第21卷 第5期　　自　动　化　学　报　　Vol. 21, No. 5
1995年9月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Sep., 1995

控制幅值受限下定常离散线性系统最小拍控制序列的一种综合方法[1)]

陈兆宽
（山东大学数学系　济南　250100）

陈　辉
（北京大学力学系　100871）

摘　　要

控制幅值受限下离散线性系统的最小拍控制问题与连续线性系统的快速控制问题是有很大差别的，主要是它的非唯一性与非 bang-bang 性. 文中用凸集的支撑超平面等方法研究了能控域及其边界面的结构特性，给出了求解最小拍最小幅值控制序列综合解的一种计算方法，该方法计算量较小，有实用价值.

关键词：控制幅值受限，定常离散线性系统，最小拍控制序列.

1　问题的提法

考察定常离散线性系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k+1)+\boldsymbol{b}u(k), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k)$ 是 n 维状态变量，$u(k)$ 是一维控制变量，A 是 $n\times n$ 实正则矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为 n 维实向量. 设控制受到如下的约束：

$$|u(k)|\leqslant M,\ k=0,1,2,\cdots, \tag{2}$$

又设系统(1)是控制满足约束条件(2)的有限拍完全能控系统. 从文[1]知，系统(1)的状态矩阵 A 必须满足两个条件

1) $\operatorname{rank}[\boldsymbol{b},A\boldsymbol{b},\cdots\cdots,A^{n-1}\boldsymbol{b}]=n$, (3)

2) $|\lambda(A)|\leqslant 1$, $\lambda(A)$ 是 A 的特征值. (4)

以下的讨论都是在满足(2),(3),(4)的条件下进行的.

定义 1. 设 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^0$ 是 n 维空间中任意给定的初始状态，若能找到控制序列 $\{u(0),u(1),\cdots\cdots,u(N-1)\}'$，它能将 $\boldsymbol{x}^0$ 转移到坐标原点，而且使用的拍数 $N(\boldsymbol{x}^0)$ 为最小，则把这个控制序列称为相应于 $\boldsymbol{x}^0$ 的最小拍控制序列.

---

1) 国家自然科学基金资助项目.
本文于 1992 年 8 月 2 日收到

令

$$\Omega(N,M)=\{[u(i)]_{i=0}^{N-1},|u(i)|\leqslant M,\ i=0,\cdots\cdots,N-1\},\tag{5}$$

设控制序列 $\{u(0),u(1),\cdots,u(N-1)\}'$ 能将 $\boldsymbol{x}^0$ 转移到原点，则

$$\boldsymbol{x}^0=-\sum_{i=0}^{N-1}A^{-(i+1)}\boldsymbol{b}u(i),\tag{6}$$

令

$$Q(N,M)=\left\{\boldsymbol{x}(N),\ \boldsymbol{x}(N)=-\sum_{i=0}^{N-1}A^{-(i+1)}\boldsymbol{b}u(i),\ [u(i)]_{i=0}^{N-1}\in\Omega(N,M)\right\},\tag{7}$$

称 $Q(N,M)$ 为系统(1)在控制受到约束(2)下的N拍能控域.

2　$Q(N,M)$ 的某些性质

定理 1. 1) $Q(N,M)$ 是凸集，$Q(N,M)\subseteq Q(N+1,M)$，$Q(N,M)$ 关于原点是中心对称的，$Q(N,M)$ 是闭集. 2) 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维空间中的一个单位向量，则原点到能控域 $Q(N,M)$ 的具有法向是为 $\boldsymbol{\xi}$ 的支撑超平面的距离 $d(\boldsymbol{\xi},N,M)$ 有如下的表达式：

$$d(\boldsymbol{\xi},N,M)=M\sum_{i=0}^{N-1}|\boldsymbol{\xi}'A^{-(i+1)}\boldsymbol{b}|.\tag{8}$$

3) 状态 $\boldsymbol{x}\in Q(N,M)$ 的充要条件是

$$|\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{x}|\leqslant d(\boldsymbol{\xi},N,M),\tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维空间中的任一单位向量. 4) 设 $\boldsymbol{x}$ 是 $Q(N,M)$ 的边界点，则

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\min\frac{M\sum_{i=0}^{N-1}|\boldsymbol{\xi}'A^{-(i+1)}\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x})|},\tag{10}$$

其中$\|\cdot\|_2$是 n 维空间中的欧几里得范数，$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x})$ 是 n 维空间中向量 $\overrightarrow{O\boldsymbol{x}}$ 的单位向量.

证略.

定理 2. 1) 控制约束区域 $\Omega(N,M)$ 是由N维空间中的 2^N 个不同的点

$$S_i=(u_i^1,\cdots,u_i^N),\ i=1,\cdots,2^N\tag{11}$$

的凸包组成的凸多面体 U，其中(11)式中 S_i 的任一坐标 $u_i^j(j=1,\cdots,N)$ 取M或$-M$(注. 由一切这样的取法正好生成 2^N 个不同的点). U 是N维空间中的N维平行多面体，它的每条棱长等于 $2M$，(11)式表示的点是它的顶点，在每一个顶点处的棱两两彼此垂直.

2) 令

$$Q_i=-[A^{-1}b,\cdots,A^{-N}b]S_i,i=1,\cdots,2^N,\tag{12}$$

则能控域 $Q(N,M)$ 是由(12)式表示的 2^N 个点的凸包组成的凸多面体 V. 3) V 的顶点是由(12)式表示的点的一部分或全部.

证明. 定理 1 中的 1) 由约束条件(2)式直接推出，2)，3)的证明参看文[2,3].

定理 3. 设对于任何正整数 N，在正整数序列

$$\{1,2,\cdots,N\},N>n$$

中任取 $(n-1)$ 个不同数的组合,设为 $\{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\}$, 向量组

$$\{A^{-i_1}\boldsymbol{b},A^{-i_2}\boldsymbol{b},\cdots,\ A^{-i_{n-1}}\boldsymbol{b}\} \tag{13}$$

是线性无关的,则对于系统(1), 它的N拍能控域是N维空间中的凸多面体, 它的边界面具有性质: 1) 都是 $(n-1)$ 维平行多面体. 2) 关于坐标原点是中心对称分布的. 3) $(n-1)$ 维平行多面体边界面的总数是 $2C_N^{n-1}$ (其中 C_N^{n-1} 是组合数). 4) 在N个向量组中

$$A^{-1}\boldsymbol{b},\ A^{-2}\boldsymbol{b},\cdots,A^{-N}\boldsymbol{b}, \tag{14}$$

任取 $(n-1)$ 个不同的向量(例 $A^{-i_1}\boldsymbol{b},\ A^{-i_2}\boldsymbol{b},\ \cdots,\ A^{-i(n-1)}\boldsymbol{b}$), 则在 $Q(N)$ 的边界面中,一定存在一对中心对称的 $(n-1)$ 维平行多面体 $P(N),P(N)^*$ 与它对应,使得 $P(N)$ (或 $P(N)^*$) 的位于同一顶点的 $(n-1)$ 条棱中的每一条棱,一定与上述 $(n-1)$ 个向量组中的一个向量相平行,而且棱长是与它平行向量长度的 $2M$ 倍.

限于篇幅,证明从略.

定理 4. 设 $\boldsymbol{x}^0\bar{\in}Q(N-1,M)$, $\boldsymbol{x}^0\in Q(N,M)$, 且 $\boldsymbol{x}^0$ 是 $Q(N,M)$ 的边界点,则 1) $\boldsymbol{x}^0$ 的最小拍控制序列的拍数是 N; 2) 将 $\boldsymbol{x}^0$ 转移到原点的任何N拍控制序列 $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}(0),\boldsymbol{u}(1),\cdots,\boldsymbol{u}(N-1))' \tag{15}$$

中,至少存在某一拍 k, $0\leqslant k\leqslant N-1$, 使 $\boldsymbol{u}(k)$ 满足

$$|\boldsymbol{u}(k)|=M. \tag{16}$$

此外必有 $\boldsymbol{u}(N-1)\neq 0$.

证明. 定理 4 的 1) 是显然的,2)中的 $\boldsymbol{u}(N-1)\neq 0$ 也是显然的. 下证 2) 中的其余的部分. 用反证法,若不然,设序列(15)中任何一拍都不满足(16)式,即

$$|\boldsymbol{u}(k)|<M,\ k=0,1,\cdots,N-1, \tag{17}$$

令

$$\boldsymbol{x}_{N-1}=-\sum_{i=0}^{N-2}A^{-(i+1)}\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}(i), \tag{18}$$

则

$$\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{x}_{N-1}-A^{-N}\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}(N-1), \tag{19}$$

由(18)式知, $\boldsymbol{x}_{N-1}\in Q(N-1,M)$.

若向量 $\overrightarrow{\boldsymbol{x}_{N-1}\boldsymbol{x}^0}$ 不整个地在 $Q(N,M)$ 的边界面上,则必有

$$|\boldsymbol{u}(N-1)|=M, \tag{20}$$

对于这种情形,定理已证毕. 现在设 $\overrightarrow{\boldsymbol{x}_{N-1}\boldsymbol{x}^0}$ 整个地位于 $Q(N,M)$ 的边界面上,则 $\boldsymbol{x}_{N-1}$ 必须位于 $Q(N-1,M)$ 的边界面上. 于是,问题转化为证明在序列

$$(\boldsymbol{u}(0),\boldsymbol{u}(1),\cdots,\boldsymbol{u}(N-2))' \tag{21}$$

中,至少有一拍 k, $0\leqslant k\leqslant N-2$, 使

$$|\boldsymbol{u}(k)|=M.$$

令

$$\boldsymbol{x}_{N-2}=-\sum_{i=0}^{N-3}A^{-(i+1)}\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}(i), \tag{22}$$

则

$$x_{N-2} = x_{N-1} - A^{-(N-1)}bu(N-2), \tag{23}$$
$$x_{N-2} \in Q(N-2, M),$$

若 $\overrightarrow{x_{N-2}x_{N-1}}$ 不整个地在 $Q(N-1, M)$ 的边界面上，则必有

$$|u(N-2)| = M, \tag{24}$$

对于这种情形，定理也已证毕. 若 $\overrightarrow{x_{N-2}x_{N-1}}$ 整个地位于 $Q(N-1, M)$ 的边界面上，则 x_{N-2} 必在 $Q(N-2, M)$ 的边界面上. 余下依次类推，直到 $x_{n+1} \in Q(n+1, M)$，且 x_{n+1} 是 $Q(n+1, M)$ 的边界点，令

$$x_n = -\sum_{i=0}^{n} A^{-(i+1)}bu(i), \tag{25}$$

$$x_{n+1} = x_n - A^{-(n+1)}bu(n+1), \tag{26}$$

$\overrightarrow{x_n x_{n+1}}$ 在 $Q(N+1, M)$ 的边界面上，则 x_n 在 $Q(n, M)$ 的边界面上. 由于系统 (A, b) 是完全能控的，于是 $Q(n, M)$ 是 n 维状态空间中的平行多面体. 于是满足(25)式的 $(u(0), \cdots, u(n-1))'$ 必在 n 维控制域 $\Omega(n, M)$ 的边界面上. 但是 $\Omega(n, M)$ 的边界面上的任一点必须有一个坐标的绝对值等于 M，这与(17)式相矛盾. 证毕.

定理 5. 1) 设 $M_1 < M_2$，则 $Q(N, M_1) C Q(N, M_2)$，$Q(N, M_1)$ 的边界中不属于 $Q(N-1, M_1)$ 的部分与 $Q(N, M_2)$ 的边界中不属于 $Q(N-1, M_2)$ 的部分没有公共点. 2) 设正数序列 $M_1 < M_2 < \cdots < M_n < \cdots < M_0$，且

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_0, \tag{27}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} Q(N, M_n) = Q(N, M_0). \tag{28}$$

3) 设 x^0 满足 $x^0 \bar{\in} Q(N-1, M)$，$x^0 \in Q(N, M)$，且 x^0 不是 $Q(N, M)$ 的边界点，则一定存在唯一的正数 M^*，$M^* < M$，使 x^0 是 $Q(N, M^*)$ 的边界点.

证明. 定理 5 的 1) 中，$Q(N, M_1) \subset Q(N, M_2)$ 是显然的. 其余部分可以由定理 4 的 2) 推出. 由本定理的 1) 可知，

$$Q(N, M_1) \subset Q(N, M_2) \subset \cdots \subset Q(N, M_n) \subset \cdots \subset Q(N, M_0), \tag{29}$$

从 $Q(N, M_0)$ 中任取一个状态 $x \in Q(N, M_0)$，$\forall \varepsilon > 0$，下面证明一定存在正整数 k 及在 $Q(N, M_k)$ 中存在状态 x_k，使

$$\|x - x_k\|_2 < \varepsilon. \tag{30}$$

由于(27)式，$\forall \varepsilon > 0$，可以选取 k 使

$$|M_k - M_0| < \frac{M_0}{\|x\|_2} \varepsilon, \tag{31}$$

因为 $x \in Q(N, M_0)$，因此存在控制序列 $(u(0), \cdots, u(N-1))' \in \Omega(N, M_0)$，使

$$x = -\sum_{i=0}^{N-1} A^{-(i+1)}bu(i), \tag{32}$$

令

$$x_k = -\sum_{i=0}^{N-1} A^{-(i+1)} b \frac{M_k}{M_0} u(i), \tag{33}$$

$$\because \quad \left| \frac{M_k}{M_0} u(i) \right| \leqslant M_k, \ i = 0, 1, \cdots, N-1, \tag{34}$$

$$\therefore \quad x_k \in Q(N, M_k), \tag{35}$$

$$\because \quad \begin{aligned} x - x_k &= -\sum_{i=0}^{N-1} A^{-(i+1)} b u(i) \left(1 - \frac{M_k}{M_0}\right) \\ &= \frac{M_0 - M_k}{M_0} \left(-\sum_{i=0}^{N-1} A^{-(i+1)} b u(i)\right) \\ &= \frac{M_0 - M_k}{M_k} x, \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \|x - x_k\|_2 \leqslant \|x\|_2 \frac{M_0 - M_k}{M_0} < \frac{\|x\|_2}{M_0} \cdot \frac{M_0}{\|x\|_2} \varepsilon = \varepsilon, \tag{36}$$

由(35),(36)式可知

$$\lim_{n\to\infty} Q(N, M_n) = Q(N, M_0).$$

证毕.

定理 6. 设 $x^0 \bar{\in} Q(N-1, M)$, $x^0 \in Q(N, M)$, 但 x^0 不是 $Q(N, M)$ 的边界点,若 $N > n$, 则 x^0 的最小拍控制序列不是唯一的,也不一定是 bang-bang 的.

证明. 因为 $x^0 \bar{\in} Q(N-1, M)$, $x^0 \in Q(N, M)$, 因此 x^0 的最小拍控制序列的拍数是 N. 由定理 5 的 3) 知,存在正数 $M_1 < M$, 使 x 是 $Q(N, M_1)$ 的边界点,于是存在一个控制序列

$$u = (u(0), \cdots, u(N-1))' \in \Omega(N, M_1), \tag{37}$$

使

$$x^0 = -\sum_{i=0}^{N-1} A^{-(i+1)} b u(i), \tag{38}$$

由于 $N > n$, 则方程组

$$0 = -\sum_{i=0}^{N-1} A^{-(i+1)} b v_i, \tag{39}$$

一定有非零解向量

$$v = (v_0, v_1, \cdots, v_{N-1})'. \tag{40}$$

注. (39)式右端的 0 表示 n 维空间中的零向量.

设 R 是充分大的正数,使满足

$$\left| u(i) + \frac{v_i}{R} \right| < M, \tag{41}$$

由(38),(39)式可得

$$x^0 = -\sum_{i=0}^{N-1} A^{-(i+1)} b \left(u(i) + \frac{v_i}{R} \right), \tag{42}$$

于是存在两个最小拍控制序列,其中的一个是序列(37),另一个是序列

$$\boldsymbol{w}=\left(u(0)+\frac{v_0}{R},\cdots,u(N-1)+\frac{v_{N-1}}{R}\right)'\in\Omega(N,M),\tag{43}$$

显然控制序列(37)或(43)不一定是 bang-bang 的,证毕.

定理 7. 设初始状态 $\boldsymbol{x}^0$ 满足 $\boldsymbol{x}^0\bar{\in}Q(N-1,M)$, $\boldsymbol{x}^0$ 是 $Q(N,M)$ 的边界点. 对 $\boldsymbol{x}^0$ 按如下程序求其N拍控制序列:

1) 在n维空间中作过 $\boldsymbol{x}^0$ 的直线 l_0, 该直线的方向矢量与 $A^{-N}\boldsymbol{b}$ 相平行, 设直线 l_0 与 $Q(N-1,M)$ 的交点中离 $\boldsymbol{x}^0$ 最近的交点是 $\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{x}^1\in Q(N-1,M))$, 若向量 $\overrightarrow{\boldsymbol{x}^1\boldsymbol{x}^0}$ 与$-A^{-N}\boldsymbol{b}$ 方向相同,令

$$u(N-1)=\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}^1\boldsymbol{x}^0}\|_2/\|A^{-N}\boldsymbol{b}\|_2,\tag{44}$$

若向量 $\overrightarrow{\boldsymbol{x}^1\boldsymbol{x}^0}$ 与 $A^{-N}\boldsymbol{b}$ 方向相同,令

$$u(N-1)=-\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}^1\boldsymbol{x}^0}\|_2/\|A^{-N}\boldsymbol{b}\|_2;\tag{45}$$

2) 依次类推,一般地设 $\boldsymbol{x}^i\in Q(N-i,M)$, $\boldsymbol{x}^i\bar{\in}Q(N-1-i,M)$, 且为 $Q(N-i,M)$ 的边界点, 过 $\boldsymbol{x}^i$ 作直线 l_i, 该直线的方向矢量与 $A^{-N}\boldsymbol{b}$ 平行, 设直线 l_i 与 $Q(N-1-i,M)$ 的交点中离 $\boldsymbol{x}^i$ 最近的交点是 $\boldsymbol{x}^{i+1}$, 若向量 $\overrightarrow{\boldsymbol{x}^{i+1}\boldsymbol{x}^i}$ 与$-A^{-(N-i)}\boldsymbol{b}$ 方向相同,令

$$u(N-1-i)=\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}^{i+1}\boldsymbol{x}^i}\|_2/\|A^{-(N-i)}\boldsymbol{b}\|_2,\tag{46}$$

若向量 $\overrightarrow{\boldsymbol{x}^{i+1}\boldsymbol{x}^i}$ 与 $A^{-(N-i)}\boldsymbol{b}$ 方向相同,令

$$u(N-1-i)=-\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}^{i+1}\boldsymbol{x}^i}\|_2/\|A^{-(N-i)}\boldsymbol{b}\|_2,\tag{47}$$

3) 对于 $i=0,\cdots,N-1$, 可以得到控制序列

$$\{u(0),u(1),\cdots,u(N-1)\}',\tag{48}$$

则满足程序(1),(2),(3)所得的控制序列(48)是一意地确定的,而且它一定是 $\boldsymbol{x}^0$ 的最小拍控制序列.

证略.

令 $\boldsymbol{u}=\{u(0),u(1),\cdots,u(N-1)\}'$ 作为空间 l_∞^N 的元素,它的范数定义如下:

$$\|\boldsymbol{u}\|_\infty=\max_{0\leqslant i\leqslant N-1}|u(i)|.\tag{49}$$

定义 2. 设 $\boldsymbol{x}^0\bar{\in}Q(N-1,M)$, $\boldsymbol{x}^0$ 是 $Q(N,M)$ 的边界点,则按定理 7 的方法求 $\boldsymbol{x}^0$ 的最小拍控制序列. 若 $\boldsymbol{x}^0\bar{\in}Q(N-1,M)$, $\boldsymbol{x}^0\in Q(N,M)$, 且 $\boldsymbol{x}^0$ 不是 $Q(N,M)$ 的边界点,则根据定理 5 的 3),存在唯一的正数 $M_1<M$, 使 $\boldsymbol{x}^0$ 是 $Q(N,M_1)$ 的边界点. 这时对 $Q(N,M_1)$, 仍可用定理 7 的方法求 $\boldsymbol{x}^0$ 的最小拍控制序列. 将这样得到的控制序列称为 $\boldsymbol{x}^0$ 的最小拍最小范数控制综合序列.

3　最小拍最小范数控制序列的计算步骤

下面给出已知初始状态 $\boldsymbol{x}^0$, 求其最小拍最小范数控制序列的计算步骤:

1) 已知初始状态 $\boldsymbol{x}^0$, 求其最小拍最小范数控制序列的最小拍数.

i）对于任给的正数 $k \geqslant n$，求半射线 $l(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}^0))$ 与 $Q(K)$ 的边界面的交点及其相应的（$n-1$）维平行多面体边界面(具体计算方法从略)。

ii）调整正整数 k，求最小拍数 N，使其满足 $\|\boldsymbol{x}^0(N-1)\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{x}^0\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{x}^0(N)\|_2$. $\boldsymbol{x}^0(N)$ 为 $l(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}^0))$ 与 $Q(N)$ 的边界面的交点。

2）求正数 M_1，使 $\boldsymbol{x}^0$ 位于 $Q(N,M_1)$ 的边界上。

3）已知最小拍数 N，求 $\boldsymbol{x}^0$ 的最小拍最小范数控制综合序列.这可以根据定理 7 给出的方法求得。

参 考 文 献

[1] Zhao Keyou, Chen Zhaokuan, Cheng Zhaolin. Complete controllability for linear constant system with control constraint. Proceeding of ninth triennial world congress of IFAC. Oxford, England Pergamon Press, 1985, **13**: 1415-1419.

[2] Boltyanskii. V G. Optimal control of the discrete-time system. Moscow, Pubishing House "Science", 1973.

[3] Boltyanskii V G. The mathematical method of optimal control. Moscow, Publishing House "Science", 1966.

A SYNTHESIS METHOD OF THE MINIMUM STEP CONTROL SEQUENCE FOR THE TIME-INVARIANT DISCRETE LINEAR SYSTEM WITH THE RESTRICTION OF THE CONTROL AMPLITUDE

CHEN ZHAOKUAN
(*Mathematical Dept. of Shandong Univ. Jinan* 250100)

CHEN HUI
(*Mechanical Dept. of Beijing Univ. Beijing* 100871)

ABSTRACT

The problem of the minimum step control for the time-invariant discrete linear system with the restriction of control amplitude is quite different from the time-optimal control for the continuous linear system. This is because the first problem have the properties of ununiqueness and non-bang-bang. In this paper, first of all, the method of the support hyperplane of the convex set is used to study the structural character of the controllable region and its boundary. Then a computing method which can achieve the minimum step control synthesis sequence with minimum amplitude is given. This method has a smaller amount of calculation and it is valuable in practical applications.

Key words: The restriction of control amplitude, time-invariant discrete linear system, the minimum step control sequence.

陈兆宽　照片、简介见本刊第 18 卷第 2 期.

陈　辉　1967 年 12 月出生于山东省济南市. 1989 年获山东大学控制科学专业学士学位，1992 年获山东大学运筹学与控制论硕士学位. 现在北京大学力学系一般力学专业攻读博士学位，从事线性与非线性系统的鲁棒稳定性的研究.