gg 1$ , 即  $\xi = \arctan \omega T_H \cong 90^\circ$ ,

(2)  $\beta_n \gg \theta_n$ .

现令  $E_{y,n}/E_m = \alpha_n^{(2)}$ ,  $(\pi - \gamma_n) = \theta_n$ . 联立求解式(44)和(33), 并根据上述假设条件把  $\alpha_n$ ,  $\theta_n$  和  $1/\omega T_H$  视为一阶小量, 于是可得

1) 在式(50)的推导中,  $I''_{y,n}$  和  $\int_0^{\sigma_n/\omega} i_{y,n} dt$  都是被略去的项. 换言之,  $\sigma_n \cong 0$  对结果的影响在此被略而不计.

2) 若  $E_{y,n} \ll E_m$ , 则根据式(40)可得

$$E_{y,n} \cong E_m \sigma_n.$$

换言之,  $\sigma_n \cong \alpha_n$ . 但若  $E_{y,n}$  和  $E_m$  二者之值相当, 甚或于  $E_{y,n} > E_m$ , 则  $\sigma_n \cong \alpha_n$ .

$$\begin{aligned} \frac{rI_n}{E_m} &= \frac{r}{\pi R} (1 + \cos\beta_n) + \frac{r}{R} \frac{(\pi - \beta_n - \theta_n)}{\pi} \cdot \alpha_n - \\ &\quad - \frac{\omega T_H}{\pi} \left( \frac{R_L}{R} \right) [(\alpha_n + \theta_n) - (\alpha_{n-1} + \theta_{n-1})] + \\ &\quad + \frac{r(\beta_n + \theta_n)}{R\pi} (\alpha_{n-1} + \theta_{n-1}). \end{aligned} \quad (53)$$

同样,从式(38)可得

$$\begin{aligned} (\alpha_n - \alpha_{n-1}) + (\theta_n - \theta_{n-1}) + \frac{\pi}{\omega T_H} \left( \frac{R}{R_L} \right) (\theta_{n-1} + \alpha_{n-1}) &= \\ = \frac{1}{\omega T_H} \left( \frac{r}{R_L} \right) [(1 + \cos\beta_n) + \alpha_n(\pi - \beta_n - \theta_n) + (\alpha_{n-1} + \theta_{n-1})\beta_n]. \end{aligned} \quad (54)$$

用  $\frac{\omega T_H}{\pi} \left( \frac{R_L}{R} \right)$  乘式(54)等号两边,再和式(53)相加便得

$$\frac{rI_n}{E_m} = (\theta_{n-1} + \alpha_{n-1}). \quad (55)$$

以  $\omega T_H$  乘式(54),并移项便得

$$\begin{aligned} \frac{r}{R_L} (1 + \cos\beta_n) + \theta_{n-1} \left( \omega T_H - \frac{\pi R}{R_L} + \frac{r}{R_L} \beta_n \right) - \theta_n \omega T_H &= \\ = -\alpha_{n-1} \left[ \omega T_H - \frac{\pi R}{R_L} + \frac{r}{R_L} \beta_n \right] + \\ + \alpha_n \left[ \omega T_H - \frac{r}{R_L} (\pi - \beta_n) \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

又把式(38)代入式(52),然后将各指数项展开成级数,略去高阶小量,并代入式(53)和(54)则得

$$\begin{aligned} 2\pi\alpha_n &= \cos\beta_{n+1} - \cos\beta_n + \alpha_n\beta_n - \alpha_{n+1}\beta_{n+1} + \\ &\quad + \frac{2r_y}{r} (\alpha_{n-1} + \theta_{n-1})(\pi - \beta_n). \end{aligned} \quad (57)$$

上列式(55),(56)和(57)就是在前述假设条件下描述带感性直流负载扼流磁放大器动态物理过程的三个最基本的差分方程。

显然,若在上列各式中把各参变量的下标  $(n-1)$ ,  $n$  和  $(n+1)$  等取消,令  $\beta_n = \beta_{n+1} = \beta_{n-1}$ , 等等,便得带感性直流负载扼流磁放大器的静态公式如下:

$$\alpha = E_y/E_m, \quad (58)$$

$$rI/E_m = \theta + \alpha, \quad (59)$$

$$\frac{r}{\pi R_L} (1 + \cos\beta) = (\theta + \alpha) + \theta \left( 1 - \frac{\beta}{\pi} \right) \frac{r}{R_L}, \quad (60)$$

$$\theta(\pi - \beta) = \alpha \left( \beta + \frac{r_x}{r_y} \pi \right). \quad (61)$$

对上列四式联立求解可得

$$I_y/I_{y,m} = \left( \frac{1 + \cos \beta}{2} \right) \left( \frac{\frac{r_x}{r_y} + \frac{R_L}{r_y}}{\frac{\beta}{\pi} + \frac{r_x}{r_y} + \frac{R_L}{r_y} K_{is}} \right), \quad (62)$$

$$I/I_y \triangleq K_{is} = \frac{\pi}{\pi - \beta}, \quad (63)$$

$$K_{is} \triangleq \frac{\Delta I}{\Delta I_y} = K_{is} \frac{1}{1 + \frac{1 + \cos \beta}{(\pi - \beta) \sin \beta} \left[ \frac{1}{1 + \frac{K_{is}}{\sin \beta} \left( 1 - \frac{2\beta}{\pi} - \frac{r_x}{r_y} \right) \frac{E_y}{E_m}} \right]}, \quad (64)$$

式中

$$I_{y,m} = I_m \triangleq \frac{2}{\pi} \left( \frac{E_m}{r_x + R_L} \right) \quad (65)$$

$$E_y = I_y r_y. \quad (66)$$

式(62)显然是与一般通用的公式(19)<sup>[1,3,4,7,11]</sup>不同的。

在  $\omega T_H \gg 1$  的情况下,根据式(19)和(20),一般过去都认为<sup>[1,3,4,7,11]</sup>带电感性直流负载的扼流磁放大器的取准化静态特性是相同的,与  $R_L$ ,  $r_x$  和  $r_y$  之值无关。但实验表明,此结论只是在  $r_x/r_y \ll 1$  和  $R_L/r_y \gg 1$  的条件下才适用。实际上,在同一带电感性直流负载的扼流磁放大器中,若其他条件不变,只改变  $R_L$ ,  $r_x$  和  $r_y$  之值,可得出差别很大的取准化静态特性曲线(见图7)。实验结果进一步表明,使这些取准化静态特性改变的主要因素,并不是  $R_L$ ,  $r_x$  和  $r_y$  的绝对值,而是  $R_L/r_y$  和  $r_x/r_y$  诸比值的相对值。这些关系过去都是不清楚的,对实验和理论分析结果之间出现的分歧,一般都归之于磁芯不够理想和漏电感不等于零等<sup>[1,3]</sup>。这样的解释,至多只定性地说明一部分问题,而未能给出这些变化的真正原因或规律。

由式(62)和(63)显见,带电感性直流负载的扼流磁放大器的取准化静态特性,是和  $R_L/r_y$  及  $r_x/r_y$  诸比值有关的,其变化规律可见图5。只当  $r_x \ll r_y$ , 且  $r_y \ll R_L$  时,才与一般通用的公式(19)和式(20)相吻合。若上下改变  $R_L/r_y$  和  $r_x/r_y$  诸比值,将可得出高于或低于一般通用的公式(19)和式(20)所代表的取准化静态特性曲线。

根据式(62),(63)和(64),显见输入-输出关系是非线性的,故表征带电感性直流负载扼流磁放大器动态过程的各参变量,不能从基本动态方程(55)、式(56)和(57)直接求解。考虑到元件的动特性分析,除为了深入了解元件的作用机理外,主要系用于反馈系统的设计分析,以保证系统能稳定地在最佳参数配合下正常运行。故这里采用小参量法<sup>[12,7]</sup>,分别对式(55),(56)和(57)进行微分,微分后得到

$$\frac{r \Delta I_n}{E_m} = \Delta \theta_{n-1} + \Delta \alpha_{n-1}, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \Delta \beta_{n+1} \left( \frac{r}{R_L} \right) (\theta - \sin \beta) + \Delta \theta_n \left( \omega T_H - \frac{\pi R}{R_L} + \frac{r}{R_L} \beta \right) - \omega T_H \Delta \theta_{n+1} = \\ = - \Delta \alpha_n \left( \omega T_H - \frac{\pi R}{R_L} + \frac{r}{R_L} \beta \right) + \Delta \alpha_{n+1} \left[ \omega T_H - \frac{r}{R_L} (\pi - \beta) \right], \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \Delta\beta_n \left[ \sin\beta + \alpha - \frac{2r_y}{r}(\theta + \alpha) \right] - \Delta\beta_{n+1}(\alpha + \sin\beta) + \Delta\theta_{n-1} \frac{2r_y}{r}(\pi - \beta) = \\ = \Delta\alpha_n(2\pi - \beta) + \beta\Delta\alpha_{n+1} - \frac{2r_y}{r}(\pi - \beta)\Delta\alpha_{n-1}. \end{aligned} \quad (69)$$

式(68)移项后可得:  $\Delta\beta_{n+1} = f(\Delta\theta_n, \Delta\theta_{n+1}, \Delta\alpha_n, \Delta\alpha_{n+1})$ . 令  $n$  置换  $(n+1)$ , 则得  $\Delta\beta_n = f(\Delta\theta_{n-1}, \Delta\theta_n, \Delta\alpha_{n-1}, \Delta\alpha_n)$ . 把它们代入式(69)消去  $\Delta\beta_{n+1}$  和  $\Delta\beta_n$  后, 便得

$$b_1\Delta\theta_{n+1} + b_2\Delta\theta_n + b_3\Delta\theta_{n-1} = b_4\Delta\alpha_{n-1} + b_5\Delta\alpha_n + b_6\Delta\alpha_{n+1}. \quad (70)$$

又在式(67)中用  $n$  和  $(n+1)$  置换  $(n-1)$ , 可得:

$$\Delta\theta_n = -\Delta\alpha_n + r\Delta I_{n+1}/E_m, \quad (71)$$

$$\Delta\theta_{n+1} = -\Delta\alpha_{n+1} + r\Delta I_{n+2}/E_m. \quad (72)$$

视上列各式中  $\Delta I_n, \Delta\theta_{n+1}, \Delta\theta_n$  和  $\Delta\theta_{n-1}$  为未知数, 而  $\Delta I_{n+1}, \Delta I_{n+2}, \Delta\alpha_{n+1}, \Delta\alpha_n$  和  $\Delta\alpha_{n-1}$  为假想的已知强制参量. 联立求解式(70), (67), (71)和(72), 便得差分方程:

$$\begin{aligned} \frac{r}{E_m} [b_1\Delta I_{n+2} + b_2\Delta I_{n+1} + b_3\Delta I_n] = \\ = (b_1 + b_6)\Delta\alpha_{n+1} + (b_2 + b_5)\Delta\alpha_n + (b_3 + b_4)\Delta\alpha_{n-1}. \end{aligned} \quad (73)$$

在上列各式中, 各常数定义为:

$$b_1 = -\frac{\omega T_H}{2}(\alpha + \sin\beta), \quad (74)$$

$$\begin{aligned} b_2 = \omega T_H \left( \sin\beta + \frac{r_x}{r}\alpha - \frac{r_y}{r}\theta \right) + \\ + \frac{1}{2R_L}(\alpha + \sin\beta)(r\beta - \pi R), \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} b_3 = -b_4 = \frac{r_y}{R_L}(\theta - \sin\beta)(\pi - \beta) - \\ - \left( \omega T_H - \frac{\pi R}{R_L} + \frac{r}{R_L}\beta \right) \left( \frac{\sin\beta}{2} + \frac{r_x - r_y}{2r}\alpha - \frac{r_y}{r}\theta \right), \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} b_5 = \frac{r}{R_L}(\theta - \sin\beta) \left( \pi - \frac{1}{2}\beta \right) + \frac{r_y}{r}(\theta + \alpha) \left[ \omega T_H - \frac{r}{R_L}(\pi - \beta) \right] - \\ - (\alpha + \sin\beta) \left[ \omega T_H - \frac{\pi}{2R_L}(R + r) + \frac{r}{R_L}\beta \right], \end{aligned} \quad (77)$$

$$b_6 = \frac{r}{2R_L}(\theta - \sin\beta)\beta + \frac{1}{2}(\alpha + \sin\beta) \left[ \omega T_H - \frac{r}{R_L}(\pi - \beta) \right], \quad (78)$$

根据梯级函数的拉氏变换, 从式(73)可得其传递函数为:

$$Y(s) \triangleq \frac{\Delta I(s)}{\Delta E_y(s)} = \frac{(b_2 + b_5) + (b_1 + b_6)e^{sT}}{r[b_1e^{2sT} + b_2e^{sT} + b_3]}, \quad (79)$$

$$Y(s) = \frac{(b_2 + b_5 + b_1 + b_6) + (b_1 + b_6)(e^{sT} - 1)}{r[b_1(e^{sT} - 1)^2 + (2b_1 + b_2)(e^{sT} - 1) + (b_1 + b_2 + b_3)]}. \quad (80)$$

设控制电压增量  $\Delta E_y$  的变化频率小于交流激励频率 ( $f = 1/2T$ ), 则可近似地令

$$e^{sT} \cong 1 + sT. \quad (81)$$

于是, 可将式(80)变为连续函数的拉氏变换式:

$$Y(s) \triangleq \frac{\Delta I(s)}{\Delta E_y(s)} = \frac{K_{is}}{r} \frac{1 + T_a s}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2} \quad (82)$$

在式(82)中各常数定义为:

$$K_{is} = \frac{b_1 + b_2 + b_5 + b_6}{b_1 + b_2 + b_3}, \quad (83)$$

$$T_a = \frac{(b_1 + b_6)T}{b_1 + b_2 + b_5 + b_6}, \quad (84)$$

$$T_a = \frac{T}{2\pi} \frac{\pi \sin \beta - \beta \theta + \alpha(\pi - \beta)}{\sin \beta + \alpha - \theta}, \quad (85)$$

$$T_1 = \frac{(2b_1 + b_2)T}{b_1 + b_2 + b_3}, \quad (86)$$

$$T_1 = \frac{R_L}{r_y} \frac{\beta T}{\pi(\pi - \beta)} \frac{\left[ \frac{1}{2R_L} (\alpha + \sin \beta)(r\beta - \pi R) - \omega T_H(\theta + \alpha) \frac{r_y}{r} \right]}{\left[ \theta - \sin \beta - (\theta + \alpha) \left( 1 + \frac{\pi R_L}{(\pi - \beta)r} \right) \right]}, \quad (87)$$

$$T_2^2 = \frac{b_1 T^2}{b_1 + b_2 + b_3}, \quad (88)$$

$$T_2^2 = \frac{\omega T_H T^2}{2(\pi - \beta)} \frac{R_L}{r_y} \frac{(\alpha + \sin \beta)}{\left\{ (\theta + \alpha) \left[ 1 + \frac{\pi R_L}{(\pi - \beta)r} \right] - (\theta - \sin \beta) \right\}}. \quad (89)$$

因为上列各式中各参量  $\alpha$ ,  $\beta$  和  $\theta$  系对应于控制信号发生增量变化之前的稳态值, 故可利用静态方程(58)至(61)的关系加以归并并最后简化为

$$T_a = \left( \frac{1}{4f} \right) \left[ 1 + \frac{1}{K_{isc}} \frac{r_x}{r_y} \left( \frac{K_{is}}{K_{is}} - 1 \right) \right], \quad (90)$$

$$T_1 = T_y K_{is} \left( 1 + \frac{r}{R_L K_{is}} \right) + a \left( \frac{R_L K_{is}}{c r_y} \right) \left[ T_H + \frac{1}{4f} \left( 1 + \frac{r}{R_L K_{is}} \right) \left( \frac{\beta}{\pi} + \frac{r_x}{r_y} \right) \right], \quad (91)$$

$$T_2^2 = T_H T_y \left[ K_{is} + \frac{a r_y}{R_L} \left( \frac{\beta}{\pi} + \frac{r_x}{r_y} \right) \right]. \quad (92)$$

上式中常系数

$$a \triangleq 1 - \frac{K_{is}}{K_{is}}, \quad (93)$$

$$c \triangleq \frac{\beta}{\pi} + \frac{r_x}{r_y} + \frac{R_L}{r_y} K_{is}. \quad (94)$$

这里应该指出: 传递函数式(82)的分子之所以是一阶的, 是由于式(73)和(79)中系数  $b_3 = -b_1$  的直接结果. 尽管  $b_3$  和  $b_1$  与式(38), (52), (53)和(54)中各系数存在着很复杂的关系, 但是根据式(55),  $b_3 = -b_1$  正是一个必然的结果. 它正确地反映出: 在上述假设条件下, 带感性直流负载的扼流磁放大器仍具有半波滞后反应特性. 此结论是本文与文献[5]之间存在很重要的分歧之一.

元件的动态特性, 一般要求更直观地表达为频率反应和阶跃函数输入反应特性. 根据传递函数式(82), 带感性直流负载扼流磁放大器的频率反应表达式可写为:

$$Y(j\omega_s) = \frac{\Delta I(j\omega_s)}{\Delta E_y(j\omega_s)} = \frac{K_{i\delta}}{r_y} \frac{1 + j\omega_s T_a}{(1 - \omega_s^2 T_2^2) + j\omega_s T_1}, \quad (\omega_s T \ll 1) \quad (95)$$

令控制电压增量  $\Delta E_y(s)$  为一阶函数, 即

$$\Delta E_y(s) = \frac{\Delta E_y}{s}. \quad (96)$$

代入(83)式后便得负载电流增量对阶跃函数输入的反应式:

$$\Delta I(s) = \frac{K_{i\delta}}{r} \cdot \Delta E_y \frac{1 + T_a s}{s(1 + T_1 s + T_2^2 s^2)}. \quad (97)$$

根据上式的特征方程

$$1 + T_1 s + T_2^2 s^2 = 0, \quad (98)$$

可得其特征根

$$s_1, s_2 = -\frac{T_1}{2T_2^2} \pm \sqrt{\left(\frac{T_1}{2T_2^2}\right)^2 - \frac{1}{T_2^2}}. \quad (99)$$

若  $s_1$  和  $s_2$  系实根:

$$s_1, s_2 = -p \pm q \quad (100)$$

( $p$  和  $q$  都为实数)则式(97)的反变换为

$$\Delta I(t) = \frac{\Delta E_y K_{i\delta}}{r_y} \left[ 1 + \frac{T_a - \frac{1}{p-q}}{2qT_2^2} e^{-(p-q)t} - \frac{T_a - \frac{1}{p+q}}{2qT_2^2} e^{-(p+q)t} \right]. \quad (101)$$

又若  $s_1$  和  $s_2$  为复数:

$$s_1, s_2 = -p \pm jq, \quad (102)$$

则式(97)的反变换为

$$\Delta I(t) = \frac{\Delta E_y K_{i\delta}}{r_y} \left[ 1 + \frac{1}{qT_2} \sqrt{(1 - T_a p)^2 + (T_a q)^2} \cdot e^{-pt} \sin(qt + \xi) \right], \quad (103)$$

上式中

$$\xi = \arctan \left( \frac{T_a q}{1 - T_a p} \right) - \arctan \left( -\frac{q}{p} \right). \quad (104)$$

## 五、理論公式和实验验证<sup>1)</sup>

为了证明本文公式的正确性和通用性,除引述文献[7]的两个实验外<sup>1)</sup>,下面还列举了三个实验的实测数据,并把这些数据分别代入本文及有关文献<sup>[1-7,11]</sup>的理论公式中以进行验证和比较。

1) 文献[7]是所引述的各文献中不仅给出实验曲线和结果,且给出磁芯绕组参数等实验数据的唯一一篇文献,我们曾将该文的实验数据分别代入本文和有关各文献的理论公式中进行了验证和比较。

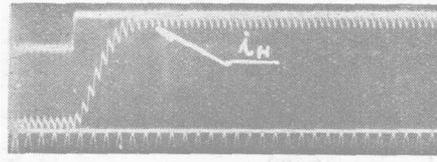
验证结果表明:在原实验1中(磁性材料:65 НП,  $f=50$  赫,  $R_L=250$  欧,  $T_H=51 \times 10^{-3}$  秒,  $R_L/r_y=7.1$ ,  $r_x/r_y=0.29$ ),本文和文献[5,7]的理论曲线(阶跃增量输入动态反应)几乎彼此重叠,都与实验曲线符合得很好,文献[1,2,3]次之,文献[4]最差。但是总的说来,在该实验中各理论分析结果都尚可适用,与实验结果基本上一致。

在原实验2中(磁性材料同原实验1,  $f=440$  赫,  $R_L=4000$  欧,  $T_H=0.1$  秒,  $R_L/r_y=14.7$ ,  $r_x/r_y=0.0375$ ),本文和文献[7]的理论曲线仍几乎都与实验曲线重叠,但其它各文献[1-6]的结果都远逊于原实验1。

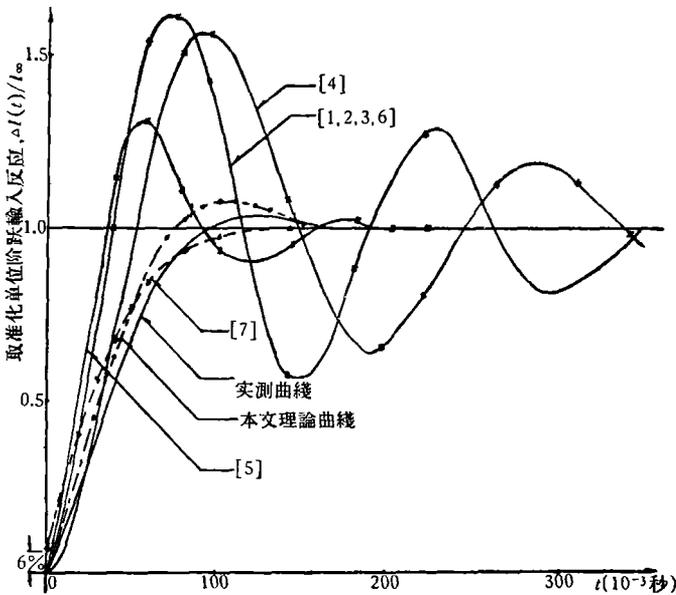
表 1 实验 1 中阶跃增量输入反应的理論計算值比較\*

根 据	传递函数 $Y(s) \triangleq \frac{\Delta I(s)}{\Delta E_y(s)}$	特 征 根
(2)式 <sup>[1,2,3,6]</sup>	$0.003 \frac{1}{1 + 6.25 \times 10^{-3}s + 0.538 \times 10^{-3}s^2}$	$- 5.8 \pm j42.7$
(6)式 <sup>[4]</sup>	$0.0053 \frac{1}{1 + 9.67 \times 10^{-3}s + 0.834 \times 10^{-3}s^2}$	$- 5.8 \pm j33.2$
(10)式 <sup>[5]</sup>	$0.003 \frac{1}{1 + 21.35 \times 10^{-3}s + 0.538 \times 10^{-3}s^2}$	$-19.9 \pm j56$
(14)式 <sup>[7]</sup>	$0.003 \frac{1 + 13.5 \times 10^{-3}s + 0.361 \times 10^{-6}s^2}{1 + 44.68 \times 10^{-3}s + 0.6 \times 10^{-3}s^2}$	$-37.4 \pm j16.2$
本文公式(82)	$0.0035 \frac{1 + 5.15 \times 10^{-3}s}{1 + 35.1 \times 10^{-3}s + 0.772 \times 10^{-3}s^2}$	$-22.7 \pm j28.1$

\* 在此表中取  $m = 1.0$ .



a 实验 1 的示波器实拍曲线



b 实测曲线与各文献理论计算曲线比较(曲线[1],[2],[3]和[4]等,分别表示文献[1],[2],[3]和[4]等的理论曲线)

图 5

实验中采用了两对材料相同(65HП)、大小不同的磁芯。大磁芯的参数为: 截面积 0.84 厘米<sup>2</sup>,  $W_p = 1000$  匝,  $W_y = 750$  匝。小磁芯参数为: 截面积 0.094 厘米<sup>2</sup>;  $W_p = 200$  匝,  $W_y = 100$  匝。整流电桥都由二极管 ДПД-27 组成。

**实验 1** 利用上述大磁芯组成磁放大器线路(如图 1)。实测结果得负载  $L = 30.9$  亨,  $R_L = 364.2$  欧,  $r_x = 382$  欧,  $r_y = 690$  欧,  $E_m = 42.5\sqrt{2}$  伏,  $f = 50$  赫,  $I_m = 50.6$  毫安。

静态起始工作点:  $E_y = 1.5$  伏,  $I_0 = 10.5$  毫安。阶跃增量输入动态反应的示波器波形如图 5a 所示, 其静态工作点:  $E_y = 3.76$  伏,  $I_\infty = 20$  毫安。

根据上述数据, 可估算得整流电桥电阻约为 4 欧, 从而可得:  $R_L/r_y = 0.534$ ,  $r_x/r_y = 0.55$ ,  $T_y = 2.66 \times 10^{-3}$  秒,  $T_H = 86.2 \times 10^{-3}$  秒,  $I_{y,0}/I_{y,m} = 0.048$ 。把这些已知数据代入各文献公式中, 便可得附表 1 和理论曲线图 5b。

从附表 1 和图 5b 显见: 在  $r_x/r_y = 0.55$  和  $R_L/r_y = 0.534$  的情况下, 与实测结果相比较, 以本文理论公式符合得较好, 文献[7]次之(它在此已不能反映出超调现象)。其他各文献<sup>[1-6]</sup>的结果则概不能适用<sup>1)</sup>。

**实验 2** 利用小磁芯组成电路(如图 1), 实测结果得负载  $L = 11$  亨,  $R_L = 68$  欧,  $f = 400$  赫,  $E_m = 6.67\sqrt{2}$  伏,  $r_y = 930$  欧,  $r_x = 5.7$  欧,  $I_m = 70$  毫安。从以上数据, 可得实际负载电阻(包括整流电桥电阻)应为  $R_L = 89.6$  欧。故  $R_L/r_y = 0.0975$ ,  $r_x/r_y = 0.0062$ ,  $T_H = 0.123$  秒,  $T_y = 6.25 \times 10^{-5}$  秒。

静态起始工作点, 取曲线下端特别弯曲部分(见图 8), 其实测数据为  $I_{y,0} = 2.75$  毫安,  $I_0 = 7.24$  毫安, 即:  $I_{y,0}/I_{y,m} = 0.0393$  和  $I_0/I_m = 0.1032$ 。

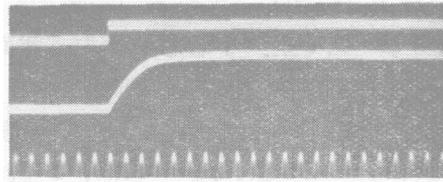
阶跃增量输入动态反应的示波器波形如图 6a 所示, 其稳态工作点实测为  $I_y = 15.5$  毫安,  $I_\infty = 19.9$  毫安。换言之, 阶跃增量高达  $\Delta I_y/I_{y,m} = 18\%$ , 用以夸大有输出特性非线性的作用。

把上列已知数据代入各文献理论公式中, 便可得到附表 2 及图 6b。

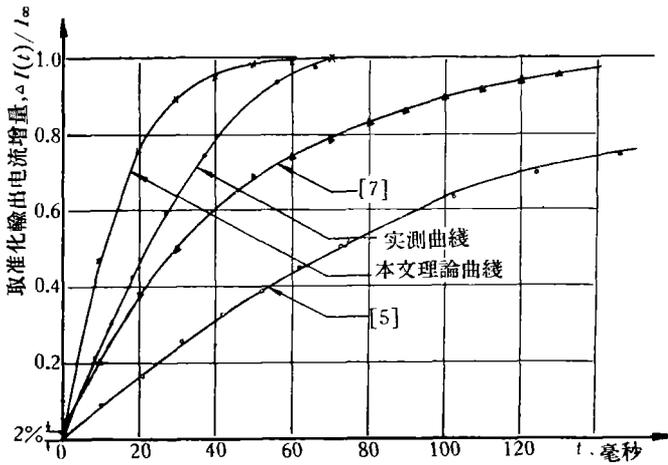
表 2 实验 2 中阶跃输入反应的理论计算值比较

根 据	传递函数 $Y(s) \cong \frac{\Delta I(s)}{\Delta I_y(s)}$	特 征 根
(2)式 <sup>[1,2,3,6]</sup>	$32.7 \frac{1}{1 + 15.7 \times 10^{-3}s + 1.93 \times 10^{-5}s^2}$	$-4.05 \pm j227$
(6)式 <sup>[4]</sup>	$50 \frac{1}{1 + 24 \times 10^{-5}s + 2.95 \times 10^{-5}s^2}$	$-4.05 \pm j184$
(10)式 <sup>[5]</sup>	$32.7 \frac{1}{1 + 0.1034s + 1.93 \times 10^{-5}s^2}$	$-9.65, -5358$
(14)式 <sup>[7]</sup>	$32.7 \frac{1 + 1.7 \times 10^{-3}s + 0.582 \times 10^{-6}s^2}{1 + 45.2 \times 10^{-3}s + 2.65 \times 10^{-5}s^2}$	$-22.5, -1697.5$
本文公式(82)	$19 \frac{1 + 0.625 \times 10^{-3}s}{1 + 14.9 \times 10^{-3}s + 3.09 \times 10^{-5}s^2}$	$-81, -401$

1) 利用本实验的线路和磁芯, 改变其控制回路电阻, 令  $r_y = 130.5$  欧(即使  $r_x/r_y = 2.92$  和  $R_L/r_y = 2.82$ )。这时, 各文献理论结果与实验曲线相比较, 其结论亦基本上与本实验相同。



a 示波器实拍曲线



b 各文献理论曲线与实测曲线比较

图 6

从所得这些结果显见: 文献 [1—4, 6] 的理论公式在此已不适用。值得特别注意的是: 本实验的实验条件与文献 [7] 的假设条件可以说完全一致, 但其理论分析与实验结果的符合程度却并不很好。取准化反应曲线似乎尚与实测曲线相接近(图 6b 中的曲线 [7]), 但其稳态电流 ( $I_0$  和  $I_\infty$ ) 的理论计算值竟与实测值分别相差达 50% 和 120%。各文中唯有本文的理论分析, 与实测结果符合较佳, 即使在大阶跃增量等极端条件下,  $I_0$  和  $I_\infty$  的理论值与实测值相差亦仅 2% 和 3.7% (见表 3)。若适当减小阶跃增量的幅值, 本文理论分析结果显然是完全可以满足工程计算精度要求的。

表 3 起始负载电流( $I_0$ )和稳态电流( $I_\infty$ )的实测值和各文献理论计算值比较

根 据	起始负载电流 $I_0$	稳 态 电 流
实测值	7.24 毫安	19.9 毫安
文[1,2,3,5,6,7]	10.8 毫安	4.35 毫安
文[4]	10.8 毫安	50 毫安
本文公式	7.1 毫安	26.1 毫安

**实验 3** 本实验包括两部分。一部分是利用上述实验 1 中所用的同一磁放大器和电感负载, 在其它条件相同的情况下改变  $r_x/r_y$  和  $R_L/r_y$  的比值, 分别测出有关磁放大器的静态控制特性(如图 7 所示)。此外, 为了使实验条件更接近于本文分析中的假设条件(即  $\eta T \ll 1$ ), 又利用实验 2 中的同一磁放大器和电感负载, 在 400 赫的励磁电源作用下, 测

得其静态特性(图 8), 然后, 根据这些实验数据, 对本文静态公式(62)和(63)的正确性进行核校。

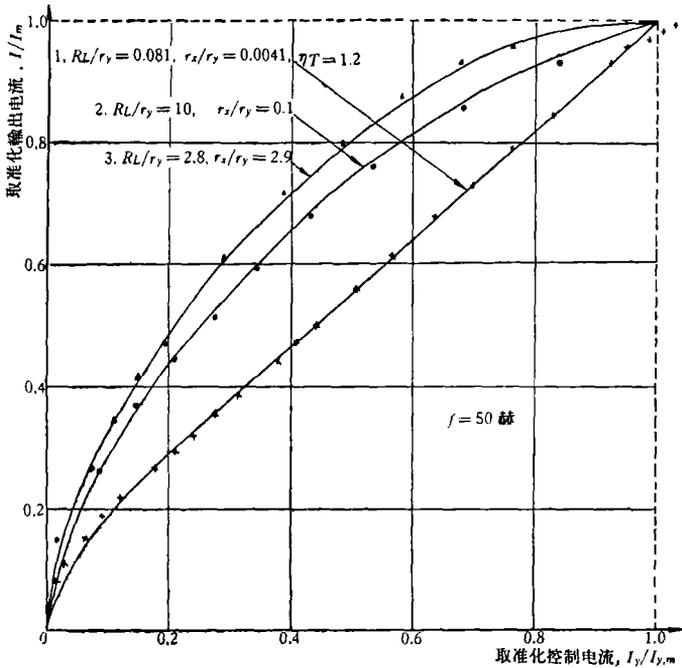


图 7 在不同的电路阻值比( $r_x/r_y$  和  $R_L/r_y$ ) 情况下, 带直流电感负载扼流磁放大器的取准化静态特性曲线。图中实线系本文的理论计算曲线; 标以三角形、十字形和小圆点的则分别为各实测数据<sup>1)</sup>

- 曲线 1.  $R_L = 295$  欧,  $L = 31.7$  亨,  $r_x = 15$  欧,  $r_y = 3650$  欧;  
 曲线 2.  $R_L = 1535$  欧,  $L = 31.7$  亨,  $r_x = 16.7$  欧,  $r_y = 148$  欧;  
 曲线 3.  $R_L = 365.4$  欧,  $L = 31.7$  亨,  $r_x = 381.9$  欧,  $r_y = 131$  欧。

在图 7 中, 曲线 2 与过去通用的静态特性公式 (19) 和 (20)<sup>[1,3,4,11]</sup> 的理论曲线可以说完全相符。这清楚地表明, 事实上过去一般通用的带电感性直流负载扼流磁放大器的静态公式 (19) 和 (20) 并非一般解, 而只是本文公式的一个特解, 它们只适用于  $R_L/r_y \gg 1$  且  $r_x/r_y \ll 1$  的情况。

图 7 和图 8 的差别主要在于前者  $\eta T > 1$ , 后者  $\eta T \ll 1$ , 这是符合本文分析中的假设条件的。尽管有此差别, 二图中的理论曲线与实测数据都很符合。图 8 中接近饱和和电流部分的实测数据较理论值略小是可以理解的, 因为励磁频率提高后, 输出绕组的漏电感和饱和电感的影响将随之增大, 迫使饱和电流实测值较理论值略低。

上述这些结果表明了理论公式 (19) 和 (20) 和实验数据的符合程度有时好、有时坏的真正原因。实际磁芯的矫顽磁力、饱和电感和漏电感并非等于零, 显然将影响实验和理论

1) 在实测数据处理中必须注意: 当  $\omega T_H \gg 1$  且  $R_L \gg r_x$  时 (如图 7 中曲线 1 和 2 所示), 实测负载饱和电流和理论计算值式 (65) 基本上是符合的, 因此, 定标么值并不存在困难。但是, 当  $\omega T_H \gg 1$  且  $R_L$  和  $r_x$  之值的大小相当时 (如图 7 中曲线 3 所示), 负载电感的作用便相对地变得显著起来, 负载饱和电流的实测值将略大于理论计算值。这时, 实验数据应按实测的负载饱和电流值进行标么。

结果二者的符合程度。但是, 这些因素的影响终究是很次要的, 主要是电阻比值  $r_x/r_y$  和  $R_L/r_y$  二者的相对大小。

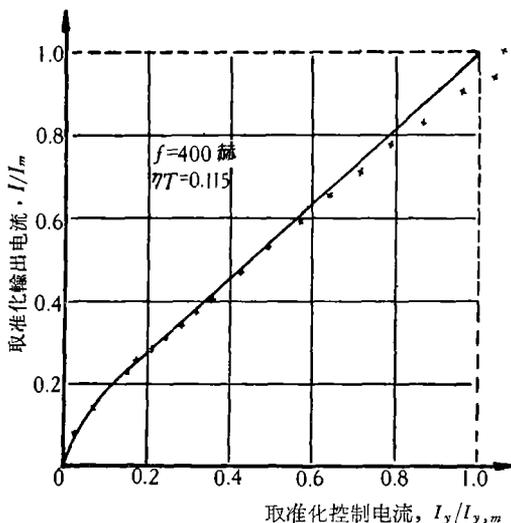


图 8 另一条取准化静态特性曲线  
(在此图中:  $f = 400$  周,  $R_L/r_y = 0.0975$ ,  $r_x/r_y = 0.0062$ ,  $\eta T = 0.115$ )

## 五、结 论

本文在前述各文献的工作基础上, 严谨地推导出带电感性直流负载的扼流磁放大器的静、动态特性公式及其传递函数, 并根据实验数据对前述各文献及本文中公式的正确性进行了验证和比较。结论可归结如下:

(1) 本文公式(62), (63)和(64)是带电感性直流负载扼流磁放大器静态特性的通解, 正确地反映出有关磁放大器的一些参量和静态特性之间存在的函数关系, 而一般通用的公式(19)和(20)<sup>[1,3,4,7,11]</sup>则只是本文公式的一个特解。

(2) 本文推导出的、描述带电感性直流负载扼流磁放大器的动态反应的传递函数公式(82)与已有的各文献的结果都不同, 它是一个分子为一阶和分母为二阶的拉氏变换式。在推理和物理概念上不存在前述各文献存在的问题(见第二节), 与实验结果的符合程度亦最好。

(3) 实验证明: 本文的静、动态公式是比较通用的, 只要满足假设条件:  $\omega L \gg R_L$  和  $\beta > \theta$ , 即可与实验数据符合得很好。

作者在写稿过程中曾得到刘庆培和薛仁经等同志的帮助, 特别是戴明仁同学在写毕业论文期间曾对本文原稿逐式逐项地进行了核验, 大有助于本文的完成, 谨此一并表示感谢。

## 参 考 文 献

- [1] Storm, H. F., Saturable Reactor with Inductive D. C. Load, Part 1, Steady State Operation, *A.I.E.E. Trans.*, 71 (1952), 335—343.

- [2] Storm, H. F., Saturable Reactor with Inductive D. C. Load, Part 2, Transient Response, *A.I.E.E. Trans.*, **72** (1953), 182—192.
- [3] Storm, H. F., *Magnetic Amplifiers*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1955, 170—192.
- [4] Розенблат, М. А., Магнитные усилители, *Советское радио*, Москва, 1960, т. I, 261—264; т. II, 268—277.
- [5] Ху Цза-яо, Шубенко, В. А., Переходные процессы в магнитных усилителях с активно-индуктивной нагрузкой в цепи выпрямленного тока, *Электричество*, 1960, № 10, 35—40.
- [6] Сафрис, Л. В., К вопросу о переходных процессах магнитных усилителях с индуктивной нагрузкой, включенной через выпрямитель, *А и Т*, **XIX** (1958) № 3, 228—238.
- [7] Львов, Е. Л., Передаточная функция дроссельного магнитного усилителя с активно-индуктивной нагрузкой на постоянной токе при ступенчатом входном сигнале, *А и Т*, **XXII** (1961), № 12, 1956—1972.
- [8] Finizi, L. A., Jackson, R. R., The operation of Magnetic Amplifiers with Various Types of Load, *A.I.E.E. Trans.*, 1954, Vol. 73, Part 1, 270—288.
- [9] 胡家跃, 带直流感性负载时磁放大器的负载电流增长过程, *自动化学报*, **2**(2), 1964, 97—107.
- [10] Johannesen, P. R., Analysis of Magnetic Amplifiers by the Use of Difference Equations, *A.I.E.E. Trans.*, 1955, Vol. 73, Part I, 700—711.
- [11] Васильева, Н. П., Работа магнитного усилителя с индуктивно-активной нагрузкой, включенной через выпрямительный мост, *А и Т*, 1954, № 6, 544—553.
- [12] 钱学森, *工程控制论*, 第 13 章, 科学出版社, 北京, 1958.

## THEORETICAL ANALYSIS OF STATIC AND DYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE SATURABLE REACTOR WITH INDUCTIVE D. C. LOAD AND THEIR FORMULAS

PAN SHOU-LU

The saturable reactor with an inductive d.c. load is one of the most basic circuits of magnetic amplifiers. The non-linearities involved in its operation are very peculiar, and thus bring great difficulties to any attempt on its theoretical analysis.

On the basis of the actual current-wave forms, a new set of formulas for the static and dynamic characteristics of the circuit is rigorously derived in this paper. It is shown that the static characteristic of a S. R. with a d.c. inductive load is sensitive particularly to the variations of the resistance ratios,  $r_x/r_y$  and  $R_L/r_y$ , and that the transfer function of the circuit is of the form:

$$Y(s) = (1 + T_a s) / (1 + T_1 s + T_2 s^2).$$

Experiments indicate that the formulas derived in this paper are correct and easy to use. They agree very satisfactorily with the experimental data and are valid for most cases. Many anomalies, which could hardly be explained before in the operation of the circuit, are found now to be not peculiar at all.