一种时间最优控制系统的设计方法*

刘兴良
(北京工业学院)

摘要

本文对被控对象为二阶的时间最优控制系统提出了一种设计方法，给出了一种系统结构方案，简述了该法的特点.

一、提出问题

时间最优控制已有成熟的理论，但应用还不广泛，其原因在于结构比较复杂. 例如，设图1所示系统有斜坡输入(速度为 C)，被控对象运动方程为

$$T\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)=Ku(t). \tag{1}$$

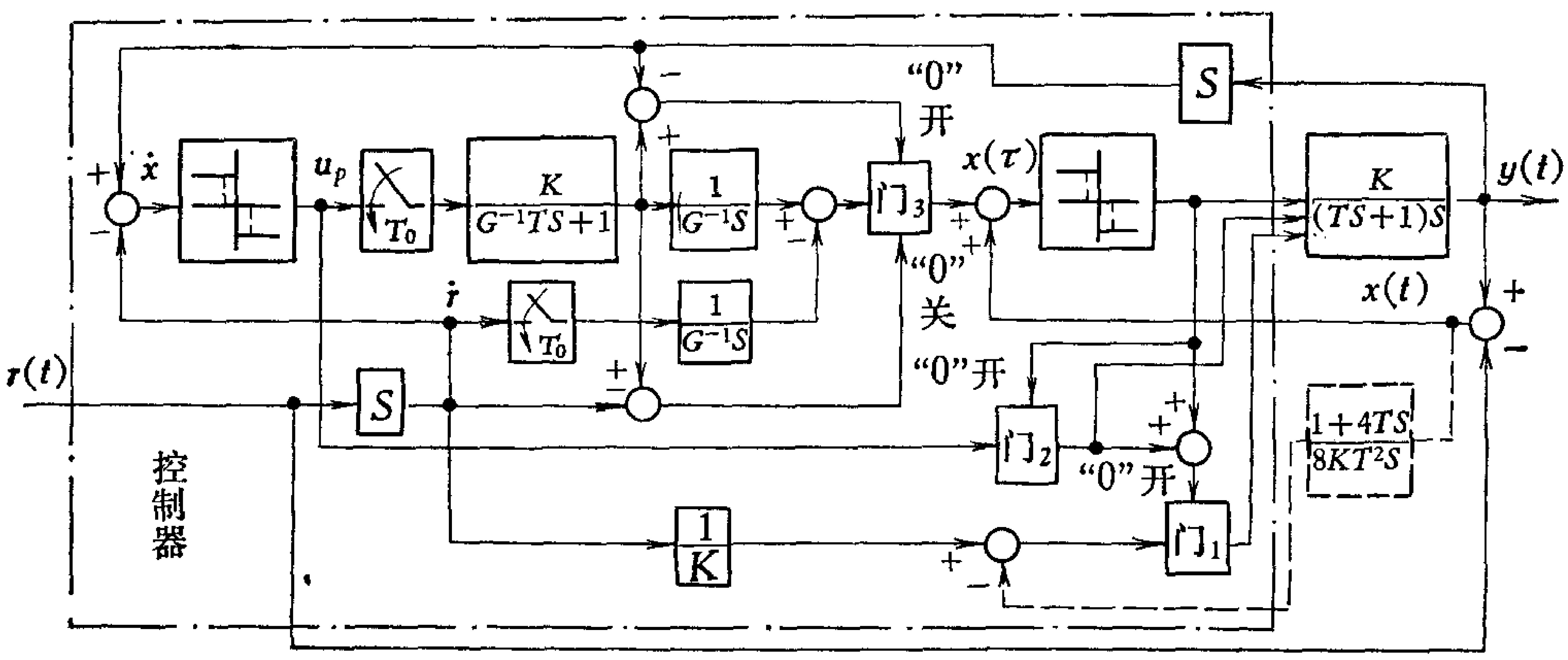

图1 系统结构(示意)图

控制作用 $u(t)$ 受有物理条件限制，$|u(t)|\leqslant M$. 今要求确定最优控制 $u(t)$，使得系统从 $t=0$ 时的初始输出 $y(0)=\dot{y}(0)=0$，以最短时间 t_f 跟上输入 $r(t)$. 即，当 $t\geqslant t_f$ 时，有 $y(t)=r(t)$，$\dot{y}(t)=\dot{r}(t)=C$，且保证下述性能指标

$$J(u)=\int_0^{t_f}dt=t_f \tag{2}$$

为最小.

选位置误差 $x(t)=y(t)-r(t)$，速度误差 $\dot{x}(t)=\dot{y}(t)-\dot{r}(t)=\dot{y}(t)-C$ 作

---

* 本文曾在1979年11月全国自动化技术应用学术年会上宣读. 本文修改稿于1980年3月13日收到.

为状态变量．终端状态即为 $x(t_f)=\dot{x}(t_f)=0$，是状态平衡点．由式 (1) 就可求得

$$\ddot{x}(t)=-\frac{\dot{x}(t)}{T}+\frac{1}{T}[Ku(t)-C]. \tag{3}$$

按时间最优控制中通常使用的“开关线设计方法”，可求得，由状态 $x(t)$，$\dot{x}(t)$ 转移到状态原点的最优控制为

$$u(t)=-M\operatorname{sgn}\left\{x(t)+T\dot{x}(t)\pm T(KM\mp C)\ln\left[1\mp\frac{\dot{x}(t)}{KM\mp C}\right]\right\}. \tag{4}$$

由{·}开关线表示式看出，当系统参数 K，M，T 固定不变，输入 $r(t)$ 的速度 C 不同时，开关线则不同，且上下半枝不对称．判定最优控制 $u(t)$ 的控制器，一般说要用在线数字计算机(或是用具有较多记忆单元的存储装置加模拟计算机)．为了既可实现时间最优控制，结构又简单，建议采用如下设计方法．

二、设 计 思 想

本设计方法的思路是，设想用 $u(t)$ 的极值 $\pm M$ 控制系统 (或物理模型) 以消除速度误差 $\dot{x}(t)$，预算 (或测量) 出 $\dot{x}(t)$ 变为零时刻 $t=\tau$ 的位置误差 $x(\tau)$，则用 $u(t)$ 的极值 $\pm M$ 控制系统去消除 $x(\tau)$ 就是时间最优控制．本设计法中，将系统的控制器判定最优控制分为三步：第一步，当 $t=t$ 时，设想根据 $\dot{x}(t)$ 是正或负，选用控制 $u_p=-M\operatorname{sgn}\dot{x}(t)$ (当 $\dot{x}(t)=0$ 时 $u_p=0$) 去控制被控制对象或物理模型 (状态为 $x(t)$，$\dot{x}(t)$)．第二步，计算 (或测量出) 被控对象或物理模型在 u_p 控制下，在 $t=\tau$ 时，系统速度误差变为零 ($\dot{x}(\tau)=0$) 所对应的位置误差 $x(\tau)$．第三步，根据 $x(\tau)$ 的值是正或负，就可确定对应于状态 $x(t)$，$\dot{x}(t)$ 的最优控制，$u(t)=-M\operatorname{sgn}x(\tau)$ (当 $x(\tau)=0$ 时 $u(t)=u_p$)．

例如，图 2 中，当 $t=t$ 时，状态位于相平面 A 点，因 $\dot{x}(t)<0$，则 $u_p=M$．在 u_p 控制下，被控对象或物理模型的状态相迹如虚线 AA' 所示，A' 是相迹与 x 轴交点．瞬时地求得 $x(\tau)>0$．根据 $x(\tau)>0$ 就确定了对应于状态 $x(t)$，$\dot{x}(t)$ 的最优控制 $u(t)=-M$．在此控制下，系统进行状态转移．经过一个采样周期后，状态运动到 B 点，即 $x(t_1)$，$\dot{x}(t_1)$．此时再进行一次最优控制判定：$\dot{x}(t_1)<0$，$u_{p_1}=M$；立即求得被控对象或物理模型在 u_{p_1} 控制下速度误差 $\dot{x}(\tau_1)=0$ 情况下的 $x(\tau_1)=0$；对应于状态 $x(t_1)$，$\dot{x}(t_1)$ 的最优控制 $u(t_1)=u_{p_1}=M$．在此最优控制下，系统继续进行状态转移．控制器按上面的步骤不断地判定各采样时刻应有的最优控制，系统在最优控制作用下不断地进行状态转移，最后使系统以最短时间到达平衡点．当状态转移到平衡点时，即 $x(t)=\dot{x}(t)=0$ 时，应取 $u(t)=C/K$，以保证系统准确地跟踪输入 $r(t)$，无跟踪误差．

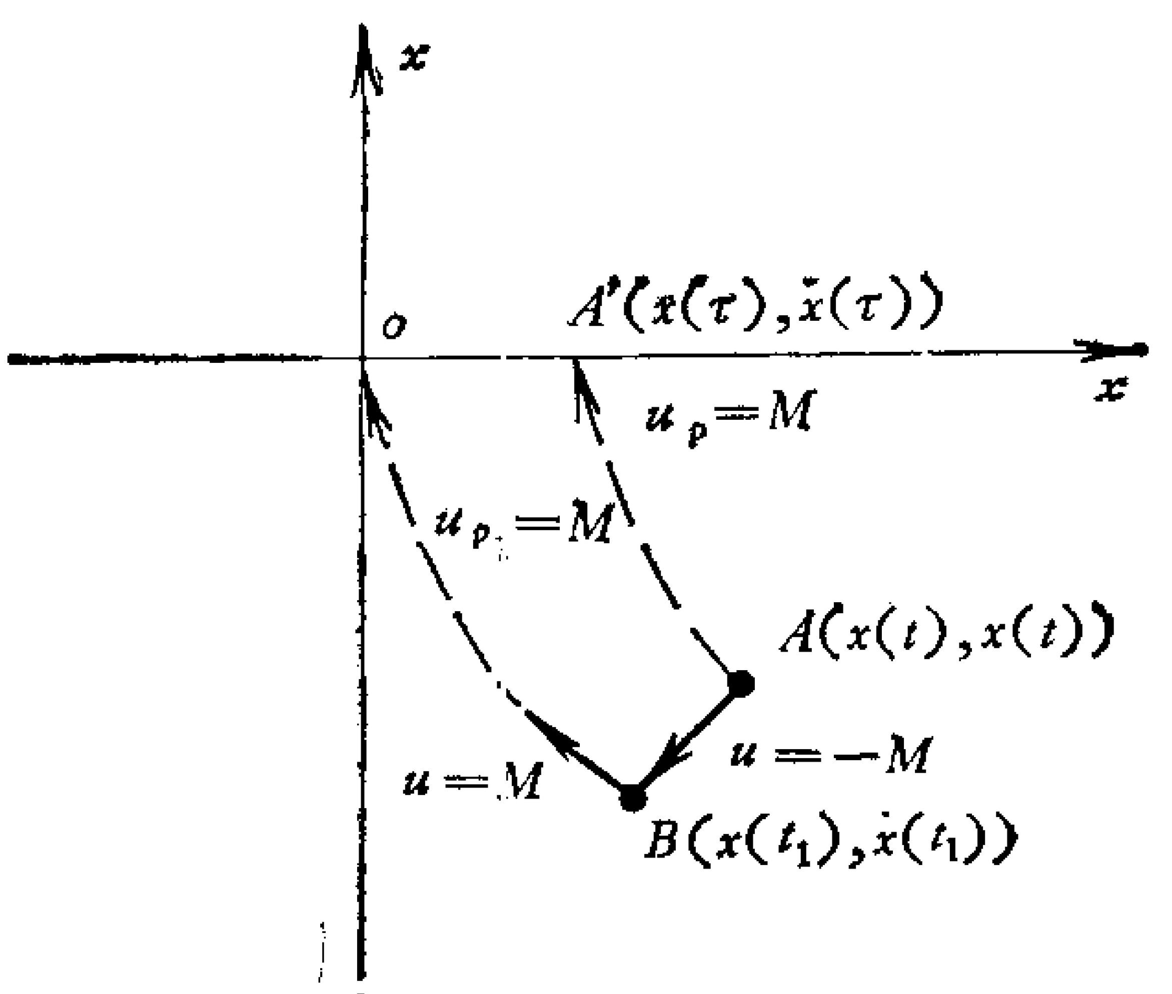

图 2　时间最优控制相迹图

应当指出，上述控制器判定最优控制 $u(t)$ 的过程，相对系统反应速度讲应是瞬时完

成的，而采样计算点数目趋于无限多，该系统就可实现时间最优控制．实际上，采样计算点只可能取有限个，计算 $x(\tau)$ 也要用一定时间，所以只能实现近似的时间最优控制．这和用计算机按式（4）判定最优控制 $u(t)$ 的方法是完全相同的．

三、系统结构

本系统中，控制器可用数字计算机、专用模拟计算器，物理模拟装置加一些简单元件来充当．后者又可有许多种方案．图 1 为一方案示意图．此处将 $x(\tau)$ 分成三部分来求（图 1）：

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x(t) + [y(\tau) - n(\tau)] - [y(t) - r(t)] \\ &= x(t) + [y(\tau) - y(t)] - [r(\tau) - r(t)], \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $x(t)$ 位置误差为必测的量．$y(\tau) - y(t) \triangleq \Delta y$，是被控对象在 u_p 控制下由时刻 t 到 τ 的变化值，而 $r(\tau) - r(t) \triangleq \Delta r$ 是输入 $r(t)$ 由时刻 t 到 τ 的变化值，二者都可以用快速模型求得．图 1 给出的方案中，当快速模型和被控对象速度相同时门$_3$开启．当快速模型速度和输入速度 C 相同时门$_3$关闭．于是它的输出为 $\Delta y - \Delta r$．门$_2$保证当 $x(\tau) = 0$ 时，$u(t) = u_p$．门$_1$保证 $\dot{x}(t) = x(t) = 0$ 时，$u = C/K$．而 $\mathrm{sgn}(\cdot)$ 是用继电型元件来实现的．

四、该法特点

（1）被控对象具有负实或零极点的二阶系统，当斜坡输入（此时对象至少有一积分环节）或常值输入时，按本法设计和按“开关线法”设计的系统有完全相同的效果，即从理论上讲实现了时间最优控制（不是近似的时间最优控制）．利用时间最优控制中“n 段原理”，相迹趋于平衡点的规律，通过逻辑推理很容易证明这一点．

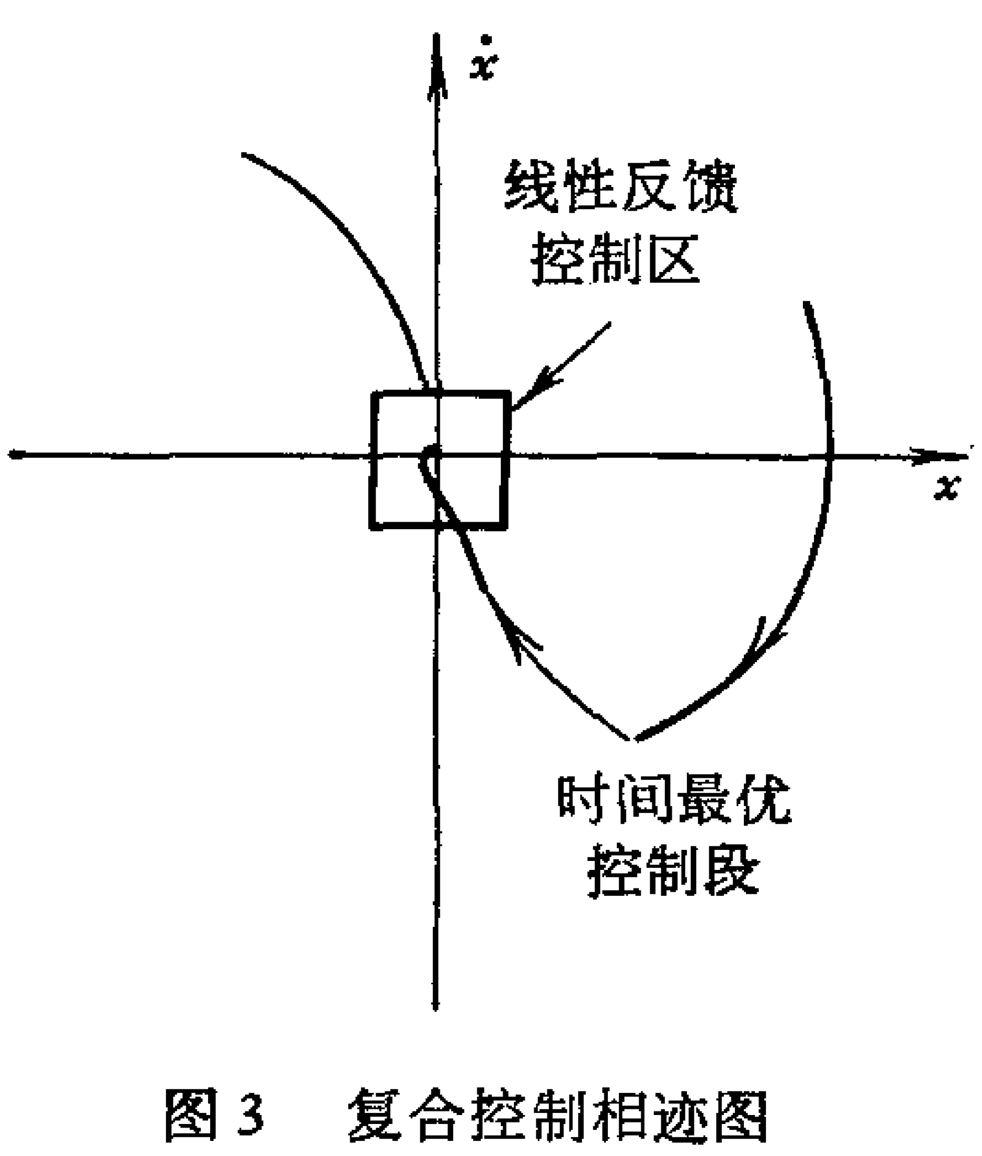

图 3 复合控制相迹图

（2）在具体实践中，与按“开关线法”设计的系统相比，控制器的复杂程度降低了．即使用数字计算机，为达到相同的精度，对计算机要求也降低了．特别是当控制器的精度要求不高时，或者它的精度高没有太大意义时（如对象惯性小，参数变化较大）采用快速模型，就可用较简单的装置而达到改善快速性的目的．

（3）按本法设计的系统很容易和其他控制规律结合起来，构成高精度快速随动系统．实际上，被控对象参数 K，T 常常变化，趋于平衡点过程会形成振荡，失去时间最佳性，跟踪精度不高．因之，将时间最优控制系统稍加改造（如图 1 虚线部分，继电元件加了一个不灵敏区），就可实现在大误差下是理想时间最优控制，在小误差下是具有 PID 调节器的前馈控制系统．这样结合，状态相迹如图 3 所示．它的快速性好，精度高，装置并不复杂．

用快速模型求 $x(\tau)$ 的系统中，被控对象和快速模型有相同的数学模型，作用都

为$\pm M$，很易取得模型自适应控制所需的信息．再加一点装置，当K，T变化时，就可实现适应性时间最优控制．

五、模拟实验

在实验室用数字计算机对按本法及按"开关线法"设计的时间最优控制系统进行了模拟．当采样周期相同时所得的结果完全相同．模拟的结果，仅取一组数据，画出如图4所示曲线．

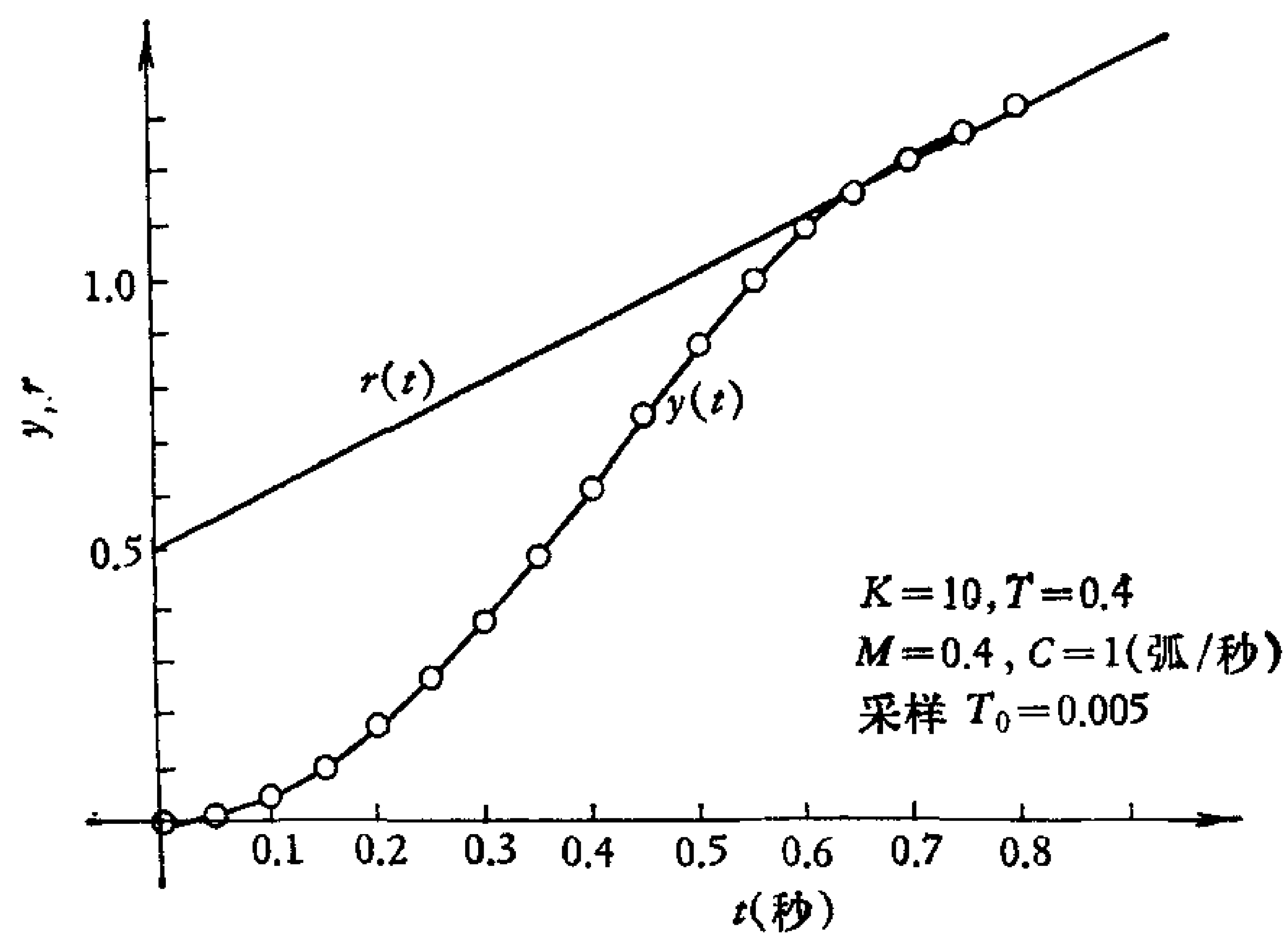

图4　实验室模拟结果

最后，对王子平教授的指导和帮助表示感谢．

参考文献

[1] 刘豹，自动调节理论基础，上海科学技术出版社(1964)，p 464—474.
[2] M. Athans and P. L. Falb, Optimal Control, Mcgraw-Hill Book Company (1966), 504—568.
[3] F. Fallside and N. Thedchanamoorthy, Predictive Control Using an Adaptive Fast Model, *Proc. IEE*, **114** (1967), No.11, 1761—1771.
[4] T. Мицумаки, Модифицированная оптимальная система регулирования, теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем, Изд. Академии Наук СССР (1961), 608—621.

A METHOD OF DESIGN OF TIME-OPTIMAL CONTROL SYSTEM

Liu Xing-liang
(*Beijing Institute of Technology*)

Abstract

This paper deals with a method of design of time-optimal control system with the second-order plant. The structure of the system and the characteristics of the method are also presented.