

参数空间中多变量系统的鲁棒 \mathcal{D} -稳定性

苏为洲 金丕彦

(东南大学自控系 南京 210018)

摘 要

为了保证具有参数不确定性的多变量系统的 \mathcal{D} -稳定性, 它们的参数最大允许摄动范围将受到复平面中区域 \mathcal{D} 以及标称系统的限制. 利用系统临界 \mathcal{D} -稳定时的特性和线性算子范数的特性, 得到了这个范围半径的解析表达式. 由于这个半径是以欧氏空间的一般范数表示的, 所以对于参数摄动范围是菱形、矩形、椭圆、对称多边形等情况, 均可以利用它求出系统参数的最大允许摄动范围.

关键词: 多变量系统, 鲁棒性, \mathcal{D} -稳定性, 参数不确定性.

1 引言

在许多生产过程中, 系统的参数往往因工作点和外界干扰的影响发生变化, 从而引起系统的特征方程系数在一定范围内摄动. 对于参数变化区域未知的情况, 文献[1—3]分别就单变量和多变量系统给出了在 2-范数意义下的最大参数允许摄动范围. 文献[4]就 \mathcal{D} -稳定性, 对 SISO 系统进行了讨论. 本文针对 MIMO 系统, 讨论了系统 \mathcal{D} -稳定性, 并且给出了在一般范数意义下的最大参数允许摄动范围. 同时还讨论了当系统特征多项式矩阵的系数之间存在线性约束时的情况.

2 问题的描述

假设一个多变量反馈系统有 $G(s), K(s)$ 两部分组成, $G(s), K(s)$ 分别是对象和控制器的传递函数矩阵.

$$G(s) = D^{-1}(s)N(s), K(s) = N_k(s)D_k^{-1}(s), \quad (1)$$

分别是 $G(s), K(s)$ 的左、右互质分解, 其中

$$D(s) = \sum_{i=0}^p D_i s^i, \quad N(s) = \sum_{i=0}^p N_i s^i, \quad (2)$$

$$D_k(s) = \sum_{j=0}^q D_{kj} s^j, \quad N_k(s) = \sum_{j=0}^q N_{kj} s^j. \quad (3)$$

记 D_i^0, N_i^0 是 D_i, N_i 的标称矩阵, 它们对应的传递函数矩阵记为 $G_0(s)$, 并且记 $\Delta D_i, \Delta N_i$ 是 D_i, N_i 的摄动矩阵. 定义

$$P \triangleq [D_0, N_0, \dots, D_p, N_p] \triangleq [p_1^T, \dots, p_m^T]^T, \quad (4)$$

$$p \triangleq [p_1, \dots, p_m], \quad (5)$$

其中 $p_i \in R^{1 \times (p+1)(m+1)}, i = 1, \dots, m$. 相应地, 可以定义 $P^0, p^0, \Delta P^0, \Delta p$.

假设 \mathcal{D} 为复平面上任意给定的一个区域. 如果 $G_0(s)$ 与 $K(s)$ 构成的闭环系统, 它的极点均在 \mathcal{D} 中, 那么称该系统是 \mathcal{D} -稳定的, 同时称 $K(s)$ 能 \mathcal{D} -稳定 $G_0(s)$. 假定 $\mathcal{S}(s)$ 是一个传递函数矩阵族, 其中每个元素 $G(s)$ 和 $K(s)$ 构成的闭环系统都是 \mathcal{D} -稳定的, 那么称 $K(s)$ 能 \mathcal{D} -稳定 $\mathcal{S}(s)$. 记 $\mathcal{S}_M(s)$ 是能被 $K(s)$ \mathcal{D} -稳定的最大对象集合, 同时假设 $G_0(s) \in \mathcal{S}_M(s)$. 对某一给定的 r , 如果 $\|\Delta p\| \leq r$ 成立时, p 所对应的传递函数矩阵 $G(s)$ 一定属于 $\mathcal{S}_M(s)$, 那么称集合 $\mathcal{S}_r(s) = \{G(s) | \|\Delta p\| \leq r\}$ 在集合 $\mathcal{S}_M(s)$ 之中. 显然, r 是在范数 $\|\cdot\|$ 意义下, $(p+1)m(m+1)$ 维参数空间中, 以 p^0 为中心的一个超球体 $S(r)$ 的半径. 并且以 $S(r)$ 中的任意一个元素为系数的传递函数矩阵 $G(s)$ 能被 $K(s)$ \mathcal{D} -稳定. 如果记 r_M 为

$$r_M \triangleq \sup_{\mathcal{S}_r(s) \subset \mathcal{S}_M(s)} r, \quad (6)$$

那么, r_M 就是在范数 $\|\cdot\|$ 意义下, 对象参数允许摄动的最大半径.

3 主要结果

设系统的特征多项式矩阵为

$$\phi(s) \triangleq \sum_{i=0}^n \phi_i s^i \triangleq \phi^0(s) + \Delta \phi(s), \quad (7)$$

其中 $\phi_i = \phi_i^0 + \Delta \phi_i \in R^{m \times m}, i = 0, \dots, n, n = p + q$, 并且记

$$\phi \triangleq [\phi_0, \dots, \phi_n]. \quad (8)$$

同样可定义 $\phi^0, \Delta \phi$. 由(1),(7)式可得

$$\phi(s) = D(s)D_k(s) + N(s)N_k(s). \quad (9)$$

设 \mathcal{D} 是复平面上一个给定区域, Γ 是其边界, $s_\Gamma = \delta_\Gamma + j\omega_\Gamma$ 是 Γ 上的任意一点. 记

$$\Delta(s_\Gamma) \triangleq \{\phi | \det \phi(s_\Gamma) = 0\}, \quad (10)$$

$$\pi(s_\Gamma) \triangleq \{p | \phi \in \Delta(s_\Gamma)\}, \quad (11)$$

$r(s_\Gamma)$ 和 r_Γ 分别是范数 $\|\cdot\|$ 意义下 p^0 到 $\pi(s_\Gamma)$ 和 $\bigcup_{s_\Gamma \in \Gamma} \pi(s_\Gamma)$ 的距离.

定理 3.1. 如果 $K(s)$ 是 $G_0(s)$ 的 \mathcal{D} -稳定控制器, 那么在参数空间中, 对象允许摄动的最大半径 r_M 等于 r_Γ .

证明. 见文[3].

当 s_Γ 有界时, 记 $\phi(s_\Gamma)$ 的零空间为 $\text{Ker} \phi(s_\Gamma)$, 考虑到摄动 Δp 的任意性,

$$\bigcup_{p \in \pi(s_\Gamma)} \text{Ker} \phi(s_\Gamma)$$

就是 m 维复空间 C^m . 因此对任意 $v = v_R + jv_I \in C^m$, 一定存在 ϕ , 使得

$$\phi(s_\Gamma)v = 0. \tag{12}$$

记

$$\begin{aligned} \phi(\delta_\Gamma, \omega_\Gamma) &\triangleq \begin{bmatrix} I & \delta_\Gamma I & \cdots & (\delta_\Gamma^n - C_n^2 \delta_\Gamma^{n-2} \omega_\Gamma^2 + \cdots) I \\ 0 & \omega_\Gamma I & \cdots & (C_n^1 \delta_\Gamma^{n-1} \omega_\Gamma - C_n^3 \delta_\Gamma^{n-3} \omega_\Gamma^3 + \cdots) I \end{bmatrix}^T \\ &\triangleq [\phi_1(\delta_\Gamma, \omega_\Gamma) \vdots \phi_2(\delta_\Gamma, \omega_\Gamma)]. \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $I \in R^{m \times m}$, 进一步记

$$\begin{aligned} \bar{V} &\triangleq \begin{pmatrix} v_R & v_I \\ -v_I & v_R \end{pmatrix}, \tag{14} \\ X &\triangleq \begin{pmatrix} D_{k0} & D_{k1} & \cdots & & & & & & \\ N_{k0} & N_{k1} & \cdots & D_{kq} & & & & & \\ & & & N_{kq} & & & & & \\ & & & & D_{k0} & & & & \\ & & & & N_{k0} & & & & \\ & & & & & D_{kq-1} & D_{kq} & & \\ & & & & & N_{kq-1} & N_{kq} & & \end{pmatrix}, \tag{15} \end{aligned}$$

同时记 X 中的最后一列矩阵为 X_n . 那么, 根据(9), (12)式可写成

$$\Delta p z = -p^0 z, \tag{16}$$

其中 $z = \text{diag}\{X\phi(\delta_\Gamma, \omega_\Gamma)\bar{V}, \dots, X\phi(\delta_\Gamma, \omega_\Gamma)\bar{V}\}$. 由线性算子的特性可知, p^0 到 $\pi(s_\Gamma)$ 的距离为

$$r(s_\Gamma) = \min_{v \in C^m, \|v\|=1} \frac{\|p^0 z\|}{\|z\|}. \tag{17}$$

当 $|s_\Gamma| \rightarrow \infty$ 时, (10), (11)式可改写成

$$\Delta_\Gamma(\infty) \triangleq \{\phi \mid \det \phi_n = 0\}, \tag{18}$$

$$\pi_\Gamma(\infty) \triangleq \{p \mid \phi \in \Delta_\Gamma(\infty)\}. \tag{19}$$

同样利用临界 \mathcal{D} -稳定条件和线性算子的性质, 可以得到 p^0 到 $\pi(\infty)$ 的距离

$$r_\infty = \min_{v' \in R^m, \|v'\|=1} \frac{\|p^0 z'\|}{\|z'\|}, \tag{20}$$

其中 $z' = \text{diag}\{X_n v', \dots, X_n v'\}$. 由(10), (11), (18), (19)式可知

$$r_\Gamma = \min \left\{ r_\infty, \inf_{s_\Gamma \in \Gamma, |s_\Gamma| < \infty} r(s_\Gamma) \right\}. \tag{21}$$

在大多数情况, 对象参数的摄动是相互关联的, 下面讨论当对象参数之间存在线性约束的情况. 设 $a \in R^{w \times 1}$ 是关于对象参数的一组独立变量, 记 a^0 为 a 的标称值, Δa 是 a 的摄动. P 中的每一行 p_k 可写成

$$p_k = a^T A_k + b_k, i = 1, \dots, m, \tag{22}$$

其中 A_k, b_k 是常数阵, 由(10), (22)式可定义

$$\pi^a(s_\Gamma) \triangleq \{a \mid \phi \in \Delta(s_\Gamma)\}. \tag{23}$$

记 $K(s_\Gamma) \triangleq \bigcup_{a \in \pi^a(s_\Gamma)} \text{Ker} \phi(s_\Gamma)$.

当 $|s_\Gamma| < \infty$ 时, 类似于上面的讨论, 临界 \mathcal{D} -稳界条件为

$$\begin{aligned} & \Delta \mathbf{a}^T [A_1 X \phi(\delta_\Gamma, \omega_\Gamma) \bar{V} \vdots \cdots \vdots A_m X \phi(\delta_\Gamma, \omega_\Gamma) \bar{V}] \\ & = -[(\mathbf{a}^{0T} A_1 + \mathbf{b}_1) X \phi(\delta_\Gamma, \omega_\Gamma) \bar{V} \vdots \cdots \vdots (\mathbf{a}^{0T} A_m + \mathbf{b}_m) X \phi(\delta_\Gamma, \omega_\Gamma) \bar{V}], \end{aligned} \quad (24)$$

由此可求出 \mathbf{a}^0 到 $\pi^a(s_\Gamma)$ 的距离 $r^a(s_\Gamma)$

$$r^a(s_\Gamma) = \inf_{\substack{\mathbf{v} \in K(s_\Gamma) \\ \|\mathbf{v}\|=1}} \frac{\|[(\mathbf{a}^{0T} A_1 + \mathbf{b}_1) X \phi(\delta_\Gamma, \omega_\Gamma) \bar{V} \vdots \cdots \vdots (\mathbf{a}^{0T} A_m + \mathbf{b}_m) X \phi(\delta_\Gamma, \omega_\Gamma) \bar{V}]\|}{\|[A_1 X \phi(\delta_\Gamma, \omega_\Gamma) \bar{V} \vdots \cdots \vdots A_m X \phi(\delta_\Gamma, \omega_\Gamma) \bar{V}]\|}, \quad (25)$$

当 $|s_\Gamma| \rightarrow \infty$ 时, 可利用 $\text{Ker} \phi_n$ 构造

$$K(\infty) \triangleq \bigcup_{\mathbf{a} \in \pi^a(\infty)} \text{Ker} \phi_n, \quad (26)$$

并且可得出 \mathbf{a}^0 到 $\pi^a(\infty)$ 的距离 r_∞^a

$$r_\infty^a = \inf_{\substack{\mathbf{v}' \in K(\infty) \\ \|\mathbf{v}'\|=1}} \frac{\|[(\mathbf{a}^{0T} A_1 + \mathbf{b}_1) X_n \mathbf{v}' \vdots \cdots \vdots (\mathbf{a}^{0T} A_m + \mathbf{b}_m) X_n \mathbf{v}']\|}{\|[A_1 X_n \mathbf{v}' \vdots \cdots \vdots A_m X_n \mathbf{v}']\|}, \quad (27)$$

由此参数 \mathbf{a} 允许摄动范围的最大半径为

$$r_M^a = \min \left\{ r_\infty^a, \inf_{s_\Gamma \in \Gamma, |s_\Gamma| < \infty} r^a(s_\Gamma) \right\}. \quad (28)$$

4 算例

考虑下面系统:

$$G(s) = \begin{pmatrix} s + s_1 & 0 \\ 0 & s + s_2 \end{pmatrix}^{-1}, \quad K(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $s_1 = 4a_1 + 4, s_2 = 2a_2 + 2, a_1, a_2$ 的标称值为零。假设期望闭环极点落在图 1 所示的阴影区中。

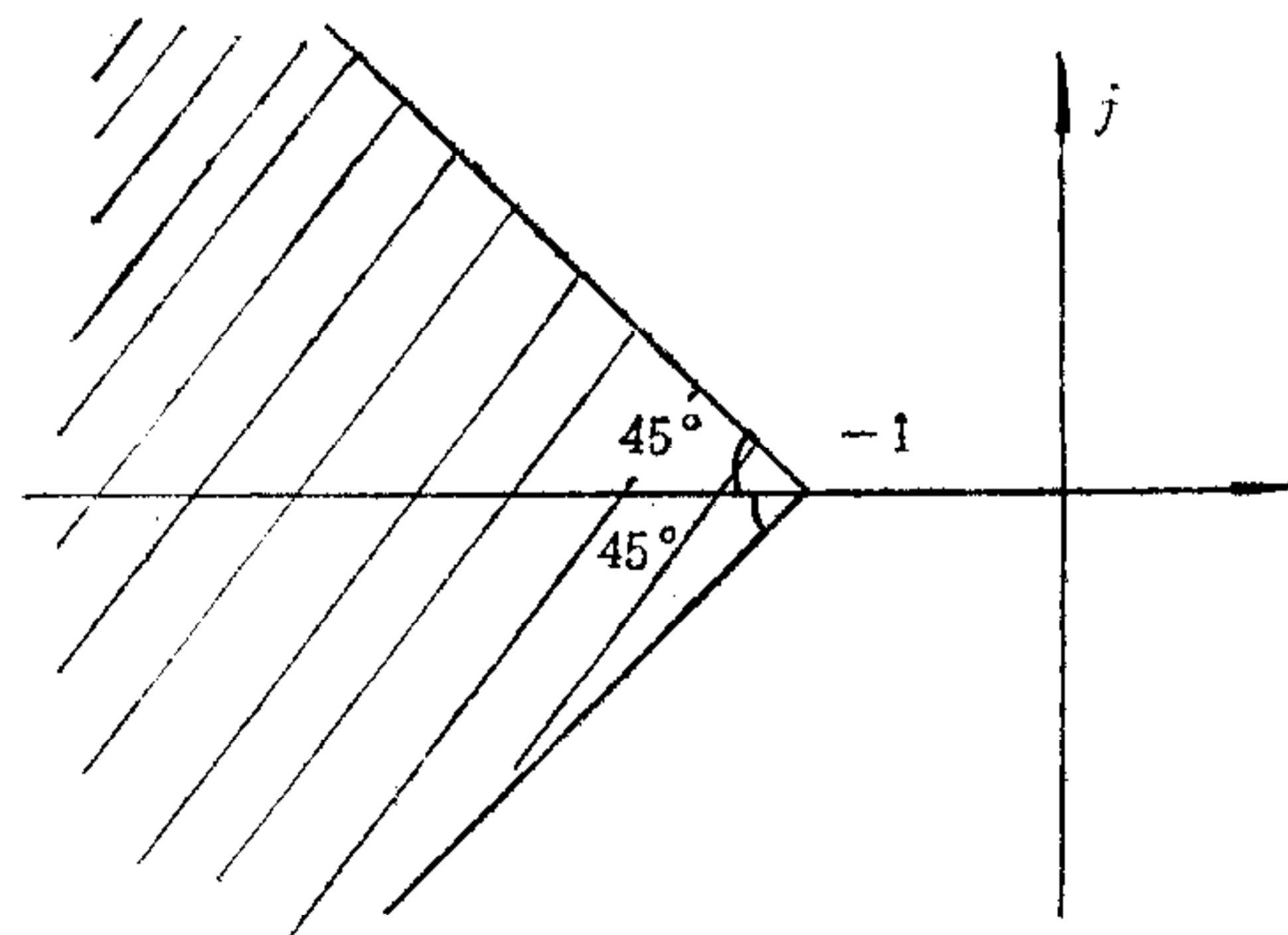


图 1

根据上面讨论, 可得到临界 \mathcal{D} -稳定条件

$$(a_1, a_2) \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{V} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{V} \right] + [(5 + \delta \ 0 \ \omega \ 0) \bar{V} \vdots (0 \ 3 + \delta \ 0 \ \omega) \bar{V}] = 0.$$

从上式可以看出,当 $\omega \neq 0$ 时, $K(s_\Gamma) = \{0\}$, 因此 $r^a(s_\Gamma) = \infty$. 当 $\omega = 0$ 时, $\delta = -1$. 这时, 上式可重写为

$$(a_1 a_2) \begin{pmatrix} 4v_R^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2v_R^2 & 0 \end{pmatrix} + (4v_R^1 \ 0 \ 2v_R^2 \ 0) = 0,$$

其中 $(v_R^1, v_R^2)^T \in R^2$.

如果以 $\|\cdot\|_\infty$ 求系统参数允许摄动范围的最大半径, 则

$$r^a(-1) = \inf_{v_R \in R^2} \frac{\|(4v_R^1 \ 0 \ 2v_R^2 \ 0)\|_\infty}{\left\| \begin{pmatrix} 4v_R^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2v_R^2 & 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty} = 1.$$

另外, 在本例中, 参数摄动不可能引起系统有极点在 Γ 上的无穷远处, 所以 $r_\infty^a = \infty$. 因此, 根据(28)式可知, 对象参数在 $\|\cdot\|_\infty$ 意义下的最大允许摄动半径为 1.

参 考 文 献

- [1] Soh C B *et al.* On the Stability Properties of Polynomials with Perturbed Coefficients *IEEE Trans. Auto. Contr.* 1985, **AC-30**: 1033—1036.
- [2] Biernacki R M *et al.* Robust stability with Structured Real Parameter Perturbations. *IEEE Trans. Auto. Contr.* 1987, **AC-32**: 495—505.
- [3] 苏为洲等. 具有参数摄动的多变量系统的鲁棒稳定性. *自动化学报*, 1991, **17**(5): 537—544.
- [4] L Qiu *et al.* A Unified Approach for the stability Robustness of Polynomials in a Convex Set. *Automatica*, 1992, **28**(5): 945—959.

ROBUST \mathcal{D} -STABILITY OF MIMO SYSTEM IN THE PARAMETER SPACE

SU WEIZHOU JIN PIYAN

(Dept. Automatic Control, Southeast University Nanjing 210018)

ABSTRACT

In order to keep the \mathcal{D} -stability of multivariable system with respect to parameter uncertainty, the largest region in which the parameters of the system are allowed to perturb is constrained by the region \mathcal{D} in complex plane and its nominal system. The largest radius of the region is given by the condition of critical \mathcal{D} -stability and character of linear operator. Because the radius is expressed with general norm, we can obtain several largest stable regions (such as parallelotopes, ellipsoids, polytopes el.) in parameter space.

Key words: Multivariable system, robustness, \mathcal{D} -stability, parameter perturbation.