

热工对象的低阶近似模拟*

钱钟韩 孟祖浩

摘 要

本文针对热工对象一般阻尼较大的特点,根据由级数展开取得低阶近似公式的原理,得到了统一而又便利的数学简化方法;用在单回路调节系统的模拟和分析中,可以得到相当准确的结果。文中以多容对象、单相换热器和纯时滞环节等典型对象为例,求得了一系列的低阶近似式和图表,并验证了它们的准确性。文中又以锅炉的某一个单相区的各类实际传递函数为例,求出了低阶近似式,论证了复杂环节同样可以低阶简化。文中还讨论了如何由对象的实验飞升曲线求其低阶近似传递函数,指出文献[1]的积分法实质上就是级数展开法,并对其计算程序作了一些改进。

一、导 言

热工对象往往很复杂,其精确的传递函数(从物理现象推导出来的动态方程式)阶次很高,甚至是超越函数,为实际模拟研究造成困难。怎样把超越函数有理化,怎样利用容量不大的模拟机来模拟比较复杂的对象和系统?迄今为止,代表作品如文献[2],[3],其结果均很复杂,又很粗糙,因此不能认为是最佳的解答。目标应当是用相当简单的近似式并能达到足够高的准确性。

二、研究方法

如果把热工对象的精确传递函数的倒数式展开成级数表达式:

$$\frac{1}{W(x)} = 1 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + \dots, \quad (1)$$

式中 $x = TS$, S 是时间导数的运算符; T 是该传递函数的特征时间常数。

因为一般热工对象对高频讯号具有低通滤波器的特性,它的高频反应很小,若以一个二阶有理分式来近似表达原函数:

$$W(x) \approx \frac{1 - ax}{1 + cx + dx^2}, \quad (2)$$

则如果此分式倒数的级数展开式的低阶各项与原函数相同,就能准确反映原函数的低频特性。而对于高频讯号,近似式也有一定的滤波性;因此与原函数一样,在高频讯号作用下近似式的反应亦较小,这时误差的绝对值亦是不大的。注意到低阶分式(2)仅含三个系数,因此它只能准确到级数展开式的第四项。应用综合除法求此分式倒数的级数展开式,并与式(1)比较低阶各项系数,可得

* 本文曾于1965年7月在中国自动化学会年会上宣读。本文的初稿于1964年9月22日收到,修改稿于1965年9月21日收到。

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{B_3}{B_2}; \\ c &= B_1 - a; \\ d &= B_2 - aB_1. \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

我们称式(2)为 $\left[\frac{I}{II}\right]$ 阶近似式。有时为得到更高的准确性,需要应用 $\left[\frac{II}{II}\right]$ 阶和 $\left[\frac{II}{III}\right]$ 阶近似式,它们各准确到级数展开式的第五项和第六项,其求法与 $\left[\frac{I}{II}\right]$ 阶式类似。

$\left[\frac{II}{II}\right]$ 阶式(特别适用于高频反应不等于零或飞升曲线的起始点有一定阶跃的情况):

$$W(x) \approx \frac{1 - ax + bx^2}{1 + cx + dx^2}, \quad (3)$$

式中

$$\begin{aligned} a &= \frac{B_2B_3 - B_1B_4}{B_2^2 - B_1B_3}; \\ b &= \frac{B_3^2 - B_2B_4}{B_2^2 - B_1B_3}; \\ c &= B_1 - a; \\ d &= B_2 - aB_1 + b. \end{aligned}$$

$\left[\frac{II}{III}\right]$ 阶式:

$$W(x) \approx \frac{1 - ax + bx^2}{1 + cx + dx^2 + ex^3}, \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} a &= \frac{B_3B_4 - B_2B_5}{B_3^2 - B_2B_4}; \\ b &= \frac{B_4^2 - B_3B_5}{B_3^2 - B_2B_4}; \\ c &= B_1 - a; \\ d &= B_2 - aB_1 + b; \\ e &= B_3 - aB_2 + bB_1. \end{aligned}$$

低阶近似式一般采用分子式和分母式的阶次比较相近的形式,这是因为此时分子式和分母式的总阶次较高,可使其级数展开式准确到更高阶项;而在分子式阶次不超过分母式的情况下,模拟所需的计算机容量却只决定于分母的阶次。上述级数展开所得的低阶近似法实质上是和维氏(B. Viscoatoff)对应连分式展开法^[4]完全一致的,所得的低阶近似式就是对应连分式的低阶渐近分式。用维氏法有时更为方便,它可依次求出各阶近似式,且可直接求出高阶有理分式的低阶渐近分式,而不必预先通过综合除法求出它的级数展开式。

低阶近似的概念在文献[1]中就已注意到了,但是,该文在具体求近似式时,为了方便,却令近似式的分子为1,这在分母阶次相同的情况下,这个近似式的准确性是较差的。

若传递函数的阶次较高,且其倒数的级数展开式的各高阶项系数收敛得较慢,则所得的低阶近似式在高频时误差会较大。这时可对所得近似式的各项系数适当地加以校正。

这就是说,不只是机械地、严格地按照级数展开式来确定各低阶项,而是考虑了忽略高阶项所造成的误差情况,再适当地修改各低阶项的系数。这样所得的校正近似式虽在最低频率段不是最佳的,却提高了在中频段和高频段的近似准确性。在对由级数展开法所得的近似式进行校正时,原则上应该根据时间特性的误差情况进行,但更方便的是根据它的实频(或虚频)特性的误差情况,因为实频特性与时间特性间有一一对应关系。在定性地分析了低阶近似式中各项系数对实频特性的影响的基础上,可以有步骤地用凑试方法修改近似式中的某些系数,使校正近似式和原式的实频特性更为接近。

必须指出,对于阶次较高的传递函数采用了低阶近似式后,虽在较高频率段可能误差很大,但在较低频率段仍有着很高的准确性。比较实频特性可以发现, $\left[\frac{\text{II}}{\text{II}}\right]$ 阶近似式的适用范围一般在对象的相位角 $\leq 180^\circ$ 的频率范围内,而 $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶近似式则可以适用于对象相位角 $\leq 240^\circ \sim 270^\circ$ 。因此,若把这个函数作为一个独立对象,例如求它在阶跃扰动下的反应过程(飞升曲线),则近似式的飞升曲线在开始段可能误差较大。但是我们要研究的问题往往不是该对象孤立存在时的性质,而是要求它与整个系统中其它部分的相互作用。当对象本身的惯性较大时,整个调节系统的工作频率一般就较低。例如在比例-积分(PI)调节系统里,工作频率总在对象幅相特性的第三象限,即对象的相位角约为 $120^\circ \sim 150^\circ$ 。因此,若用 $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶近似式来代替任何高阶对象,对整个系统的过渡过程总可以得到相当准确的结果。热工对象的调节过程往往只有一个低频振荡成分和一个单调成分起着主导作用,因此整个单回路调节系统通常可以用一个三阶函数来近似表达,而调节对象也可以用不超过三阶的函数来近似表达。

三、低阶近似式举例

下面对某些常用于热工对象的传递函数形式,用上述方法分别求其低阶近似式,并用飞升曲线和调节过程来校验它们的准确性。

1. 具有集中参数的多容惯性环节

多容对象的传递函数为 $\frac{1}{(1+TS)^n}$, 它虽然本身就是一个有理函数,但如果阶次较高,则仍须加以简化,才便于进行模拟。它的飞升曲线在开始段变化甚慢,即有容积时滞。因此,目前流行着这样的一种近似表达式:

$$\frac{1}{(1+TS)^n} \approx \frac{e^{-\tau s}}{1+T_a s}$$

其中 τ 和 T_a 值由飞升曲线的拐点 q 作切线而得。但这个近似式是很不准确的,它的飞升曲线也是普遍低于原来的曲线。如果把对象配以调节器组成闭环系统,则在同样的调节器整定参数下,用上述作图方法所得近似式代替原多容对象,所得调节过程将会衰减得过快,与原对象的过渡过程相差很大。这种表达式的最大缺点就是引入了原来曲线中所没有的一个奇异点。因此如果在分析计算中采用了这种常用的近似表达式,有时会导致错误的结论。

实际上,即使用了上述近似式亦并不能解决模拟问题,因为为了模拟近似式中的纯时

滞环节,还得进一步求它的有理近似式,或采用复杂的专用附加装置。

让我们直接来推导多容对象的低阶近似式,令 $x = TS$, 由

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots, \quad (5)$$

按式(3)和(4),得 $\left[\frac{\text{II}}{\text{II}}\right]$ 阶近似式

$$\frac{1}{(1+x)^n} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}(n-2)x + \frac{1}{12}(n-1)(n-2)x^2}{1 + \frac{1}{2}(n-2)x + \frac{1}{12}(n+1)(n+2)x^2}, \quad (6)$$

和 $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶近似式

$$\frac{1}{(1+x)^n} \approx \frac{1 - 0.4(n-3)x + 0.05(n-2)(n-3)x^2}{1 + 0.6(n+2)x + 0.15(n+1)(n+2)x^2 + \frac{1}{60}n(n+1)(n+2)x^3}. \quad (7)$$

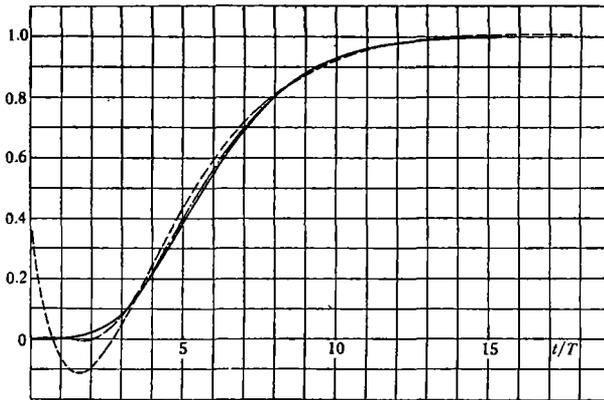


图1 $\frac{1}{(1+x)^6}$ 及其近似式的飞升曲线 ($x = TS$)

实线 — $\frac{1}{(1+x)^6}$;

虚线 — $\left[\frac{\text{II}}{\text{II}}\right]$ 阶式 $\frac{1 - 2x + 1.67x^2}{1 + 4x + 4.67x^2}$;

点划线 — $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶式 $\frac{1 - 1.2x + 0.6x^2}{1 + 4.8x + 8.4x^2 + 5.6x^3}$ 。

图1绘出了阶次 n 为6的飞升曲线。由图可见,当 $n = 6$ ($\epsilon_{pr} \approx 0.5$) 时, $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶式在整个过程中近似得很好, $\left[\frac{\text{II}}{\text{II}}\right]$ 阶式在初始时有突跳,造成显著错误;但在后段(反映低频特性)也近似得很好。阶次越高,低阶近似式的飞升曲线误差越大。但即使原式高到14阶 ($\epsilon_{pr} \approx 1$), $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶式的误差亦不超过8%。图2和图3绘出了对象为6阶的比例—积分(PI)调节系统和比例—微分—积分(PID)调节系统的过渡过程。近似式在PI系统中准确性很高。对PID系统,由于引进了微分作用,使系统的工作频率增高,故近似

式的准确性将略为恶化；但由图可见， $\left[\frac{II}{III}\right]$ 阶式仍有相当高的准确性，可供模拟和分析之用。

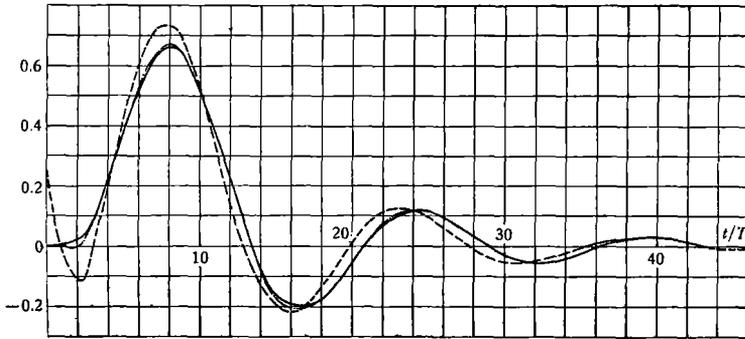


图2 $\frac{1}{(1+TS)^6}$ 及其近似式的 PI 调节系统过渡过程

对象：实线—— $\frac{1}{(1+TS)^6}$ ；

虚线—— $\left[\frac{II}{II}\right]$ 阶近似式；

点划线—— $\left[\frac{II}{III}\right]$ 阶近似式。

调节器： $S_1 = 0.924$ ； $\frac{T_i}{T} = 3.57$ 。

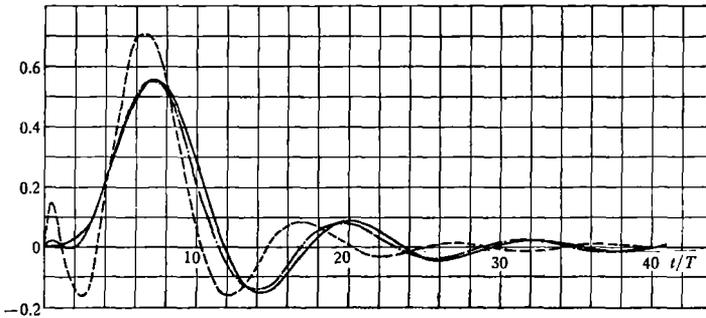


图3 $\frac{1}{(1+TS)^6}$ 及其近似式的 PID 调节系统过渡过程

对象：实线—— $\frac{1}{(1+TS)^6}$ ；

虚线—— $\left[\frac{II}{II}\right]$ 阶近似式；

点划线—— $\left[\frac{II}{III}\right]$ 阶近似式。

调节器： $S_1 = 1.49$ ； $\frac{T_i}{T} = 3.9$ ； $\frac{T_a}{T_i} = 0.25$ 。

2. 单相介质热交换器传递函数的基本部分 $e^{-\frac{kTS}{1+TS}}$

单相介质热交换器在各种扰动方式下出口温度变化的传递函数见下文 [式 (16) — (19)]，其中均含有同一个基本成分 $e^{-\frac{kTS}{1+TS}}$ 。因此应该首先求出这部分超越函数的低阶近似式。

文献[2,3]都系统地研究了此超越函数的近似模拟,但所得结果均很复杂,准确性又不高。

展开 $e^{\frac{kx}{1+x}}$ 成级数表达式:

$$e^{\frac{kx}{1+x}} = 1 + kx + k\left(\frac{1}{2}k - 1\right)x^2 + k\left(\frac{1}{6}k^2 - k + 1\right)x^3 + k\left(\frac{1}{24}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k - 1\right)x^4 + k\left(\frac{1}{120}k^4 - \frac{1}{6}k^3 + k^2 - 2k + 1\right)x^5 + \dots, \quad (8)$$

按式(3)和(4),得 $\left[\frac{\text{II}}{\text{II}}\right]$ 阶近似式

$$e^{\frac{-kx}{1+x}} \approx \frac{1 + \left(2 - \frac{1}{2}k\right)x + \left(1 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{12}k^2\right)x^2}{1 + \left(2 + \frac{1}{2}k\right)x + \left(1 + \frac{1}{2}k + \frac{1}{12}k^2\right)x^2}, \quad (9)$$

和 $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶近似式

$$e^{\frac{-kx}{1+x}} \approx \frac{1 - ax + bx^2}{1 + cx + dx^2 + ex^3}, \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned} a &= \frac{0.4(k^3 - 12k^2 + 45k - 60)}{k^2 - 6k + 12} = 0.4(k - 6) - \frac{1.2(k - 4)}{k^2 - 6k + 12}; \\ b &= \frac{0.05(k - 4)^4 + 0.8(k - 1)}{k^2 - 6k + 12} = 0.05(k - 6)(k - 4) + \frac{1.2(k - 2)}{k^2 - 6k + 12}; \\ c &= k - a = 0.6(k + 4) + \frac{1.2(k - 4)}{k^2 - 6k + 12}; \\ d &= \frac{0.15(k^4 - 8k^2 + 80)}{k^2 - 6k + 12} = 0.15(k^2 + 6k + 16) + \frac{1.2(3k - 14)}{k^2 - 6k + 12}; \\ e &= \frac{k^5}{60(k^2 - 6k + 12)}. \end{aligned}$$

为得到必要的准确性,对于不同大小的 k 值应该采用不同阶次的低阶近似式。我们建议:

(1) 当 $k \leq 1.5$, 取 $\left[\frac{\text{I}}{\text{I}}\right]$ 阶近似式如下:

$$e^{\frac{-kx}{1+x}} \approx \frac{1 + e^{\frac{-k}{2}x}}{1 + e^{\frac{+k}{2}x}}, \quad (11)$$

(2) 当 $1.5 < k < 5$, 取 $\left[\frac{\text{II}}{\text{II}}\right]$ 阶近似式(9);

(3) 当 $k \geq 5$, 取 $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶近似式(10);

(4) 当 $k > 10$, 可只用 $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 式(10)各项系数的整数部分,即

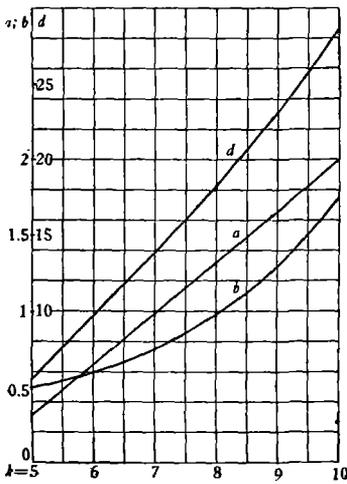


图 4 $5 \leq k \leq 10$ 时, 近似式 $e^{-\frac{kx}{1+x}} \approx \frac{1-ax+bx^2}{1+cx+dx^2}$ 的各项系数 [$c=k-a$]

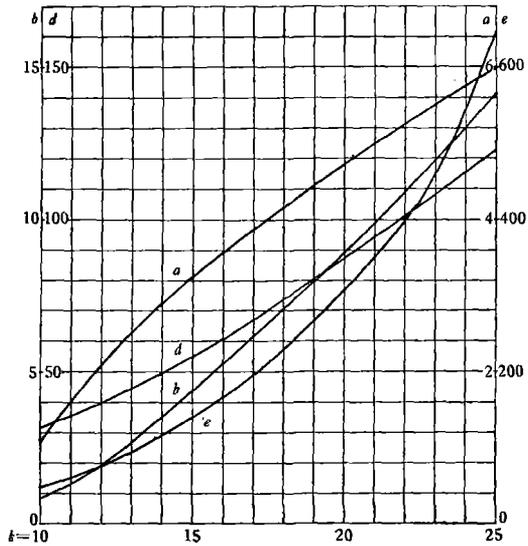


图 5 当 $10 \leq k \leq 25$ 时, 近似式 $e^{-\frac{kx}{1+x}} \approx \frac{1-ax+bx^2}{1+cx+dx^2+ex^3}$ 的各项系数 [$c=k-a$]

$$\left. \begin{aligned} a &= 0.4(k-6); \\ b &= 0.05(k-6)(k-4); \\ c &= 0.6(k+4); \\ d &= 0.15(k^2+6k+16); \\ e &= \frac{1}{60}(k^3+6k^2+24k+72). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(5) 为了降低阶次和减小误差, 我们通过试算, 得到一些系数经过校正的近似式, 例如:

当 $5 \leq k < 10$, 取系数经过校正的 $\left[\frac{\text{II}}{\text{II}}\right]$ 阶式, 式中各项系数见图 4. 校正的要点是减小 a 和 b , 而加大 c 和 d , 使正负两个方向的误差得到更好平衡(图 6).

当 $10 \leq k \leq 25$, 取系数经过校正的 $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶式, 式中各项系数见图 5. 校正的要点是减小 a 和 b , 而加大 c 和 e .

为了验证近似公式的准确性, 在图 6 和图 7 上分别绘出了各不同 k 值的飞升曲线. 由各图可见, k 值越高, 近似式的误差越大; 而对 $k=25$, 校正式的最大绝对误差不超过 5%, 而未经校正的 $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶式的最大绝对误差也不超过 8%.

比较级数展开式(5)和(8), 或(7)和(10), 就可以说明, 当阶数较高($k \geq 10$ 或 $n \geq 5$) 时,

$$e^{-\frac{kx}{1+x}} \approx (1+2x)^{-\frac{k}{2}} = \frac{1}{(1+2x)^n}, \quad (13)$$

式中 $n = \frac{k}{2}$. 因此, 当阶次较高时, 上述两类对象的动态特性(飞升曲线, 频率特性)非常

相似,并可以采用统一的近似式。例如,图5中的 $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶校正式既然可以适用于 $10 \leq k \leq 25$,则在经过折算之后,也可以适用于多容惯性环节($5 \leq n \leq 12.5$)。

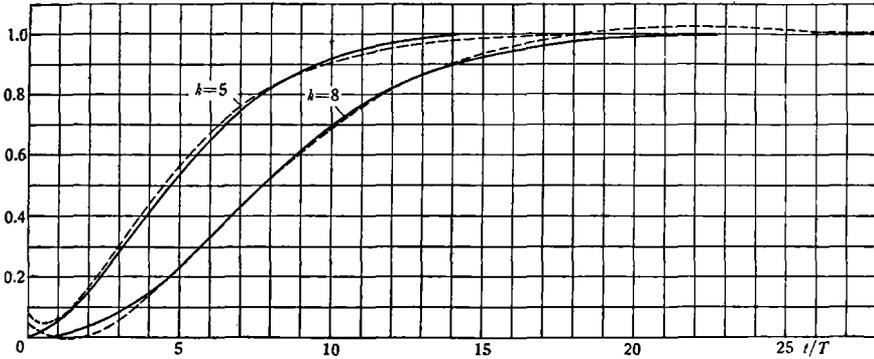


图6 $e^{-\frac{kx}{1+x}}$ 及其近似式的飞升曲线 ($x = TS$)

实线—— $e^{-\frac{kx}{1+x}}$; 虚线—— $\left[\frac{\text{II}}{\text{II}}\right]$ 阶近似式(见图4)。

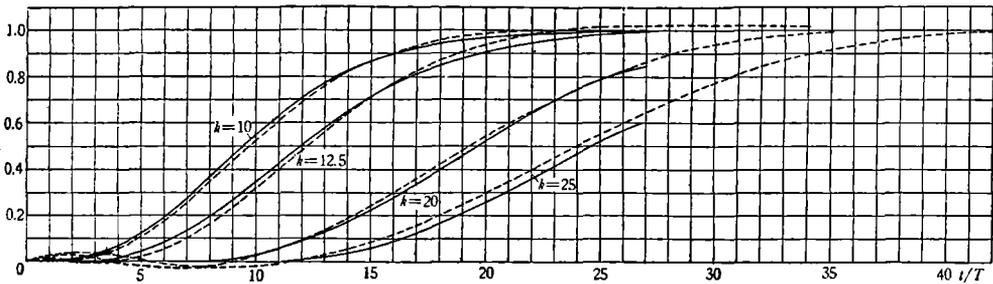


图7 $e^{-\frac{kx}{1+x}}$ 及其近似式的飞升曲线 ($x = TS$)

实线—— $e^{-\frac{kx}{1+x}}$; 虚线—— $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶近似式(见图5)。

3. 纯时滞环节

H. 帕德 (Pade) 首先系统地研究了指数函数 e^x 的低阶近似式^[4], 其结果是与对应连分式法或级数展开低阶近似法完全一致的。相当于 e^x 的帕德近似式, 得 $e^{-\tau S}$ 的 $\left[\frac{\text{II}}{\text{II}}\right]$ 阶和 $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶近似式为(令 $\tau S = x$):

$$e^{-x} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2}, \quad (14)$$

$$e^{-x} \approx \frac{1 - 0.4x + 0.05x^2}{1 + 0.6x + 0.15x^2 + \frac{1}{60}x^3}. \quad (15)$$

纯时滞环节本身只有延迟,没有惯性,它能够反映任何高频扰动(只有相位移,没有衰

减); 而低阶近似式则只能代表它的低频成分。因此, 如果用上述近似式来代表独立的纯时滞环节, 可能误差很大。图 8 示出 $e^{-\tau s}$ 及其近似式的飞升曲线。由图可见, 特别是 $\left[\frac{\text{II}}{\text{II}}\right]$ 阶式, 在时间初始段是很不准确的。但是, 若是纯时滞环节作用于一个惯性系统之中, 则由于惯性环节的滤波作用, 使整个系统的工作频率降低, 就可以得到很准确的结果。图 9 示出这种对象 $\left(\frac{\tau}{T} = 1\right)$ 的比例积分调节系统的过渡过程, 可见低阶近似式的准确性是很高的。

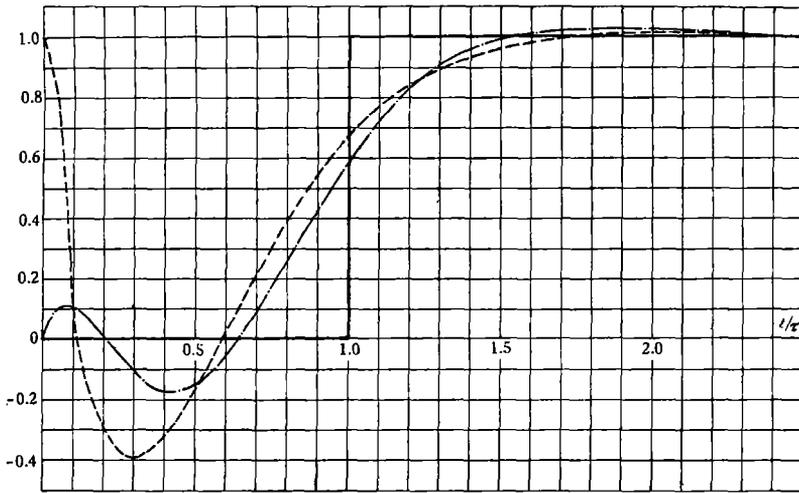


图 8 e^{-x} 及其近似式的飞升曲线 ($x = \tau s$)

实线—— e^{-x} ;

虚线—— $\left[\frac{\text{II}}{\text{II}}\right]$ 阶近似式 $\frac{1 - 0.5x + \frac{1}{12}x^2}{1 + 0.5x + \frac{1}{12}x^2}$;

点划线—— $\left[\frac{\text{II}}{\text{III}}\right]$ 阶近似式 $\frac{1 - 0.4x + 0.05x^2}{1 + 0.6x + 0.15x^2 + \frac{1}{60}x^3}$ 。

我们认为, 即使系统中毫无其它惯性, 仍可用低阶近似式来分析问题。例如纯时滞环节的比例调节系统, 其过渡过程是一个衰减的矩形波, 由于整个系统中缺乏滤波作用而使过渡过程含有强烈的高频振荡成分。但此系统中仍然是有一个最低频率成分在起着主导作用, 它决定着系统的振幅、频率和衰减率。如果在这个无惯性的系统中采用低阶近似式来代表纯时滞环节(图 10), 则所得结果虽然不能准确反映过程的全部特点, 但仍能近似地反映低频成分的特点, 亦即整个过程的振幅、频率和衰减率, 而这正是我们分析问题的主要目的。

可以指出, 当阶次很高时, $\frac{1}{(1 + TS)^n}$ 和 $e^{\frac{-kTS}{1+TS}}$ 都将统一地趋向于 $e^{-\tau s}$ (式中 $\tau = nT = kT$), 这是因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + x)^n} = e^{-nx}$$

和

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{\frac{-kx}{1+x}} = e^{-kx}.$$

因此, 对于 $\frac{1}{(1+TS)^n}$ 和 $e^{\frac{-kTS}{1+TS}}$, 当它们阶次很高时, 正如 $e^{-\tau s}$ 一样, 如果用低阶近似式来求它的飞升曲线, 虽然在开始一段造成较大误差, 但用来分析整个调节系统仍然是很有效的.

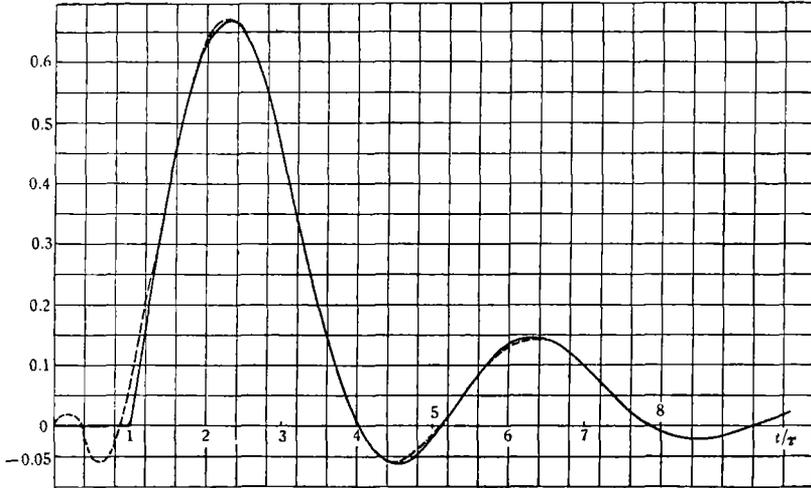


图9 $\frac{e^{-x}}{1+x}$ 及其近似式的 PI 调节系统过渡过程 ($x = \tau s$)

对象: 实线 — $\frac{e^{-x}}{1+x}$;

虚线 — $\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1 - 0.5x + \frac{1}{12}x^2}{1 + 0.5x + \frac{1}{12}x^2}$.

调节器: $S_1 = 1.224$, $\frac{T_i}{\tau} = 1.73$.

4. 串联环节的综合低阶近似

现以 67-2CII 型直流锅炉上辐射区及辐射式过热器的各类传递函数为例, 阐明复杂环节综合低阶近似的意义和方法.

根据锅炉的结构资料和工作参数, 可以推导出单相介质段在各种扰动方式下出口温度变化的传递函数如下^[2]:

在进口温度扰动下,

$$W_{\theta_2\theta_1}(x) = \frac{\theta_2}{\theta_1} = e^{-rx} e^{\frac{-kx}{1+x}}; \quad (16)$$

在管外传热量扰动下,

$$W_{\theta_2q}(x) = \frac{\theta_2}{q} = C_1 \frac{1}{x(1+r_1x)} [1 - e^{-rx} e^{\frac{-kx}{1+x}}]; \quad (17)$$

在出口流量扰动下,

$$W_{\theta_2D_1}(x) = \frac{\theta_2}{D_1} = -C_2 \frac{1+r_2x}{x(1+r_1x)} [1 - e^{-rx} e^{\frac{-kx}{1+x}}]; \quad (18)$$

在进口压力扰动下，

$$W_{\theta_2 P_1}(x) = \frac{\theta_2}{P_1} = C_3 \frac{x + \frac{1}{r_1}}{x + \frac{1}{r_1}} [1 - e^{-rx} e^{\frac{-kx}{1+x}}] \quad (19)$$

式中 $x = TS$, T 为该工作段的特征时间常数；

θ_2, θ_1 分别表示出口和进口处的介质温度；

q 表示烟气传给热壁的热量；

D_1, P_1 分别表示进口处介质的流量和压力；

k, r, r_1, r_2, C_1, C_2 和 C_3 均为特性常数。

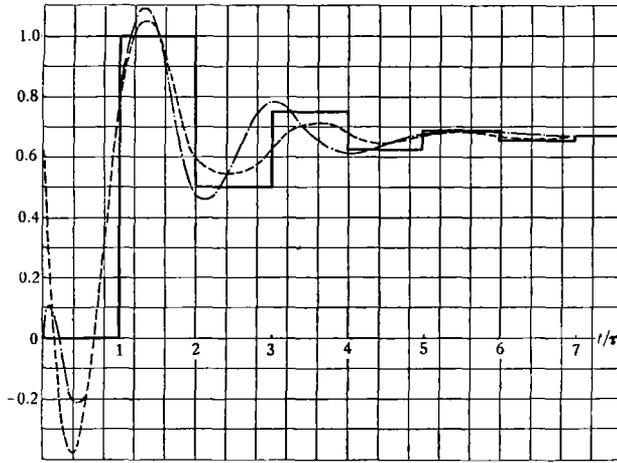


图 10 e^{-x} 及其近似式的比例调节系统过渡过程 ($x = \tau S$)

对象：实线 —— e^{-x} ；

虚线 —— $\left[\frac{II}{II} \right]$ 阶式 $\frac{1 - 0.5x + \frac{1}{12}x^2}{1 + 0.5x + \frac{1}{12}x^2}$ ；

点划线 —— $\left[\frac{II}{III} \right]$ 阶式 $\frac{1 - 0.4x + 0.05x^2}{1 + 0.6x + 0.15x^2 + \frac{1}{16}x^3}$ 。

调节器： $S_1 = 0.5$ 。

对 67-2CII 型炉上辐射区及辐射式过热器，各常数值为^[2]：

$T = 10.6$ 秒； $k = 17.3$ ； $r = 0.653$ ； $r_1 = 0.03625$ ； $r_2 = 0.2$ ；

$C_1 = 0.488 \times 10^{-3}$ ； $C_2 = 0.0476$ ； $C_3 = 0.6614$ 。

现先求 $W_{\theta_2 \theta_1}(x)$ 的近似式。由式(14)和图 7 可得：

$$e^{-0.653x} \approx \frac{1 - 0.3265x + 0.0355x^2}{1 + 0.3265x + 0.0355x^2}$$

和

$$e^{\frac{-17.3x}{1+x}} \approx \frac{1 - 3.97x + 6.35x^2}{1 + 13.33x + 68.5x^2 + 202x^3}$$

二者相乘，得五阶的有理分式。再用对应连分式展开法求它的 $\left[\frac{II}{III} \right]$ 阶渐近分式，得

$$W_{\theta_2\theta_1}(x) \approx \frac{1 - 4.45x + 7.66x^2}{1 + 13.51x + 70.33x^2 + 206x^3} \quad (20)$$

得到此近似式后,可继续先求出其它三个函数的高阶表达式,再进一步求其低阶渐近分式,最后得

$$W_{\theta_2\theta_2}(x) \approx 8.76 \times 10^{-3} \frac{1 + 3.475x + 11.16x^2}{1 + 13.54x + 70x^2 + 205x^3}; \quad (21)$$

$$W_{\theta_2D_1}(x) \approx -0.855 \frac{1 + 3.514x + 12.92x^2}{1 + 13.37x + 69.83x^2 + 209.6x^3}; \quad (22)$$

和

$$W_{\theta_2P_1}(x) \approx 0.6614 \frac{x(x + 0.9656)}{x^2 + 27.56x + 0.0817}. \quad (23)$$

图 11—13 绘出了上述传递函数的理论飞升曲线及其近似式的飞升曲线,其中 $W_{\theta_2\theta_1}(x)$ 的近似式(20)误差最大,但亦仅 3%。

有人曾利用对数频率特性曲线对进口温度扰动下出口汽温变化的传递函数求得了下列近似式:

$$W_{\theta_2\theta_1}^{[1]}(x) \approx \frac{e^{-9.63x}}{(1 + 4.76x)^2},$$

其飞升曲线亦在图 11 中画出,以供比较。它普遍地低于理论曲线,最大误差达 9%。而且由于这个近似式中仍然包括着一个纯时滞环节,在模拟时仍有困难。

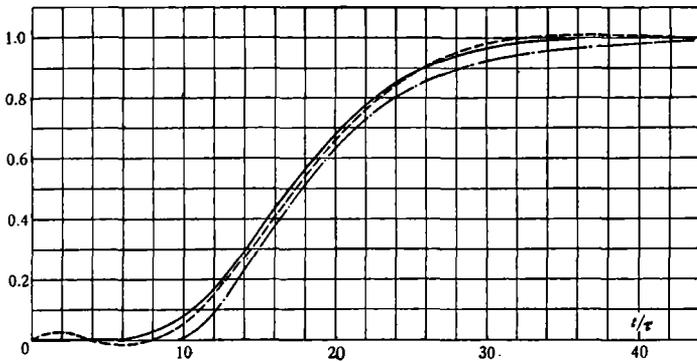


图 11 $W_{\theta_2\theta_1}(x)$ 及其近似式的飞升曲线 ($x = TS$, $T = 10.6$ 秒)

$$\begin{aligned} \text{实 线} & \text{--- } W_{\theta_2\theta_1}(x) = e^{-0.663x} \cdot e^{\frac{-17.9x}{1+x}}; \\ \text{虚 线} & \text{--- 近似式 } \frac{1 - 4.45x + 7.66x^2}{1 + 13.51x + 70.33x^2 + 206x^3}; \\ \text{点划线} & \text{--- 近似式 } \frac{e^{-9.63x}}{(1 + 4.76x)^2}. \end{aligned}$$

文献[2]所求得的进口流量扰动下出口汽温度变化的传递函数近似式为:

$$W_{\theta_2D_1}^{[2]}(x) \approx -0.855 \frac{1}{(1 + 7.08x)^2},$$

它是很不准确的,飞升线(见图 12)的最大误差达 15%。

现在特别来观察一下传递函数 $W_{\theta_2P_1}(x)$ 的特性。由图 13 可见,它是个微分型函数,对高频讯号的反映最大。此函数在有理后所得的近似表达式之分子与分母应该是齐次的。求它的对应连分式应从 x 的高次项开始,即保证高次项准确。这样求得的低阶近似式

是从高频端来逼近原来函数的；它在低频端的相对误差较大，但这时原来函数本身的幅值已很小，故绝对误差还是很小的。

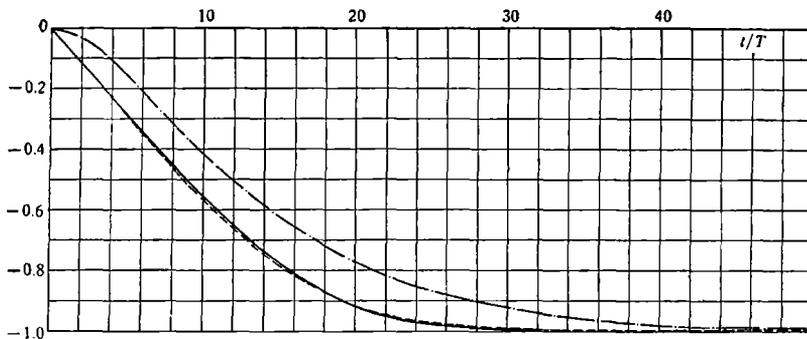


图 12 $W_{\theta_2 D_1}(x)$ 及其近似式的飞升曲线 ($x = TS, T = 10.6$ 秒)

实线 —— $W_{\theta_2 D_1}(x) = \frac{-C_2'(1 + 0.2x)}{17.96x(1 + 0.03625x)} \left[1 - e^{-0.059x} \cdot e^{\frac{-17.9x}{1+x}} \right];$

虚线 —— 近似式 $-\frac{1 + 3.514x + 12.92x^2}{1 + 13.37x + 69.83x^2 + 209.6x^3};$

点划线 —— 文献[2]中的近似式 $-\frac{C_2'}{1 + 7.08x^2}.$

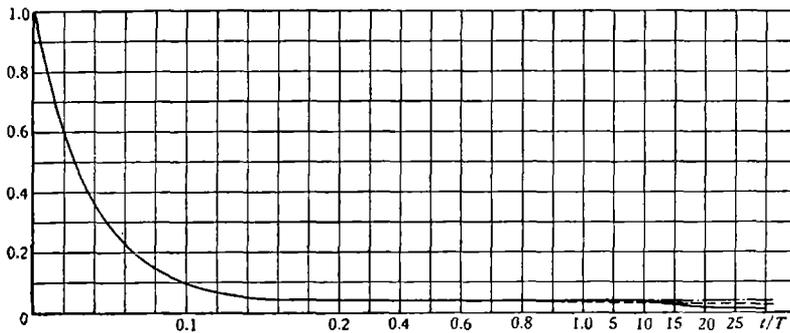


图 13 $W_{\theta_2 P_1}(x)$ 及其近似式的飞升曲线 ($x = TS, T = 10.6$ 秒)

实线 —— $W_{\theta_2 P_1}(x) = C_3 \frac{x + 1}{x + 27.59} \left[1 - e^{-0.059x} \cdot e^{\frac{-17.9x}{1+x}} \right];$

虚线 —— 近似式 $\frac{x(x + 0.966)}{x^2 + 27.56x + 0.0817};$

点划线 —— 近似式 $\frac{x + 1}{x + 27.59}.$

实际上，函数 $W_{\theta_2 P_1}(x)$ [式(19)]可简单地以一阶近似式代表：

$$W_{\theta_2 P_1}(x) \approx C_3 \frac{x + 1}{x + \frac{1}{r_1}}, \tag{24}$$

它的飞升曲线仅在后段误差较大(小于 4%，见图 13)。这是因为它含着两个串联环节，都是高通滤波器。由于 $k \gg 1 \gg r_1$ ，其中 $[1 - e^{-rx} e^{\frac{-kx}{1+x}}]$ 一项的通频带很宽，不起什么限制作用。于是在全部频率范围内可令 $[1 - e^{-rx} e^{\frac{-kx}{1+x}}]$ 等于 1，而取近似式(24)。此例具体地说明了：串联环节的各部分对总体的影响有着主次之分，其中某些部分影响很小，甚至可以忽略。

四、由实验飞升曲线求低阶近似传递函数

上述方法根据级数展开原理求取传递函数的低阶近似式,它首先要求取得对象的精确传递函数。但是,依靠理论分析来求对象的“精确”传递函数,首先必须要作一系列简化假定,由此所得的计算公式仍然很复杂,而所得结果却可能与实际工作特性相差较大。因此,只有当对象尚处于设计制造阶段,为了预先对它的动态特性作出初步估计,以便拟订合理的调节方案时,才必须通过计算方法来取得未来对象的特性。在一般的情况下总是通过实验来测定对象的特性。

从实验飞升曲线来求出对象的近似传递函数,有很多不同的方法。从实用观点出发,最好是利用实验曲线的某些几何特点(例如通过拐点作切线,或历次波动的衰减率等),或利用曲线上的几个有代表性的点子。但这些方法一般都只能适用于某些指定的函数形式(例如 $\frac{e^{-\tau s}}{(1+TS)^n}$),它带有一定的主观性,并不能广泛适用于各种不同形式的函数和曲线。而且这样求出的经验公式虽然是近似的,但往往仍然是高阶或超越函数。因此在进行模拟之前,先作低阶近似处理,仍然是有利的或必要的。

对于一个有自平衡能力的对象来说,М. П. 西莫佑(Симою)所提出的积分法^[1]在原则上利用了全部实验点子,并可以得到任何复杂的有理函数形式。在实际应用中,这个方法的计算工作量很大,结果的准确性亦不高,未必就可以推荐作为实用方法。但这个方法提供了由实验曲线求低阶近似式的一般理论基础。

文献[1]的出发点亦是由级数展开法求出低阶近似式,但该文采用了分子项为1的近似式,这不一定是合理的;此外,为了直接求出分母多项式的各项系数,因而使计算公式较繁,工作量亦增大。

如果首先求出近似传递函数本身的级数展开式(即令分母为1时的分子多项式)的各项系数,则计算公式比较简单。这样的分子多项式本身在高频端不收敛,因此是不能用来作为对象的传递函数的,但它可以很方便地转换成有理分式的形式。

假定飞升曲线的传递系数为1,以 y 表示飞升曲线坐标值,即被调量的相对值。

如果把近似传递函数展开成为分子项的级数表达式^[1]:

$$\begin{aligned} W(x) &= 1 - A_1x + A_2x^2 - A_3x^3 + A_4x^4 - A_5x^5 + \dots \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} A_i x^i, \end{aligned} \quad (25)$$

则

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} A_i x^{i-1} = \frac{1}{x} [1 - W(x)] = \int_0^{\infty} (1-y)e^{-xt} dt.$$

将 e^{-xt} 展开成 xt 的幂级数,得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} A_i x^{i-1} &= \int_0^{\infty} (1-y) dt + x \int_0^{\infty} (1-y) \frac{(-t)}{1!} dt \\ &+ x^2 \int_0^{\infty} (1-y) \frac{(-t)^2}{2!} dt + \dots + x^{i-1} \int_0^{\infty} (1-y) \frac{(-t)^{i-1}}{(i-1)!} dt. \end{aligned}$$

对此左右两方各项的系数,可见

$$A_i = \int_0^{\infty} (1-y) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} dt. \quad (26)$$

由上式,应用数值积分法不难计算 A_i 值,其中 $\frac{t^i}{i!}$ 可以预制成表.

在求得 A_i 之后,可很容易计算所求传递函数的低阶近似有理分式. 如对式(2)一(4)进行级数展开,再比较各项系数,可得有理分式各项系数的计算公式如下:

$\left[\frac{I}{II} \right]$ 阶式:

$$W(x) \approx \frac{1-ax}{1+cx+dx}, \quad (27)$$

式中

$$c = \frac{A_3 - A_1 A_2}{A_2 - A_1^2};$$

$$a = A_1 - c;$$

$$d = c A_1 - A_2.$$

$\left[\frac{II}{II} \right]$ 阶式:

$$W(x) \approx \frac{1-ax+b^2}{1+cx+dx^2}, \quad (28)$$

式中

$$c = \frac{A_2 A_3 - A_1 A_4}{A_2^2 - A_1 A_3};$$

$$a = A_1 - c$$

$$d = \frac{A_3^2 - A_2 A_4}{A_2^2 - A_1 A_3};$$

$$b = A_2 + d - c A_1 = A_2 + \frac{A_3(A_3 - A_1 A_2) + A_4(A_1^2 - A_2)}{A_2^2 - A_1 A_3}.$$

$\left[\frac{II}{III} \right]$ 阶近似式:

$$W(x) \approx \frac{1-ax+bx^2}{1+cx+dx^2+ex^3}, \quad (29)$$

式中

$$c = \frac{A_3 + \frac{A_3(A_2^2 - A_1 A_3) - A_4(A_1 A_2 - A_3)}{A_1^2 - A_2}}{A_4 + \frac{A_2(A_2^2 - A_1 A_3) - A_3(A_1 A_2 - A_3)}{A_1^2 - A_2}};$$

$$a = A_1 - c;$$

$$d = \frac{A_4 - A_1 A_3}{A_1^2 - A_2} + c \frac{A_1 A_2 - A_3}{A_1^2 - A_2};$$

$$b = d - c A_1 + A_2;$$

$$e = d A_1 - c A_2 + A_3.$$

应该指出,一般地说,式(25)的各项系数(A_i)是不收敛的,反映到近似式(27),(28),(29)中,经常会发生两个大数相抵消的现象,使原来计算积分值 A_i 时的相对误差被扩大了几十倍,并使求出的低阶近似有理分式的各项系数变化较大。但是,实例计算表明,与近似式相应的飞升曲线形状仍然比较稳定,只是在开始段可能有不小的差别。因此,特别对于一些形状比较复杂或函数形式未知的实验曲线来说,这样的数据处理方法是可以试用的。它能够有步骤地提供一个初步的有理分式,以便着手进行模拟。此后就可对比模拟曲线和实验曲线,再作必要的修正。

从以上讨论中,亦可以看出低阶近似方法本身的局限性。低阶近似式的各项系数既然都是由几个积分值(即 $t = 0 \sim \infty$ 范围内的某种平均值)算出,这就使近似式不能精确地反映出原来曲线上的许多局部细节(斜率、曲率、峰值、谷值等),亦不能保证它通过实验曲线的某些具体部分。另一方面,这样的近似式对于整个过渡过程的某些综合性(积分)效果却能够得到适当的反映。为了得到更好的近似式,应该兼顾这两个方面,就是既要考虑综合效果,又要反映某些主要的细节。这就是为什么对于级数展开法或积分法所得到的低阶近似式有时还要加以适当校正的实际理由。

五、结 论

1. 热工对象一般对高频讯号具有滤波作用,因此可应用低阶近似式从低频端来逼近该对象的传递函数;所得的低阶近似式不仅在低频段很准确,而且在高频段因为函数的辐值已很小,所以绝对误差也不大。若对象是微分型,即其通频范围在高频段,则可从高频端来逼近原来函数。

2. 由于热工对象的阻尼,在它所组成的单回路调节系统里,往往只有一个低频振荡成分和一个单调成分起着主导作用,因此整个单回路系统可用一个三阶函数来近似表达,而对象也只需取二阶或三阶的近似函数。不管对象的阶次如何高,单回路 PI 或 PID 调节系统的工作频率一般不会超出对象的相位角 $\leq 180^\circ$ 或 240° 的频率范围。因此,二阶或三阶近似式虽然不能反映高阶对象的全貌,却仍能很好地用来分析单回路调节系统的主要特征和进行整定计算。

3. 用代数方法(级数展开法)求传递函数的低阶近似有理分式,比现有文献中所提出的其他方法更有效,工作量较小而准确度较高。

4. 对于几个串联环节,还可综合起来求出它的低阶近似式,其总的阶次一般不超过三阶,并不需要随串联环节的内部复杂性而增加。

5. 从已知实验飞升曲线求对象的近似传递函数,建议首先求出近似传递函数分子项的级数展开式,再转换成低阶近似有理分式。这样做法步骤明确,计算亦不难,对形状比较复杂或函数形式未知的实验曲线提供了一个普遍的处理方法;但对于比较简单的曲线来说,却不是最方便的。

参 考 文 献

- [1] М. П. Симою, 线性环节和自动调节系统的传递函数的系数求法, *Авт* (1957), №6, 514—528. (中译文:李振裕、吴崇谨译,自动控制系统实验算法,上海科技出版社,1964,131—150).
- [2] Рущинский, В. М. 等, 单元机组 (67-2СП, К-50-90) 的动态研究, *Теплоэнергетика*, 1962, №8, 23—

31 (中译文: 林来兴编, 热工调节对象动态特性译文集, 科学出版社, 1965).

- [3] Acklin, L., Läubli, F., Calculation of the Dynamic Behaviour of Heat Exchangers with the Aid of Analogue Computers, *Sulzer Technical Review*, 42 (1960), No. 4, 13—21.
- [4] Хованский, А. Н., 连分式及其推广在近似分析问题上的应用, 叶乃馨译, 科学出版社, 1962.

LOW-ORDER APPROXIMATION FOR ANALOG SIMULATION OF THERMAL PROCESSES

TSIEN CHUNG-HAN MENG TSU-HAU

Based on the algebraic method of series expansion, a simple and unified method to obtain the low-order approximate transfer functions for highly damped thermal process is proposed. The results are sufficiently accurate for the simulation and analysis of single-loop control systems. Examples are given for typical processes with lumped parameters, with distance-velocity lag and heat exchangers. Complex processes such as the heating surface of boiler can also be reduced to low-order approximation.

The paper also discusses the method of obtaining a low-order approximate transfer function from the experimental time-response curve, and proposes an improved procedure of numerical integration as proposed by M. P. Simoyu.