



随机离散人口系统建模及稳定性分析

倪岳锋

(青岛市科学技术委员会 青岛 266071)

摘要

建立了随机人口系统生育、死亡、迁移过程的差分方程模型,对随机离散人口系统按龄均值和二阶中心矩的 Lyapunov 稳定性进行了研究,给出了根据我国 1987 年 1% 人口抽查资料进行仿真的结果。

关键词: 随机离散人口系统,稳定性,临界生育率。

1 引言

借助于数学工具对人口系统进行定量描述和分析,已成为人口研究的重要方法。

宋健和于景元^[1]认为:确定型人口系统存在临界生育率,当妇女总和生育率分别大于、等于和小于临界生育率时,人口系统在 Lyapunov 意义下分别不稳定、临界稳定和渐近稳定。

Kendall^[2] 和 Pollard^[3] 等基于确定型人口模型,考察了具正正则性的随机人口系统,Getz^[4] 对不分龄的情况进行了分析。本文在前人工作基础上建立了人口生育、死亡、迁移过程均值和二阶中心矩的发展方程,指出人口均值和二阶中心矩都存在稳定性问题,稳定的临界点以由生育模式、女性概率和死亡概率决定的临界生育率表示。

2 模型的建立

设 m 为人的最高寿命,时刻 t 按龄人口数为随机变量 $n_k(t), k = 0, 1, \dots, m$, 妇女最低和最高育龄分别为 a_1 和 a_2 , 按龄女性概率为 $\omega_k(t)$, 妇女总和生育率为 $\beta_p(t)$, k 年龄组成员年龄属于 $[k, k+1)$ 。在 $[t, t+1)$ 内, 系统内 $k (= 0, 1, \dots, m)$ 年龄组的每一个体以概率 $u_k(t)$ 死去, $k (= a_1, a_1 + 1, \dots, a_2)$ 年龄组的每一女性以概率 $\beta_p(t)h_{pk}(t)$ 生育一新个体, $h_{pk}(t)$ 为生育模式, 满足条件 $\sum_{k=a_1}^{a_2} h_{pk}(t) = 1$, 婴儿死亡概率为 $u_{00}(t)$, 迁入和迁出人口分别形成概率强度为 $w_k(t)$ 和 $v_k(t)$ 的泊松流。

由上述假设, $t+1$ 时刻 $k(=1, 2, \dots, m)$ 年龄组人口 $n_k(t+1)$ 为

$$n_k(t+1) = n_{l, k-1}(t+1) + W_k(t) - V_k(t), k = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

其中 $n_{l, k-1}(t+1)$ 为 t 时刻 $k-1$ 年龄组在 $t+1$ 时刻的存活数, 满足条件二项分布 $B[n_{k-1}(t), 1 - u_{k-1}(t)]$, $W_k(t), V_k(t)$ 为 $[t, t+1)$ 内 k 年龄组迁入、迁出人口数.

$t+1$ 时刻 0 年龄组人口 $n_0(t+1)$ 为

$$n_0(t+1) = \sum_{k=a_1}^{a_2} n_{0(k)}(t+1) + W_0(t) - V_0(t), \quad (2)$$

其中 $n_{0(k)}(t+1)$ 为 k 年龄组妇女生育并存活的孩子数, 满足条件二项分布 $B[n_k(t), \beta_p(t)h_{pk}(t)(1 - u_{00}(t))]$, $W_0(t), V_0(t)$ 表示 $(t, t+1)$ 内迁入、迁出的 0 年龄组人口数.

引理 1. 设 X, Y 均为取值非负整数的随机变量, X_1, X_2, Y_1 为具相互独立的条件二项分布 $B(X, P_{x_1}), B(X, P_{x_2}), B(Y, P_{y_1})$ 的随机变量, 则 $EX_1 = P_{x_1}EX, VarX_1 = P_{x_1}^2VarX + P_{x_1}(1 - P_{x_1})EX, Cov(X_1, X_2) = P_{x_1}P_{x_2}VarX, Cov(X_1, Y_1) = P_{x_1}P_{y_1}Cov(X, Y)$.

证明可直接根据定义进行, 从略.

以 $\bar{n}_k(t), \sigma_{kk}(t)$ 分别表示随机变量 $n_k(t)$ 的均值和方差, $\sigma_{ji}(t)$ 表示 $n_k(t)$ 与 $n_j(t)(k \neq j)$ 间协方差. 由式(1),(2)及引理 1 得

$$\bar{n}_{k+1}(t+1) = (1 - u_k(t))\bar{n}_k(t) + w_k(t) - v_k(t), k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (3)$$

$$\bar{n}_0(t+1) = \beta_p(t) \sum_{k=a_1}^{a_2} \omega_k(t)h_{pk}(t)(1 - u_{00}(t))\bar{n}_k(t) + \omega_0(t) - v_0(t). \quad (4)$$

根据引理 1 和式(1)得

$$\sigma_{k+1, k+1}(t+1) = (1 - u_k(t))^2\sigma_{kk}(t) + u_k(t)(1 - u_k(t))\bar{n}_k(t) + w_k(t) + v_k(t), \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5)$$

$$\sigma_{k+1, j+1}(t+1) = (1 - u_k(t))(1 - u_j(t))\sigma_{kj}(t), k, j = 0, 1, \dots, m-1, k \neq j. \quad (6)$$

由引理 1 和式(1),(2)得

$$\sigma_{0k}(t+1) = \sum_{j=a_1}^{a_2} (1 - u_k(t))(1 - u_{00}(t))\beta_p(t)\omega_j(t)h_{pj}(t)\sigma_{kj}(t), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{00}(t+1) &= \sum_{k, j=a_1}^{a_2} \beta_p^2(t)\omega_k(t)\omega_j(t)h_{pk}(t)h_{pj}(t)(1 - u_{00}(t))^2\sigma_{kj}(t) \\ &+ \sum_{k=a_1}^{a_2} \beta_p(t)\omega_k(t)h_{pk}(t)(1 - u_{00}(t))[1 - \beta_p(t)\omega_k(t)h_{pk}(t)(1 - u_{00}(t))] \bar{n}_k(t) + \omega_0(t) + v_0(t). \end{aligned} \quad (8)$$

式(3)–(8)联立可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{n}(t+1) \\ \sigma(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A_p(t) + \beta_p(t)B_p(t)) \\ D(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{n}(t) \\ \sigma(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(t) \\ E(t) \end{bmatrix}, \\ &\quad (A_p(t) + \beta_p(t)B_p(t)) \otimes (A_p(t) + \beta_p(t)B_p(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

其中 \otimes 表示 Kronecker 积^[5].

$$\bar{n}(t) = [\bar{n}_0(t), \bar{n}_1(t), \bar{n}_2(t), \dots, \bar{n}_m(t)]^T,$$

$$\sigma(t) = [\sigma_{00}(t), \sigma_{01}(t), \dots, \sigma_{0m}(t), \sigma_{10}(t), \sigma_{11}(t), \dots, \sigma_{1m}(t), \dots, \sigma_{m0}(t), \sigma_{m1}(t), \dots, \sigma_{mm}(t)]^T,$$

$$A_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ (1 - u_0(t)) & & & & & & 0 \\ & (1 - u_1(t)) & & & & & \vdots \\ & & 0 & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & (1 - u_{m-1}(t)) & & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{a_1}(t) & \dots & b_{a_2}(t) & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & & & & & \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)},$$

$$b_k(t) = (1 - u_{00}(t))\omega_k(t)h_{pk}(t), k = a_1, a_1 + 1, \dots, a_2,$$

$$D(t) = [D_0(t), D_1(t), \dots, D_m(t)]^T,$$

$$D_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & d_{0a_1}(t) & \dots & d_{0a_2}(t) & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & & & & & \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)},$$

$$d_{0k}(t) = \beta_p(t)\omega_k(t)h_{pk}(t)(1 - u_{00}(t))[1 - \beta_p(t)\omega_k(t)h_{pk}(t)(1 - u_{00}(t))],$$

$$k = a_1, a_1 + 1, \dots, a_2,$$

$$D_i(t) = \text{diag}[0, \dots, 0, (u_i(t) - u_i^2(t)), 0, \dots, 0], i = 1, 2, \dots, m,$$

$$E(t) = \text{diag}[(w_0(t) + v_0(t)), (w_1(t) + v_1(t)), \dots, (w_m(t) + v_m(t))],$$

$$F(t) = [(w_0(t) - v_0(t)), (w_1(t) - v_1(t)), \dots, (w_m(t) - v_m(t))]^T.$$

3 稳定性分析

为简化起见,讨论常系数情况.

$$\begin{bmatrix} \bar{n}(t+1) \\ \sigma(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_p + \beta_p B_p) & 0 \\ D & (A_p + \beta_p B_p) \otimes (A_p + \beta_p B_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{n}(t) \\ \sigma(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ E \end{bmatrix}. \quad (10)$$

矩阵 $(A_p + \beta_p B_p)$ 的特征多项式为

$$\Delta(s) = s^{m+1} - \beta_p \sum_{i=a_1}^{a_2} \omega_i h_{pi} (1 - u_{00})(1 - u_0) \dots (1 - u_{i-1}) s^{m-i}. \quad (11)$$

定义妇女临界生育率 β_{pcr}

$$\beta_{pcr} = \left[\sum_{i=a_1}^{a_2} \omega_i h_{pi} (1 - u_{00})(1 - u_0) \dots (1 - u_{i-1}) \right]^{-1}. \quad (12)$$

引理 2^[5]. 设矩阵 $(A_p + \beta_p B_p)$ 为 $m + 1$ 阶方阵,其特征值为 $s_i, i = 1, 2, \dots, m + 1$, 则 $s_{ij} = s_i s_j, i, j = 1, 2, \dots, m + 1$, 是矩阵 $(A_p + \beta_p B_p) \otimes (A_p + \beta_p B_p)$ 的特征值.

引理 3^[1]. 当 $0 < \beta_p < \beta_{pcr}$ 时, $(A_p + \beta_p B_p)$ 的特征值均在单位圆内; $(A_p + \beta_{pcr} B_p)$ 有代数单特征值 1, 其它特征值均在单位圆内; 当 $\beta_p > \beta_{pcr}$ 时, $(A_p + \beta_p B_p)$ 有特征值在单位圆外.

定理 1. 在 Lyapunov 意义下, (1) 当 $\beta_p > \beta_{pcr}$ 时, 按龄人口均值和二阶中心矩均不稳定; (2) 当 $\beta_p = \beta_{pcr}$ 时, 按龄人口均值临界稳定, 二阶中心矩不稳定; (3) 当 $0 < \beta_p < \beta_{pcr}$

时,按龄人口均值和二阶中心矩渐近稳定。

证明. 式(1), (3)根据引理 2,3 直接可得. 当 $\beta_p = \beta_{pcr}$ 时, 由引理 3 知, $(A_p + \beta_{pcr} B_p)$ 有代数单特征值 1, 其余的特征值均在单位圆内, 故按龄人口均值临界稳定. 由引理 2 知, $(A_p + \beta_{pcr} B_p) \otimes (A_p + \beta_{pcr} B_p)$ 也有特征值 1, 对于系统(10), 1 为二重特征值, 系统在 Lyapunov 意义下不稳定, 即按龄人口二阶中心矩不稳定. 证毕.

4 仿真

以 1987 年为时间零点, 以该年我国 1% 人口抽查的按龄人口数为初始人口均值, 死亡概率、女性概率、生育模式均以该年的统计数据为参考^[6], 初始人口统计误差按 2.5‰ 估计. 按(12)式计算得妇女临界生育率为 $\beta_{pcr} = 2.129$.

不考虑迁移, 按(10)式进行仿真, 结果表明各年龄组均值、方差、协方差的变化趋势相同, 选均值 $\bar{n}_0(t)$ 、方差 $\sigma_{00}(t)$ 和协方差 $\sigma_{13,27}(t)$ 示例如图 1—3 所示.

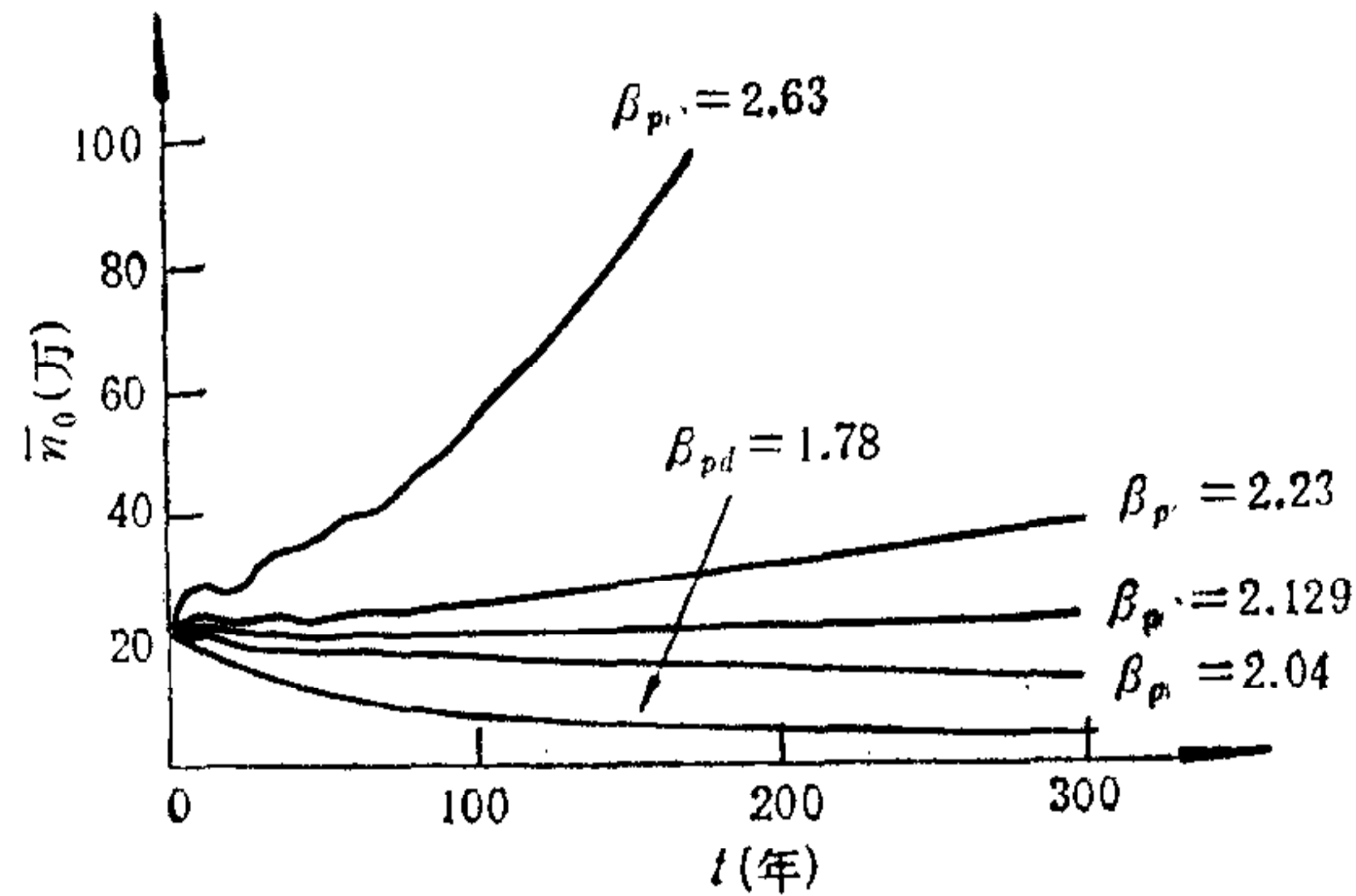


图 1 0 年龄组均值变化曲线

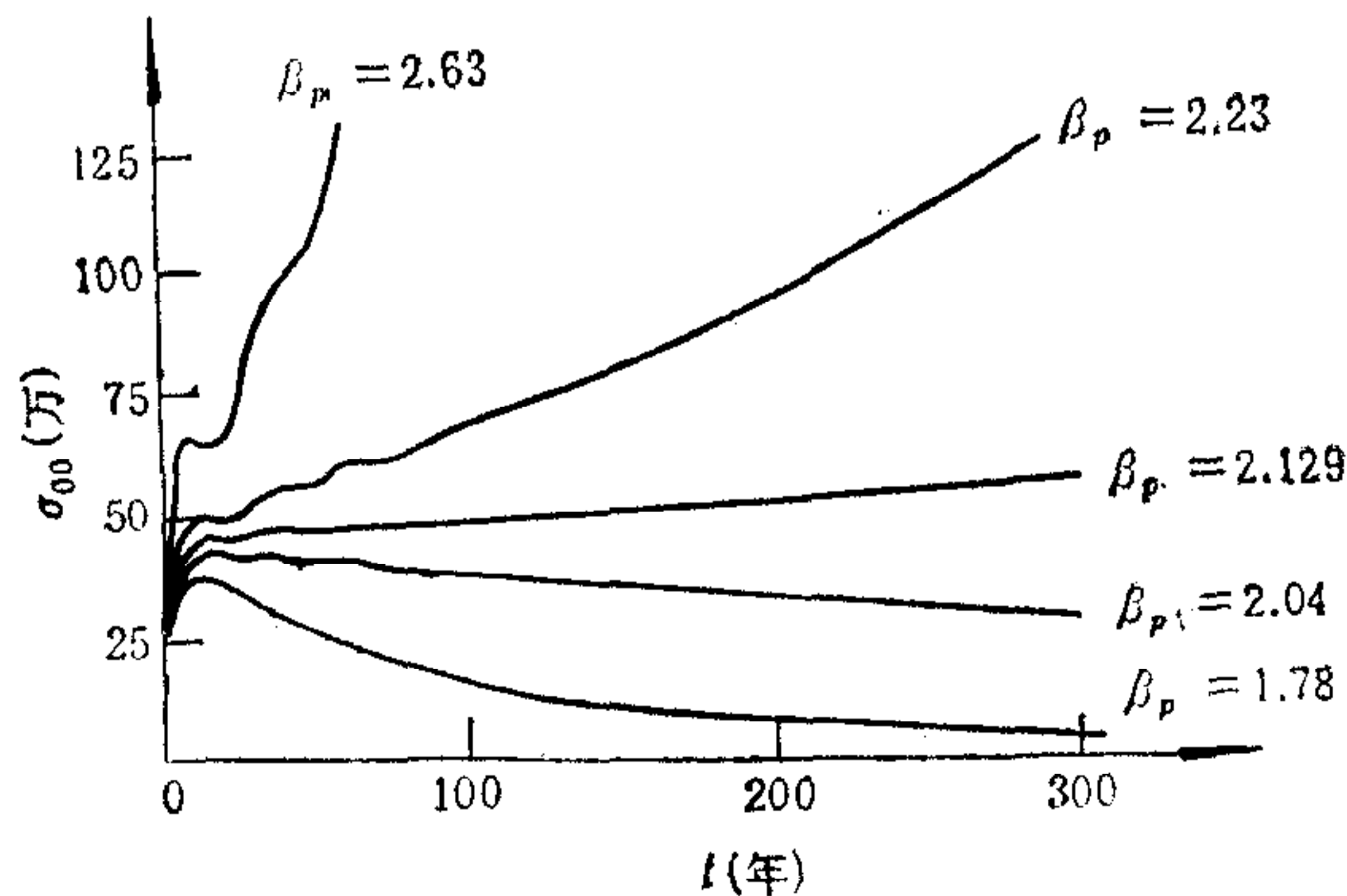


图 2 0 年龄组方差变化曲线

图 1—3 表明仿真结果与定理 1 结论一致。

对总和生育率大于或等于临界生育率的人口系统, 由于方差发散, 进行人口预报时必

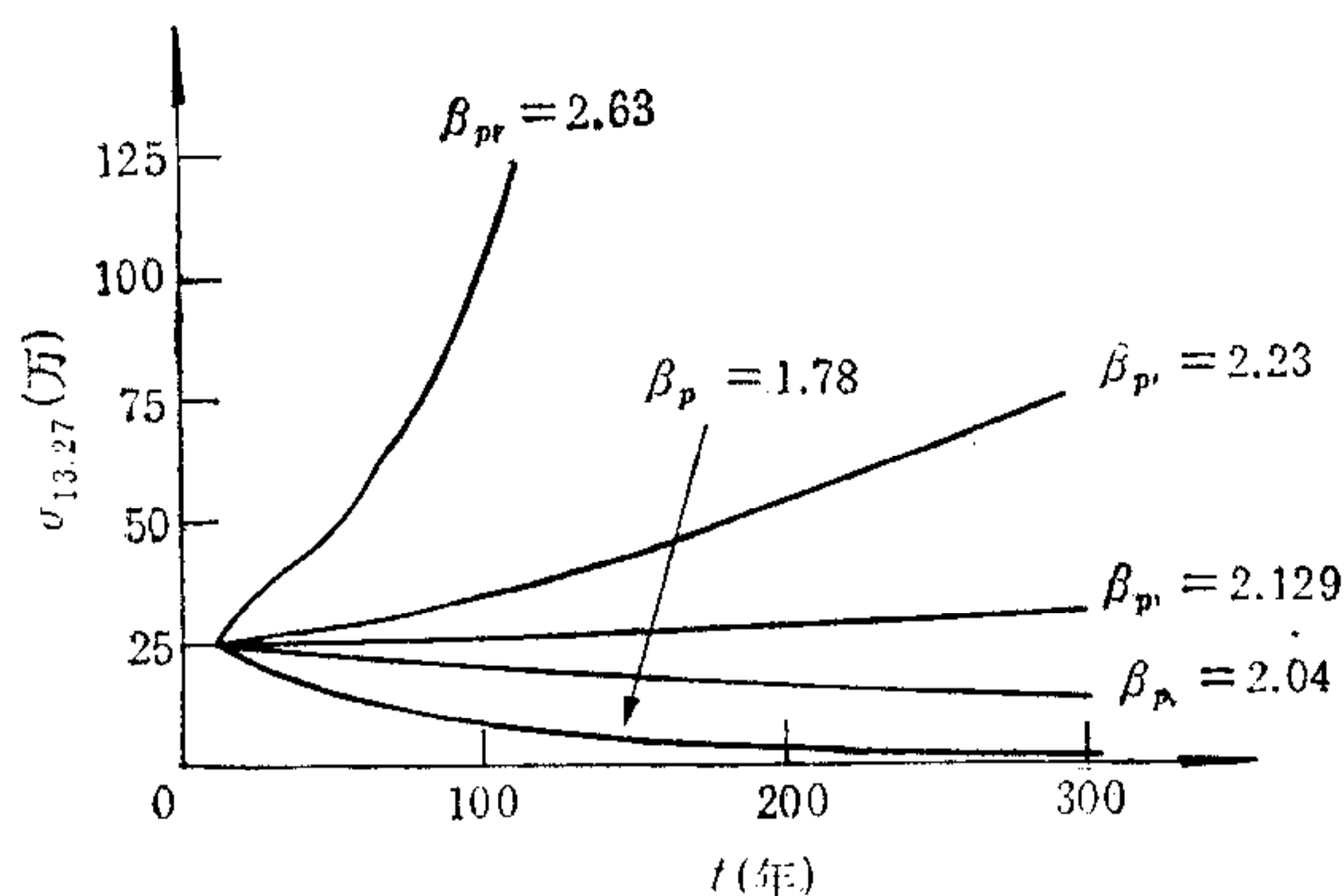


图3 13和27年龄组协方差变化曲线

须注意可能的偏差。若在保证人口不会无限增长，应调整政策使总和生育率稍低于临界生育率。

致谢。本文是在导师宋健教授、副导师于景元研究员、夏绍玮教授指导下完成的，朱广田研究员和韩京清研究员给予了帮助，作者在此深表感谢。

参 考 文 献

- [1] 宋健,于景元. 人口控制论. 北京: 科学出版社,1985. 1—214.
- [2] Kendall D G. Stochastic processes and population growth, J. Roy. Stat. Soc., Series B, 1949, 11:230—264.
- [3] Pollard J H. Mathematical models for the growth of human populations. Cambridge University Press, London, 1975. 1—135.
- [4] Getz W M. Optimal control of a birth-and-death process population model, *Math. Biosci.*, 1975, 23:87—111.
- [5] 韩京清,何关钰,许可康. 线性系统理论代数基础. 沈阳: 辽宁科学技术出版社,1985. 313—396.
- [6] 国家统计局人口统计司. 中国1987年1%人口抽样调查资料(全国分册). 北京: 中国统计出版社, 1988.

MODEL BUILDING AND STABILITY ANALYZING OF STOCHASTIC DISCRETE POPULATION SYSTEMS

NI YUEFENG

(Qingdao Science & Technology Commission Qingdao 266071)

ABSTRACT

This paper uses difference equations to model the stochastic population birth-death and migration processes, analyzes the Lyapunov stability of the age-dependent first and second moment of the stochastic discrete population systems, gives the simulation results by using the data of 1987's 1% population census of PRC.

Key words: Stochastic discrete population system, stability, critical fertility rate.