第 21 卷 第 5 期
1995 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 21, No. 5
Sep., 1995

研究简报

具有控制输入滤波器的随机系统多维条件滤波方法[1)]

吴 森 堂
(北京航空航天大学自控系 北京 100083)

关键词: 多维条件滤波,控制输入滤波器, kalman 滤波.

1 引言

在一些重要工程问题中,尤其在一些人——机控制的实现过程中,常遇到一类随机系统的控制输入都存在着不同程度的不确知性,或由于系统发生故障(如执行机构的故障),而导致系统的控制输入信息发生畸变. 在这种情况下, 若仍采用 kalman 滤波方法进行处理,其效果是很不理想的. 文[1,2]提出和应用条件滤波方法来处理此类系统, 取得了较好的结果. 本文将在此基础上给出更加完善有效的具有控制输入滤波器的随机系统的多维条件滤波算法.

2 问题阐述

设有两个时间离散的在随机系统中,被干扰源污染了的随机过程 $\boldsymbol{x}_k$ 和 $\boldsymbol{u}_k$, 对其测量的方程为

$$\boldsymbol{y}_k = H_k\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{s}_k, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{v}_k = M_k\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{e}_k, \tag{2.2}$$

且两随机过程之间存在着如下形式的随机联系:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = F_k\boldsymbol{x}_k + G_k\boldsymbol{u}_k + B_k\boldsymbol{n}_k, \tag{2.3}$$

其中 $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}(k)$ 是 n 维的系统状态向量; $\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{u}(k) m$ 维控制输入向量; $\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{y}(k)$, $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}(k)$ 分别为 r, m 维的测量向量; $F_k = F(k+1,k)$ 是 $n \times n$ 的系统状态转移阵;$G_k = G(k)$ 是 $n \times m$ 维控制输入加权阵; $H_k = H(k)$, $M_k = M(k)$ 分别为 $r \times n$, $m \times m$ 维的测量阵,M_k 是非奇异阵; $B_k = B(k)$ 是 $n \times 1$ 维噪声加权阵; $\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{e}_k$ 和 $\boldsymbol{n}_k$ 分别为 r, m, l 维的相互独立的高斯白噪声序列.

假设先验的统计信息为

---

1) 本文曾在 1993 年的中国航空学会第五届控制与操纵专业会上宣读.
本文于 1993 年 5 月 10 日收到

$$x0 \sim N(\hat{x}(0|0),P0),COV(\boldsymbol{n}_k,\boldsymbol{x}0)=COV(\boldsymbol{s}_k,\boldsymbol{x}0)=COV(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{x}0)$$
$$=0,\boldsymbol{n}_k \sim N(0,C_k),\boldsymbol{s}_k \sim N(0,R_k),\boldsymbol{e}_k \sim N(0,Q_k), \tag{2.4}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}(0|0)$ 是系统状态向量的初始估值；$P0$ 是 $n \times n$ 维非负定对称的确定阵；C_k,R_k，Q_k 分别为 $l \times l, r \times r, m \times m$ 的正定对称的确定阵。

3 具有控制输入滤波器的随机系统多维条件滤波方法

假定在 k 时刻已有测量序列 $\boldsymbol{y}^k=\{\boldsymbol{y}_1,\ i=\overline{0,k}\},\boldsymbol{v}^k=\{\boldsymbol{v}_1,i=\overline{0,k}\}$，那么，当一旦获得测量 $\boldsymbol{y}_{k+1}$ 时，从假定条件(2.4)及式(2.1)—(2.3)可得到关于条件密度函数 $p(\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{y}_{k+1}|Y^k,V^k)$ 的如下形式的循环链[1]：

$$p(\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{v}^k)=p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1})\times p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{v}^{k-1})p(\boldsymbol{u}_k|\boldsymbol{v}_k). \tag{3.1}$$

由此，根据贝叶斯公式可求得[3]

$$p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{v}^k)=\frac{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1})}{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{v}^k)}\times\iint p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{v}^{k-1})p(\boldsymbol{u}_k|\boldsymbol{v}_k)\times \mathrm{d}\boldsymbol{x}_k\mathrm{d}\boldsymbol{u}_k, \tag{3.2}$$

$$p(\boldsymbol{u}_k|\boldsymbol{y}^{k+1},\ \boldsymbol{v}^k)=\frac{p(\boldsymbol{u}_k|\boldsymbol{v}_k)}{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{v}^k)}\times\iint p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1})p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)\times p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{v}^{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k+1}. \tag{3.3}$$

根据最大似然概率密度法，从式(3.2)，(3.3)中可得关于系统状态和控制输入向量的最优滤波方程

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}=F_k\hat{\boldsymbol{x}}_k+G_kM_k^{-1}\boldsymbol{v}_k+K(k+1)\ [\boldsymbol{y}_{k+1}-H_{k+1}\times(F_k\hat{\boldsymbol{x}}_k+G_kM_k^{-1}\boldsymbol{v}_k)], \tag{3.4}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{k,k+1}=M_k^{-1}\boldsymbol{v}_k+L(k+1)[\boldsymbol{y}_{k+1}-H_{k+1}(F_k\hat{\boldsymbol{x}}_k+G_kM_k^{-1}\boldsymbol{v}_k)] \tag{3.5}$$

其中

$$K(k+1)=P(k+1|k)H_{k+1}^{\mathrm{T}}[H_{k+1}P(k+1|k)\times H_{k+1}^{\mathrm{T}}+R_{k+1}]^{-1}, \tag{3.6}$$

$$L(k+1)=D_kG_k^{\mathrm{T}}H_{k+1}^{\mathrm{T}}[H_{k+1}P(k+1|k)H_{k+1}^{\mathrm{T}}+R_{k+1}]^{-1}, \tag{3.7}$$

$$P(k+1|k)=F_kP(k|k)F_k^{\mathrm{T}}+G_kD_kG_k^{\mathrm{T}}+B_kC_kB_k^{\mathrm{T}}, \tag{3.8}$$

$$D_k=M_k^{-1}Q_kM_k^{-\mathrm{T}}. \tag{3.9}$$

误差方差阵为

$$P(k+1|k+1)=[I-K(k+1)H_{k+1}]P(k+1|k)\times[I-K(k+1)H_{k+1}]^{\mathrm{T}}+K(k+1)R_{k+1}K^{\mathrm{T}}(k+1), \tag{3.10}$$

$$D_{k,k+1}=[I-L(k+1)H_{k+1}G_k]D_k. \tag{3.11}$$

至此，由式(3.4)—(3.11)构成了具有控制输入滤波器的随机系统的多维条件滤波的递推算法。由于系统控制输入的不确知性，而导致本文方法与 kalman 滤波方法在结构上的不同。作为特例，当系统的控制输入是完全确知时(即 $D_k=0$)，本文方法将自动蜕化为 kalman 滤波算法。

由于本文方法中的控制输入滤波器与系统状态滤波器在结构上的依存特点，同

kalman 滤波方法相比,其计算量相当,而应用范围及计算精度却有极大提高.

参 考 文 献

[1] Касьянов В А. у Сэнь-Тан. Многомерная условная фильтрация дискретных случайных процессов. Деп. в ВИНИТИ. №204—в 91. 1991.
[2] У Сэнь-Тан. Апостериорная эллипсоидальная аппроксимация области неопределенности оцениваемых параметров. Деп. в ВИНИТИ. № 1018—в 91. 1991.
[3] Аоки М. Оптимизация стохастических систем. -М.: Наука, 1971.

A METHOD OF MULTI-DIMENSIONAL CONDITIONAL FILTERING WITH CONTROL VECTORS FILTER FOR STOCHASTIC SYSTEM

Wu Sentang

(*Department of Automatic control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics* 100083)

Key words: multi-dimensional conditional filtering, control vector filter, kalman filter.