第21卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 5
1995 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1995

时变广义系统线性二次最优控制[1)]

阎九喜
（山东建筑工程学院 济南 250014）
程兆林
（山东大学数学系 济南 250100）

摘 要

研究时变广义系统线性二次最优控制问题. 通过引进时变广义系统脉冲能控性及脉冲能观性等概念，建立了这类问题与标准状态空间系统二次指标问题的等价性. 进而证明了解的存在唯一性，给出了解的表示和最优反馈综合.

关键词： 广义系统，最优控制，状态空间系统，等价变换.

1 引言

广义系统是一种微分-代数系统，这种多层次结构特征使其具有广泛的实际背景. 七十年代以来，广义系统理论取得了明显进展[1,2]. 这类系统在时不变情况下的研究已有许多成功的工作，其最优控制问题，特别是二次指标问题曾由许多作者加以深入地研究[3-6]. 然而对于时变问题的研究尚少. 本文讨论时变广义系统二次指标最优控制问题，引进并刻划了时变广义系统脉冲能控性以及脉冲能观性等重要概念，严格证明了这类问题与标准状态空间系统二次指标问题的等价性. 基于这种等价关系导出了解的存在唯一性及其明确表示，并且分析了最优反馈控制系统的结构特性.

2 问题及其等价变换

考虑时变广义系统Σ的最优控制问题 P

$$\Sigma\begin{cases} E(t)\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u}, \quad E(\alpha)\boldsymbol{x}(\alpha) = \boldsymbol{h}, & (1)\\ \boldsymbol{y} = C(t)\boldsymbol{x}. & (2)\end{cases}$$

指标泛函定义为

$$J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'(\beta)E'(\beta)SE(\beta)\boldsymbol{x}(\beta) + \int_{\alpha}^{\beta}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}'R(t)\boldsymbol{u})\mathrm{d}t, \tag{3}$$

---

1) 国家自然科学基金及山东省自然科学基金资助项目. 本文曾在 1991 年全国控制理论与应用年会(威海)上宣读.
本文于 1992 年 10 月 21 日收到

其中 $\boldsymbol{h}\in \mathrm{range}\, E(\alpha)$ 给定；$S\geqslant 0$ 为常阵，$R(t)>0$ 为连续矩阵；$\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 为广义状态向量，$\boldsymbol{u}(t)\in R^r$ 为控制向量，$\boldsymbol{y}(t)\in R^m$ 为输出向量；$A(t),B(t),C(t)$ 为连续矩阵且具适当维数；$E(t)$ 为连续可微方阵，特别是 $E(t)$ 奇异且具常秩，即

$$\mathrm{rank}\, E(t)\equiv q,\ 0<q<n,\ t\in[\alpha,\beta]. \tag{4}$$

约定 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变化，撇号表矩阵转置。

注 1. 本文不假定系统(1)具 Campbell 意义下之可解性[7]. 在时不变情形下这相当于移去了有关广义系统正则性的重要假设[1,7].

显然，问题 P 的允许控制 $\boldsymbol{u}(t)$ 应使方程 (1) 的解存在，但是注 1 指出它一般不能唯一确定系统(1)的轨线 $\boldsymbol{x}(t)$. 因此指标(3) 的优化实质上是在问题 P 的允许控制-轨线对的集 $(\mathscr{U},\mathscr{X})$ 上进行,

$$(\mathscr{U},\mathscr{X})=\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\,|\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\ \text{满足(1)},\ J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})<\infty\}, \tag{5}$$

而不是仅在 P 的允许控制集上进行. 问题 P 的解则指最优控制-轨线对 $(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{x}^*)\in(\mathscr{U},\mathscr{X})$，使得

$$J(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{x}^*)=\min_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\in(\mathscr{U},\mathscr{X})}J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}), \tag{6}$$

相应的最优控制系统应指控制和轨线分别为 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 和 $\boldsymbol{x}^*(t)$，因而能使指标 (3) 达到极小的系统，而不是泛指控制为 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 的系统.

注意到(4)式，由 Dolezal 定理[8]可知存在非奇异矩阵 $M(t)$, $N(t)\in R^{n\times n}$, $M(t)$ 连续，$N(t)$ 连续可微，使得

$$M(t)E(t)N(t)=\begin{bmatrix} I_q & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{7}$$

定义 1. 设 $M(t)$, $N(t)$ 如 (7) 式所示，则

$$\begin{bmatrix} M(t) & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} E(t) & A(t)-E(t)\dot N(t)N^{-1}(t) & B(t)\\ 0 & C(t) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} N(t) & 0 & 0\\ 0 & N(t) & 0\\ 0 & 0 & I_r\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} I_q & 0 & A_{11}(t) & A_{12}(t) & B_1(t)\\ 0 & 0 & A_{21}(t) & A_{22}(t) & B_2(t)\\ 0 & 0 & C_1(t) & C_2(t) & 0\end{bmatrix}, \tag{8}$$

称为系统 Σ 的正规变换，或 N 变换；矩阵对 $(M(t),\ N(t))$ 称为 Σ 的 N 变换对，式中 $A_{11}(t)\in R^{q\times q}$, $A_{22}(t)\in R^{(n-q)\times(n-q)}$, $B_1(t)\in R^{q\times r}$, 其余矩阵具适当维数.

事实上，(8) 式表示系统 Σ 的一类特定满秩坐标变换与满秩行变换.

引理 1. 设 $(M_i(t),\ N_i(t))$, $i=1,2$, 同为系统 Σ 的 N 变换对，则

$$M_2(t)=\begin{bmatrix} M_{11}(t) & *\\ 0 & *\end{bmatrix}M_1(t),\ N_2(t)=N_1(t)\begin{bmatrix} M_{11}^{-1}(t) & 0\\ * & *\end{bmatrix}, \tag{9}$$

式中 $M_{11}(t)\in R^{q\times q}$.

证明. 由 (7) 式可得.

引理 2. 式 (8) 中矩阵 $[A_{22}(t)\ \ B_2(t)]$ 及 $[A_{22}'(t)\ \ C_2'(t)]'$ 的秩仅与 $E(t)$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 有关，而与 N 变换对的选择无关.

证明. 由引理 1 可得.

定义 2. 称系统 Σ 在 $[\alpha,\beta]$ 上脉冲能控，如果 (8) 式中矩阵 $[A_{22}(t)\ \ B_2(t)]$ 满行秩.

定义 3. 称系统 Σ 在 $[\alpha,\beta]$ 上脉冲能观，如果 (8) 式中矩阵 $[A'_{22}(t)\ \ C'_2(t)]'$ 满列秩.

注 2. 上述时变广义系统脉冲能控及脉冲能观等概念系直接沿用时不变情形的相应术语. 引理 2 表明这些概念为系统 Σ 本身特性之表征，而与 N 变换对的选择无关.

引理 3. 如果系统 Σ 在 $[\alpha,\beta]$ 上脉冲能控，则 $(\mathscr{U},\mathscr{X})$ 非空.

引理 4. 如果系统 Σ 在 $[\alpha,\beta]$ 上脉冲能观，则任一 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\in(\mathscr{U},\mathscr{X})$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上平方可积.

引理 5. 系统 Σ 在 $[\alpha,\beta]$ 上脉冲能控的充要条件为存在连续矩阵 $K(t)\in R^{r\times n}$ 以及 Σ 的 N 变换对 $(M(t),N(t))$，使得

$$M(t)[E(t)\ \ A(t)+B(t)K(t)-E(t)\dot{N}(t)N^{-1}(t)\ \ B(t)]\begin{bmatrix}N(t) & 0 & 0\\ 0 & N(t) & 0\\ 0 & 0 & I_r\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}I_q & 0 & A_1(t) & 0 & B_1(t)\\ 0 & 0 & A_2(t) & I_{n-q} & B_2(t)\end{bmatrix},\tag{10}$$

式中 $A_1(t)\in R^{q\times q}$, $B_1(t)\in R^{q\times r}$.

引理 6. 系统 Σ 在 $[\alpha,\beta]$ 上脉冲能控且脉冲能观的充要条件为

1) 存在连续矩阵 $K(t)\in R^{r\times n}$ 以及系统 Σ 的 N 变换对 $(M(t),N(t))$ 使得 (10) 成立;

2) 对任一在 $[\alpha,\beta]$ 上对称正定矩阵 $R(t)\in R^{r\times r}$，下述对称矩阵:

$$\begin{aligned}R_1(t)\triangleq&[0\ \ B'_2(t)]N'(t)C'(t)C(t)N(t)[0\ \ B'_2(t)]'\\&+(I_r-K(t)N(t)[0\ \ B'_2(t)]')'R(t)(I_r-K(t)N(t)[0\ \ B'_2(t)]')\end{aligned}\tag{11}$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上正定，式中 $K(t),N(t),B_2(t)$ 如 (10) 式所示.

引理 3—引理 6 的证明见附录.

注 3. 广义系统的解一般含有脉冲成份，即含有 Dirac δ-函数及其某些高阶导数. 引理 4 表明只要系统 Σ 在 $[\alpha,\beta]$ 上脉冲能观，这种情况就不会出现. 这启发我们考虑用初等方法在经典函数空间上实现问题 P 的求解.

定义 4. 称两个最优控制问题是等价的，如果它们的允许控制-轨线对的集之间存在某一双射，并且象与原象的指标值对应相等. 该双射则称为这两问题间的等价变换.

注 4. 显然，定义 4 所述两最优控制问题的等价关系具反身性，对称性和传递性. 并且，它保证两等价最优控制问题的解有相同的存在唯一性和相同的最优指标值. 因而其中一个问题的求解可归为另一问题的求解.

定理 1. 设系统 Σ 在 $[\alpha,\beta]$ 上脉冲能控且脉冲能观，则问题 P 等价于一 q 阶标准状态空间系统二次指标问题.

证明. 基于引理 6 引入下述线性二次最优控制 (LQ) 问题 P_1: 动态系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1=A_1(t)\boldsymbol{x}_1+B_1(t)\boldsymbol{u}_1,\quad \boldsymbol{x}_1(\alpha)=[I_q\ \ 0]M(\alpha)\boldsymbol{h},\tag{12}$$

二次指标为

$$J_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{x}_1'(\beta)S_1\boldsymbol{x}_1(\beta) + \int_\alpha^\beta [\boldsymbol{x}_1' \ \boldsymbol{u}_1']W(t)[\boldsymbol{x}_1' \ \boldsymbol{u}_1']'\mathrm{d}t, \tag{13}$$

式中

$$S_1 = [I_q \ 0](M^{-1}(\beta))'SM^{-1}(\beta)[I_q \ 0]', \tag{14}$$

$$W(t) = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -A_2(t) & -B_2(t) \\ 0 & I_r \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} N(t) & 0 \\ K(t)N(t) & I_r \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} C'(t)C(t) & 0 \\ 0 & R(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N(t) & 0 \\ K(t)N(t) & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -A_2(t) & -B_2(t) \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} W_1(t) & W_2(t) \\ W_2'(t) & R_1(t) \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$\boldsymbol{h}$, S, $C(t)$, $R(t)$ 如(1)—(3)式所示，$A_i(t)$, $B_i(t)$, $i=1,2$, $K(t)$, $M(t)$, $N(t)$ 如(10)式所示，$R_1(t)$ 如(11)式所示，$\boldsymbol{x}_1 \in R^q$, $\boldsymbol{u}_1 \in R^r$. 因 $R_1(t) > 0$，故 P_1 为非奇异 LQ 问题. 记问题 P_1 的允许控制-轨线对的集为 $(\mathscr{U}_1, \mathscr{X}_1)$，即

$$(\mathscr{U}_1, \mathscr{X}_1) \triangleq \{(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}_1) | (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}_1) \text{ 满足 (12) 式}, \ J_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}_1) < \infty\}, \tag{16}$$

显然，$(\mathscr{U}_1, \mathscr{X}_1)$ 非空，并且任一 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}_1) \in (\mathscr{U}_1, \mathscr{X}_1)$ 都在 $[\alpha, \beta]$ 上平方可积. 考虑线性变换

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(t) & 0 \\ K(t)N(t) & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -A_2(t) & -B_2(t) \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{u}_1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

由引理 3—6 并注意到(17)式中变换矩阵满列秩可知(17)式实现 $(\mathscr{U}_1, \mathscr{X}_1)$ 到 $(\mathscr{U}, \mathscr{X})$ 上的双射. 又由式(13)—(15)知，象与原象的指标值对应相等. 由定义 4，P 与 P_1 等价.

3 问题的解

定理 1 已将问题 P 的求解归结为问题 P_1 的求解，而 P_1 是一标准 LQ 问题，因此问题 P 可彻底解决.

定理 2. 设系统 $\sum$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上脉冲能控且脉冲能观，则

1) 问题 P 的最优控制-轨线对存在唯一；

2) 最优控制能综合成状态的线性反馈；

3) 最优闭环的轨线唯一确定，轨线的动态部分与静态部分可分离.

证明. 据定理 1，问题 P 与 P_1 等价. 显然 P_1 的最优控制-轨线对存在唯一，故问题 P 亦然，即定理 2 的 1) 成立. 下面考虑解的表示及最优控制的综合. 由线性最优控制经典理论[9]及等价变换(17)得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^*(t) \\ \boldsymbol{u}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(t) & 0 \\ K(t)N(t) & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -A_2(t) & -B_2(t) \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q \\ -R_1^{-1}(t)(B_1'(t)T(t) + W_2'(t)) \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}_1^*(t), \tag{18}$$

$$x_1^*(t) = [I_q 0]\Omega(t,\beta)[I_q \ S_1]'([I_q \ 0]\Omega(\alpha,\beta)[I_q \ S_1]')^{-1}[I_q \ 0]M(\alpha)\boldsymbol{h}, \tag{19}$$

$$T(t) = [0 \ I_q]\Omega(t,\beta)[I_q \ S_1]'([I_q \ 0]\Omega(t,\beta)[I_q \ S_1]')^{-1}. \tag{20}$$

$\Omega(t,\beta) \in R^{2q\times 2q}$ 满足

$$\dot{\Omega}(t,\beta) = \begin{bmatrix} F_1(t) & -B_1(t)R_1^{-1}(t)B_1'(t) \\ -Q_1(t) & -F_1'(t) \end{bmatrix} \Omega(t,\beta), \ \Omega(\beta,\beta) = I_{2q}, \tag{21}$$

$$F_1(t) = A_1(t) - B_1(t)R_1^{-1}(t)W_2'(t), \tag{22}$$

$$Q_1(t) = W_1(t) - W_2(t)R_1^{-1}(t)W_2'(t). \tag{23}$$

问题 P 的最优指标值为

$$J(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{h}'M'(\alpha)[I_q \ 0]'T(\alpha)[I_q \ 0]M(\alpha)\boldsymbol{h}. \tag{24}$$

不难看出 $(\boldsymbol{u}^*(t),\ \boldsymbol{x}^*(t))$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上足够光滑，而不仅是平方可积，这在应用上当是重要的．此外，由(7),(10),(18)可知 P 的最优控制可综合为

$$\boldsymbol{u}^* = K^*(t)\boldsymbol{x}, \tag{25}$$

反馈矩阵

$$K^*(t) = K(t) - R_1^{-1}(t)(B_1'(t)T(t) + W_2'(t))[I_q \ 0]M(t)E(t), \tag{26}$$

即定理 2 的 2) 成立．下面分析最优闭环的性质．将 (25)—(26) 式代入 (1) 式得最优闭环

$$E(t)\dot{\boldsymbol{x}} = (A(t) + B(t)K^*(t))\boldsymbol{x}, \ E(\alpha)\boldsymbol{x}(\alpha) = \boldsymbol{h}, \tag{27}$$

有

$$\begin{aligned} & M(t)[E(t) \ \ A(t) + B(t)K^*(t) - E(t)\dot{N}(t)N^{-1}(t)]\begin{bmatrix} N(t) & 0 \\ 0 & N(t) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} I_q & 0 & A_1(t) - B_1(t)R_1^{-1}(t)(B_1'(t)T(t) + W_2'(t)) & 0 \\ 0 & 0 & A_2(t) - B_2(t)R_1^{-1}(t)(B_1'(t)T(t) + W_2'(t)) & I_{n-q} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{28}$$

式中 $A_i(t),\ B_i(t),\ i = 1,2, M(t),\ N(t)$ 如 (10) 式所示．这蕴涵定理 2 的 3)成立．定理证毕．

4 结论

1) 本文用最优控制问题等价变换的方法研究时变广义系统线性二次最优控制问题．所提出的时变广义系统脉冲能控且脉冲能观的假设从根本上保证了等价性定理 1 的成立．

2) 不假定时变广义系统具 Campbell 意义下之可解性，在时不变情形下即不要求系统为正则．事实上，非正则广义系统有深刻的实际背景，例如宏观经济系统消费跟踪问题等[10]．

参 考 文 献

[1] Campbell S L. Singular Systems of Differential Equations II, Pitman Publ., San Francisco, 1982.

[2] Lewis F L. A survey of linear singular systems, Circuits, Systems. Signal Proc., 1986, 5: 3—36.

[3] Cobb D. Descriptor variable systems and optimal state regulation. *IEEE Trans. Auto. Control*, 1983, **AC-28**: 601—611.

[4] Bender D J and Laub A J. The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems, *IEEE Trans. Auto. Control*, 1987, **AC-32**: 672—688.

[5] Cheng Z, Hong H and Zhang J. The optimal regulation of generalized state-space systems with quadratic cost. *Automatica*, 1988, 24: 707—710.

[6] Cheng Z, Yan J and Meng Z. The linear-quadratic optimal requlator of descriptor systems with terminal state constrained, Proceedings of the 11th IFAC World Congress, Pergamon Press, Oxford, UK, 1991, **1**: 265—270.

[7] Campbell S L. A general form for solvable linear time varying singular systems of differential equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 1987, 18: 1101—1115.

[8] Weiss L and Falb P L. Dolezal's theorem, linear algebra with continuously parameterized elements and time-varying systems. *Math. Syst. Theory*. 1969, **3**: 67—75.

[9] Anderson B D O and Moore J B. Linear Optimal Control, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1971.

[10] 阎九喜，程兆林，广义系统经济跟踪问题，第一届全球华人智能控制与智能自动化大会论文集，科学出版社，1993,1405—1410.

附 录 A

1）引理3证明.

设(8)式中 $[A_{22}(t)\ B_2(t)]$ 满行秩. 令

$$L(t) = [A_{22}(t)\ B_2(t)]'([A_{22}(t)\ B_2(t)][A_{22}(t)\ B_2(t)]')^{-1}, \tag{A1}$$

$$[x_2'(t)\ u'(t)]' = -L(t)A_{21}(t)x_1(t), \tag{A2}$$

$$x(t) = N(t)[x_1'(t)\ x_2'(t)]', \tag{A3}$$

$x_1(t)$ 满足

$$\dot{x}_1 = (A_{11}(t) - [A_{12}(t)\ B_1(t)]L(t)A_{21}(t))x_1,\ x_1(\alpha) = [I_q\ 0]M(\alpha)h \tag{A4}$$

则 $(u(t),\ x(t)) \in (\mathscr{U},\ \mathscr{X})$.

2）引理4证明.

显然 $u(t)$, $y(t)$ 均在 $[\alpha,\beta]$ 上平方可积. 设(8)式中 $[A_{22}'(t)\ C_2'(t)]'$ 满列秩. 令

$$G(t) = ([A_{22}'(t)\ C_2'(t)][A_{22}'(t)\ C_2'(t)]')^{-1}[A_{22}'(t)\ C_2'(t)], \tag{A5}$$

$$G_1(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)G(t)[A_{21}'(t)\ C_1'(t)]', \tag{A6}$$

$$G_2(t) = A_{12}(t)G(t)\begin{bmatrix} 0 & -B_2(t) \\ I_m & 0 \end{bmatrix} + [0\ B_1(t)], \tag{A7}$$

$$x(t) = N(t)[\zeta_1'(t)\ \zeta_2'(t)]', \tag{A8}$$

$\zeta_1(t) \in R^q$. 则 $\zeta_i(t)$, $i = 1,2$, 满足

$$\dot{\zeta}_1(t) = G_1(t)\zeta_1(t) + G_2(t)[y'(t)\ u'(t)]',\ \zeta_1(\alpha) = [I_q\ 0]M(\alpha)h, \tag{A9}$$

$$\zeta_2(t) = -G(t)[A_{21}'(t)\ C_1'(t)]'\zeta_1(t) + G(t)\begin{bmatrix} 0 & -B_2(t) \\ I_m & 0 \end{bmatrix}[y'(t)\ u'(t)]', \tag{A10}$$

易知 $\zeta_i(t)$, $i = 1,2$, 均在 $[\alpha,\beta]$ 上平方可积. 从而, $x(t)$, $(u(t),\ x(t))$ 亦然.

3）引理5证明.

充分性. 由(8),(10)式可得

$$A_{22}(t) + B_2(t)K(t)N(t)[0\ I_{n-q}]' = I_{n-q}, \tag{A11}$$

故有

$$\mathrm{rank}[A_{22}(t)\ B_2(t)] = n - q, \tag{A12}$$

即系统 Σ 在 $[\alpha,\beta]$ 上脉冲能控.

必要性．设 $(M_1(t),\ N_1(t))$ 为系统 Σ 的 N 变换对，且有

$$M_1(t)[E(t)\ \ A(t)-E(t)\dot{N}_1(t)N_1^{-1}(t)\ \ B(t)]\begin{bmatrix} N_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(t) & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} I_q & 0 & H_1(t) & H_2(t) & D_1(t) \\ 0 & 0 & H_3(t) & H_4(t) & D_2(t) \end{bmatrix}, \tag{A13}$$

式中 $H_1(t)\in R^{q\times q}$，$D_1(t)\in R^{q\times r}$，$[H_4(t)\ \ D_2(t)]$ 满行秩．易知存在连续矩阵 $H(t)\in R^{r\times(n-q)}$，使得 $H_4(t)+D_2(t)H(t)$ 非奇异．令

$$K(t)=[0\ \ H(t)]N_1^{-1}(t), \tag{A14}$$

$$M(t)=\begin{bmatrix} I_q & -(H_2(t)+D_1(t)H(t))(H_4(t)+D_2(t)H(t))^{-1} \\ 0 & (H_4(t)+D_2(t)H(t))^{-1} \end{bmatrix}M_1(t), \tag{A15}$$

$$N(t)=N_1(t), \tag{A16}$$

则 $(M(t),\ N(t))$ 为系统 Σ 的 N 变换对且(10)式成立，式中

$$A_1(t)=H_1(t)-(H_2(t)+D_1(t)H(t))(H_4(t)+D_2(t)H(t))^{-1}H_3(t), \tag{A17}$$

$$A_2(t)=(H_4(t)+D_2(t)H(t))^{-1}H_3(t). \tag{A18}$$

$B_1(t)$，$B_2(t)$ 也可类似表出．

4）引理 6 证明．

充分性．只需证系统 Σ 在 $[\alpha,\beta]$ 上脉冲能观．用反证法．若不然，存在 $t_1\in[\alpha,\beta]$ 以及 $\xi\in R^{n-q}$，$\xi\neq 0$，使得

$$\xi'[A_{22}'(t_1)\ \ C_2'(t_1)]=0. \tag{A19}$$

令

$$\eta=K(t_1)N(t_1)[0\ \ \xi']' \tag{A20}$$

由 (A11)，(A19)，(A20) 得

$$\xi=B_2(t_1)\eta, \tag{A21}$$

且 $\eta\neq 0$．于是有

$$\begin{bmatrix} C_2(t_1)B_2(t_1) \\ I_r-K(t_1)N(t_1)[0\ \ B_2'(t_1)]' \end{bmatrix}\eta=0, \tag{A22}$$

代入(11)式得　$\eta'R_1(t_1)\eta=0$，与 $R_1(t)>0$ 矛盾．充分性得证．

必要性．只需证 $R_1(t)>0$．用反证法．若不然，存在 $t_2\in[\alpha,\beta]$ 以及 $\eta_1\in R^r$，$\eta_1\neq 0$，使得

$$\eta_1'R_1(t_2)\eta_1=0. \tag{A23}$$

注意到 $R(t)>0$，故

$$\begin{bmatrix} C(t_2)N(t_2)[0\ \ B_2'(t_2)]' \\ I_r-K(t_2)N(t_2)[0\ \ B_2'(t_2)]' \end{bmatrix}\eta_1=0. \tag{A24}$$

令

$$\xi_1=B_2(t_2)\eta_1, \tag{A25}$$

显然 $\xi_1\neq 0$．由 (A11)，(A24)，(A25) 得

$$\xi_1'[A_{22}'(t_2)\ \ C_2'(t_2)]=0, \tag{A26}$$

与系统 Σ 的脉冲能观性矛盾．证毕．

THE LINEAR-QUADRATIC OPTIMAL CONTROL OF TIME-VARYING DESCRIPTOR SYSTEMS

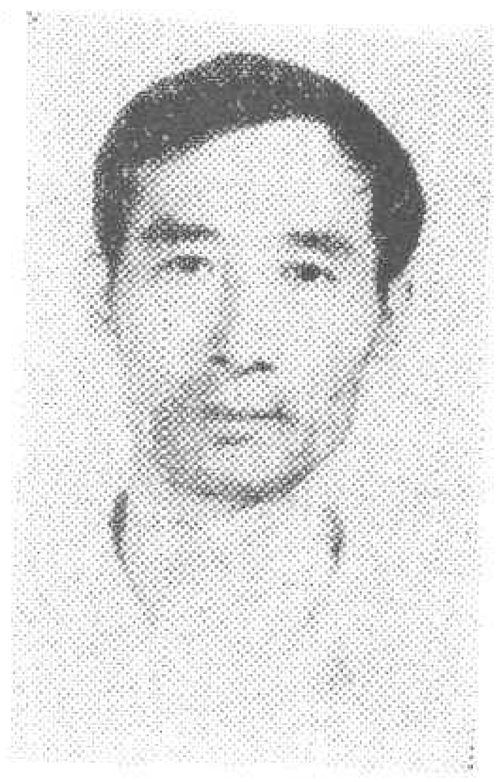
YAN JIUXI
(*Shandong Architectural and Civil Engineering Inst. Jinan* 250014)

CHENG ZHAOLIN
(*Dept. of Mathematics, Shandong Univ. Jinan* 250100)

ABSTRACT

In this paper, the optimal control problem of linear time-varying systems with quadratic cost is discussed. The equivalent relationship between this problem and that of standard state-space systems is established by introducing the concepts of impulse-controllability and impulse-observability of time-varying systems. Furthermore, the existence and uniqueness of the solution of this problem are proved, an expression of the solution and a feed-back synthesis of the optimal control are given.

Key words: Descriptor systems, optimal control, state-space systems, equivalent transformation.



阎九喜 1968 年毕业于山东大学数学系，曾从事航空电器产品研制、自动机床工艺技术等工作. 1979 年调入山东建筑工程学院任教，现为副教授. 感兴趣的领域为控制理论、应用数学、经济控制论等，目前研究课题为广义系统、最优控制及其在宏观经济控制中的应用.

程兆林 1939 年生于浙江省宁波市，1963 年毕业于复旦大学数学系，1963 年至今在山东大学数学系任教，现为山东大学数学系教授，美国《数学评论》评论员. 目前感兴趣的领域为多变量控制系统、奇异系统、最优控制理论及其应用. 曾发表论文 40 余篇.