第21卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 5
1995年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1995

# 一类具有相似结构的组合系统的结构可控性与渐近合作性[1)]

杨光红 张嗣瀛
(东北大学自动控制系 沈阳 110006)

**摘 要**

研究一类由若干个具有相似结构的子系统和一个外部系统所组成的组合系统，并证明在适当的内联条件下，这类系统的结构可控性和渐近合作性等定性性质可由其修正的低阶子系统和解耦系统的相应性质所决定.

**关键词**: 组合系统,相似结构,结构可控性,渐近合作性.

## 1 引言

许多实际的工程系统(如电力系统、机器人系统、计算机网络等)都有一个基本的结构特征,即其子系统及内联块常常具有相似的结构,具体实例参见文献[1—3]. 本文给出这类系统的数学描述,研究其结构可控性和各子系统之间的渐近合作性,并且给出容易检验的充要条件.

## 2 系统的描述

设 $\overline{M}$ 表示与矩阵$M$对应的结构矩阵. $r(\overline{M})$ 表示矩阵 $\overline{M}$ 的生成秩. $\widetilde{M}\triangleq\{M':M'$ 与 $M$是结构等价的$\}$. $\overline{M}_1+\overline{M}_2$ 表示同尺寸的结构矩阵 $\overline{M}_1$ 与 $\overline{M}_2$之和, 定义为: 在 $M_1$ 或 $M_2$ 非零元素的位置上, $\overline{M}_1+\overline{M}_2$ 的元素是任意的;在其它的位置上, $\overline{M}_1+\overline{M}_2$ 的元素是零. 关于结构矩阵、结构系统和结构可控性等相关的概念参见文献[4].

考虑由$N$个子系统 $\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_N(N>1)$ 和一个外部系统 $\Sigma_0$ 所组成的系统 $\Sigma$, 其状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0(t)=A_0\boldsymbol{x}_0(t)+\sum_{j=1}^{N}L_j\boldsymbol{x}_j(t)+B_0\boldsymbol{u}_0(t), \tag{2.1a}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=A_i\boldsymbol{x}_i(t)+M_i\boldsymbol{x}_0(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}e_{ij}H_{ij}\boldsymbol{x}_j(t)+B_i\boldsymbol{u}_i(t),\ i=1,\cdots,N \tag{2.1b}$$

---

1) 国家自然科学基金资助项目.

本文于1993年5月27日收到

这里 $\boldsymbol{x}_0(t)\in R^{n_0}$ 和 $\boldsymbol{u}_0(t)\in R^{r_0}$ 分别是系统 $\Sigma_0$ 的状态和输入，$\boldsymbol{x}_i(t)\in R^n$ 和 $\boldsymbol{u}_i(t)\in R^r$ 分别是系统 $\Sigma_i(i=1,\cdots,N)$ 的状态和输入。$A_i\in\bar{A}_1$，$B_i\in\widetilde{B}_1$，$L_i\in\widetilde{L}_0$ 及 $\widetilde{M}_i\in\widetilde{M}_0(i=1,\cdots,N)$，$H_{ij}\in\widetilde{H}_1(i,j=1,\cdots,N;i\neq j)$，
其中 $A_1,B_1,L_0,M_0$ 和 $H_1$ 都是给定的常数矩阵。

$$e_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果 } \Sigma_j \text{ 对 } \Sigma_i \text{ 有作用},\\ 0, & \text{如果 } \Sigma_j \text{ 对 } \Sigma_i \text{ 没有作用}, (i,j=1,\cdots,N;\ i\neq j).\end{cases}$$

系统 (2.1) 可以结构等价地由下面的组合方程描述:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t), \tag{2.2}$$

这里 $\boldsymbol{x}(t)=[\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}(t)\ \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(t)\cdots\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{u}(t)=[\boldsymbol{u}_0^{\mathrm{T}}(t)\ \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}(t)\cdots\boldsymbol{u}_N^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$，且组合矩阵 $A\in R^{(n_0+Nn)\times(n_0+Nn)}$ 和 $B\in R^{(n_0+Nn)\times(r_0+Nr)}$ 有下面的结构:

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}\bar{A}_0 & \bar{L}_0 & \bar{L}_0 & \cdots\bar{L}_0\\ \bar{M}_0 & \bar{A}_1 & e_{12}\bar{H}_1 & \cdots e_{1N}\bar{H}_1\\ \bar{M}_0 & e_{21}\bar{H}_1 & \bar{A}_1 & \cdots e_{2N}\bar{H}_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \bar{M}_0 & e_{N1}\bar{H}_1 & e_{N2}\bar{H}_1 & \cdots\bar{A}_1\end{bmatrix}, \tag{2.3a}$$

$$\bar{B}=\text{block-diag}[\bar{B}_0\bar{B}_1\cdots\bar{B}_1], \tag{2.3b}$$

称由方程(2.1)或(2.2)描述的系统 $\Sigma$ 为具有相似结构的组合系统。如果 $e_{ij}=1$ $(i,j=1,\cdots,N;\ i\neq j)$，则称系统 $\Sigma$ 是对称内联的。必须指出，由方程(2.1)或(2.2)所描述的状态模型适用于多种实际系统[1-3]。

# 3　系统 $\Sigma$ 的结构可控性与渐近合作性

对于由方程 (2.1) 或 (2.2) 所描述的系统 $\Sigma$，对应的解耦系统 $\Sigma_d(N)=(\bar{A}_d,\bar{B}_d)$ 和修正的低阶子系统 $\Sigma_s=(\bar{A}_s,\bar{B}_s)$ 定义为

$$\bar{A}_d=\begin{bmatrix}\bar{A}_0 & \bar{L}_0 & \bar{L}_0 & \cdots\bar{L}_0\\ \bar{M}_0 & \bar{A}_1+\bar{H}_1 & 0 & \cdots 0\\ \bar{M}_0 & 0 & \bar{A}_1+\bar{H}_1 & \cdots 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \bar{M}_0 & 0 & 0 & \cdots\bar{A}_1+\bar{H}_1\end{bmatrix},\quad \bar{B}_d=\bar{B}, \tag{3.1}$$

$$\bar{A}_s=\begin{bmatrix}\bar{A}_0 & \bar{L}_0\\ \bar{M}_0 & \bar{A}_1+\bar{H}_1\end{bmatrix},\quad \bar{B}_s=\text{block-diag}[\bar{B}_0\ \bar{B}_1]. \tag{3.2}$$

关于输入可联结的概念参见文献[5]。

**定理 3.1.** 系统 $\Sigma$ 是结构可控的必要条件为下列两个条件都成立:

3.1.1) 系统 $\Sigma_d(N)$ 是结构可控的;

3.1.2) 系统 $\Sigma_s$ 是输入可联结的，且

$$r([\bar{A}_d\ \bar{B}])=n_0+Nn.$$

容易看出，定理 3.1 中条件的充分性一般是不成立的。为此，考虑系统 $\Sigma$ 的图 $G_T=$

$(V_T, E_T)$，这里顶点集 $V_T=\{v_i: v_i=\Sigma_i,\ i=1,\cdots,N\}$，边的集 $E_T$ 定义为：$(v_i, v_j)\in E_T(i\neq j)\Longleftrightarrow e_{ij}=1$. 关于组合系统的图的相关概念参见文献 [6]. 称系统 $\Sigma$ 满足内联条件 $I$，是指在 $G_T$ 中存在互不相交的圈 $G_k=(V_k, E_k)(k=1,\cdots,t)$ 使得 $V_T\subset\bigcup_{k=1}^{t}V_k$.

**定理 3.2.** 如果系统 $\Sigma$ 满足内联条件 $I$，那末系统 $\Sigma$ 是结构可控的充要条件为定理 3.1 中的两个条件之一成立.

注 1. 由于关于系统 $\Sigma$ 的内联条件 $I$ 比对称内联条件弱得多，所以定理 3.2 的结论对于满足对称内联条件的系统 $\Sigma$ 也是成立的. 此外，在定理 3.2 中，如果用“强支”代替内联条件 $I$ 中的“圈”，那末定理 3.2 的充分性是不成立的. 例如，在系统 $\Sigma$ 中，令 $n_0=0$，$N=3$，$\bar{A}_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\bar{H}_1=\begin{bmatrix}*&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\bar{B}_1=\begin{bmatrix}*\\ *\end{bmatrix}$，$\bar{A}=\begin{bmatrix}\bar{A}_1&\bar{H}_1&0\\ \bar{H}_1&\bar{A}_1&\bar{H}_1\\ 0&\bar{H}_1&\bar{A}_1\end{bmatrix}$，$\bar{B}=\text{block-diag}[\bar{B}_1\ \bar{B}_1\ \bar{B}_1]$，则系统 $\Sigma$ 的图是强联结的且 $(\bar{A}_1+\bar{H}_1, \bar{B}_1)$ 是结构可控的，组 $(\bar{A}, \bar{B})$ 是结构不可控的.

在一个组合系统中，子系统之间的关系一般可以表达为：合作与竞争. 有关这方面的一般性讨论参见文献 [7]. 下面考虑系统 $\Sigma$ 中子系统之间的合作关系，并假定由方程 (2.1) 所描述的系统 $\Sigma$ 是对称内联的.

**定义 3.1.** 称系统 $\Sigma$ 关于结构可控性具有渐近合作的结构，是指存在一个正整数 $\bar{N}$，使得对所有的 $N\geqslant\bar{N}$，系统 $\Sigma$ 都是结构可控的.

事实上，定义 3.1 描述了当子系统个数增加时，系统 $\Sigma$ 的结构性质的一种不变性. 由于系统 $\Sigma$ 的子系统结构以及它们之间内联矩阵的结构一般与子系统的个数是无关的，所以研究系统 $\Sigma$ 的这种结构性质是具有实际意义的. 下列结果给出了系统 $\Sigma$ 具有这种结构性质的特征.

**定理 3.3.** 系统 $\Sigma$ 关于结构可控性具有渐近合作结构的充要条件为下面两个条件都成立：

3.3.1) 存在一个正整数 $N$，使得系统 $\Sigma_d(N)$ 是结构可控的；

3.3.2) $r([\bar{A}_1+\bar{H}_1\quad \bar{B}_1])=n$.

注 2. 类似于定理 3.2，对于系统 $\Sigma$ 的一般内联情况可以导出相应的结果.

为了证明定理 3.1—定理 3.3，先做下列准备.

设 $\bar{A}_t\in R^{q\times m}$ 是一个结构矩阵. $\bar{A}_t$ 的一条线是指 $\bar{A}_t$ 的某一行或某一列. 设 $J$ 是 $\bar{A}_t$ 的一些线的集合，$n(J)$ 记 $J$ 中元素的个数，结构矩阵 $(\bar{A}_t)_J$ 定义为

$$(\bar{A}_t)_J\triangleq\bar{A}_t|_{\text{删除}J\text{中所有的线}}. \tag{3.3}$$

特别，对于满足 $1\leqslant k\leqslant m$ 的 $k$，用结构矩阵 $(\bar{A}_t)_k$ 记矩阵 $\bar{A}_t|_{\text{删除第}k\text{列}}$. 对于正整数 $k$，集合 $k+J$ 和 $P(J)$ 定义为

$$k+J\triangleq\{\text{第}\,k+q\,\text{列：第}\,q\,\text{列}\in J\}\cup\{\text{第}\,k+i\,\text{行：第}\,i\,\text{行}\in J\}, \tag{3.4}$$

$$P(J)\triangleq\{q:\ \text{第}\,q\,\text{列或第}\,q\,\text{行}\in J\}, \tag{3.5}$$

$\bar{A}_t$ 的独立元素集是指 $\bar{A}_t$ 的一些元素的集合，这些元素中的任何两个元素都不在同一条

线上. 设 $I(\bar{A}_t)$ 表示 $\bar{A}_t$ 的独立元素数目的最大值, $L(\bar{A}_t)$ 表示 $\bar{A}_t$ 中包含所有任意元素的线的数目的最小值,则有

**引理 3.1.**[8] 设 $\bar{A}_t \in R^{q\times m}$ 是一个结构矩阵, 则 $I(\bar{A}_t) = L(\bar{A}_t) = r(\bar{A}_t)$.

**引理 3.2.** 设 $\bar{A}_t \in R^{q\times m}$ 是一个结构矩阵, $J$ 是一个 $\bar{A}_t$ 的包含所有任意元素的线的集合,并且 $n(J) = r(\bar{A}_t)$. 如果 $J_0 \subset J$, 那末 $r((\bar{A}_t)_{J_0}) = r(\bar{A}_t) - n(J_0)$.

由引理 3.1 容易推出这个引理,证明从略.

对结构矩阵 $\bar{A}_t$, $\bar{H}_t \in R^{q\times m}$, 结构矩阵 $S(\bar{A}_t, \bar{H}_t, N) \in R^{Nq\times Nm}$ 和 $C(\bar{A}_t, \bar{H}_t, N) \in R^{Nq\times Nm}$ 分别定义如下:

$$S(\bar{A}_t,\bar{H}_t,N) = \begin{bmatrix} \bar{A}_t & \bar{H}_t \cdots \bar{H}_t \\ \bar{H}_t & \bar{A}_t \cdots \bar{H}_t \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ \bar{H}_t & \bar{H}_t \cdots \bar{A}_t \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

$$C(\bar{A}_t,\bar{H}_t,N) = \begin{bmatrix} \bar{A}_t & \bar{H}_t & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_t & \bar{H}_t \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots \bar{A}_t & \bar{H}_t \\ \bar{H}_t & 0 & 0 \cdots 0 & \bar{A}_t \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

**引理 3.3** 设结构矩阵 $\bar{A}_t, \bar{H}_t \in R^{q\times m}$, 则

3.3a) $r(S(\bar{A}_t,\bar{H}_t,N)) = r(C(\bar{A}_t,\bar{H}_t,N)) = Nr(\bar{A}_t + \bar{H}_t)$;

3.3b) $r((S(\bar{A}_t,\bar{H}_t,N))_{jm+k}) = r((C(\bar{A}_t,\bar{H}_t,N))_{jm+k})$
$= r((\bar{A}_t + \bar{H}_t)_k) + (N-1)r(\bar{A}_t + \bar{H}_t)$,

$k = 1,\cdots,m; j = 0,1,\cdots,N-1$.

证明. 设结构矩阵 $H_t^0$ 满足 $\bar{A}_t + \bar{H}_t = \bar{A}_t + H_t^0$, 并且 $H_t^0$ 的元素在 $\bar{A}_t$ 任意元素的位置上是零. 由引理 3.1 可知, 结构矩阵 $\bar{A}_t + H_t^0$ 含有 $d = r(\bar{A}_t + \bar{H}_t)$ 个独立元素. 设这些独立元素的位置是 $(i_k, j_k)(k=1,\cdots,d)$, 并且 $\bar{A}_t$ 和 $H_t^0$ 的元素分别在位置 $(i_k, j_k)(k = 1,\cdots,d_1)$ 及 $(i_{d_1+k}, j_{d_1+k})(k=1,\cdots,d-d_1)$ 上是任意的. 将矩阵 $A_{t1}, H_{t1} \in R^{q\times m}$ 定义为: $A_{t1}$ 和 $H_{t1}$ 的元素分别在位置 $(i_k, j_k)(k=1,\cdots,d_1)$ 和$(i_{d_1+k}, j_{d_1+k})(k=1,\cdots,d-d_1)$ 上是任意的;在其它位置上是零,则结构矩阵 $C(A_{t1},H_{t1},N)$ 含有 $Nd$ 个独立元素,从而

$$\begin{aligned} r(S(\bar{A}_t,\bar{H}_t,N)) &\geqslant r(C(\bar{A}_t,\bar{H}_t,N)) \geqslant r(C(A_{t1},H_{t1},N)) \\ &= Nd = Nr(\bar{A}_t + \bar{H}_t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

反之, 设 $J_0 = J_{0r} \cup J_{0c}$ 是一个 $\bar{A}_t + \bar{H}_t$ 的含有所有任意元素的线的集合, 并且 $n(J_0) = r(\bar{A}_t + \bar{H}_t)$, 这里 $J_{0r}$ 和 $J_{0c}$ 分别是 $J_0$ 中行和列的集合. 令 $J_r = J_{0r} \cup (q + J_{0r}) \cup \cdots \cup ((N-1)q + J_{0r})$ 及 $J_c = J_{0c} \cup (m + J_{0c}) \cup \cdots \cup ((N-1)m + J_{0c})$, 则容易看到, $J = J_r \cup J_c$ 是一个 $S(\bar{A}_t,\bar{H}_t,N)$ 的含有所有任意元素的线的集合. 据引理 3.1, 有

$$r(C(\bar{A}_t,\bar{H}_t,N)) \leqslant r(S(\bar{A}_t,\bar{H}_t,N)) \leqslant n(J) = Nr(\bar{A}_t + \bar{H}_t). \tag{3.9}$$

由(3.8),(3.9)式可知，3.3a)式成立。

同理可证 3.3b)式成立。　　证毕。

对给定的结构矩阵 $\bar{A}_t \in R^{q\times q}$，矩阵 $(\bar{A}_t)^* \in R^{q\times q}$ 定义为：$\bar{A}_t + \bar{I}_q$，这里 $I_q$ 为 $q\times q$ 单位矩阵。

**引理 3.4.**[5] 设 $\bar{A}_t \in R^{q\times q}$，$\bar{B}_t \in R^{q\times m}$，则

3.4a) 系统$(\bar{A}_t,\bar{B}_t)$是输入可联结的充要条件为 $r([((\bar{A}_t)^*)_k\bar{B}_t]) = q, k = 1,\cdots,q$.

3.4b) 系统 $(\bar{A}_t,\bar{B}_t)$ 是结构可控的充要条件为系统 $(\bar{A}_t,\bar{B}_t)$ 是输入可联结的，并且 $r([\bar{A}_t\ \bar{B}_t]) = q$.

考虑结构矩阵 $A(S)$，$A(C)\in R^{(n_0+Nn)\times(n_0+Nn)}$ 分别定义如下：

$$A(S)=\left[\begin{array}{c|c}\bar{A}_0 & \bar{L}_0\quad \bar{L}_0\cdots\bar{L}_0\\ \hline \bar{M}_0 & \\ \bar{M}_0 & S(\bar{A}_1,\bar{H}_1,N)\\ \vdots & \\ \bar{M}_0 & \end{array}\right], \tag{3.10}$$

$$A(C)=\left[\begin{array}{c|c}\bar{A}_0 & \bar{L}_0\quad \bar{L}_0\cdots\bar{L}_0\\ \hline \bar{M}_0 & \\ \bar{M}_0 & C(\bar{A}_1,\bar{H}_1,N)\\ \vdots & \\ \bar{M}_0 & \end{array}\right], \tag{3.11}$$

这里 $\bar{A}_0,\bar{L}_0,\bar{M}_0,\bar{A}_1$ 和 $\bar{H}_1$ 由(2.1)式给出。

**引理 3.5.** 设结构矩阵 $\bar{B}$，$\bar{A}_d$，$\bar{A}_s$ 和 $\bar{B}_s$ 分别由(2.3),(3.1),(3.2)式给出，则下列等式成立：

3.5a) $r([A(S)\bar{B}]) = r([A(C)\bar{B}]) = r([\bar{A}_d\bar{B}])$,

3.5b) $r([([A(S)]^*)_k\bar{B}]) = r([([A(C)]^*)_k\bar{B}])$
$= r([([\bar{A}_d]^*)_k\bar{B}]),\ k = 1,\cdots,n_0+Nn$,

3.5c) $r([([\bar{A}_d]^*)_k\bar{B}]) = r([([\bar{A}_s]^*)_k\bar{B}_s]) + (N-1)n,\ k = 1,\cdots,n_0$
$r([([\bar{A}_d]^*)_{n_0+jn+k}\bar{B}]) = r([([\bar{A}_s]^*)_{n_0+k}\bar{B}_s]) + (N-1)n$,
$k = 1,\cdots,n;\ j = 0,1,\cdots,N-1$.

证明. 设 $J(A(S)) = J_c\cup J_r$ 是一个 $[A(S)\bar{B}]$ 的含有所有任意元素的线的集合，且 $n(J(A(S))) = r([A(S)\bar{B}])$，这里 $J_c = J_{0c}\cup(n_0+J_{1c})\cup\cdots\cup(n_0+(N-1)n+J_{Nc})\cup(n_0+Nn+J_{ec})$ 和 $J_r = J_{0r}\cup(n_0+J_{1r})\cup\cdots\cup(n_0+(N-1)n+J_{Nr})$ 分别是 $J(A(S))$ 中行和列的集合，且 $P(J_{0c})$，$P(J_{0r})\subset\{1,\cdots,n_0\}$，$P(J_{ic})$，$P(J_{ir})\subset\{1,\cdots,n\}$ $(i=1,\cdots,N)$。令 $J_{Ic}=J_{1c}\cap J_{2c}\cap\cdots\cap J_{Nc}, J_{Ir} = J_{1r}\cap J_{2r}\cap\cdots\cap J_{Nr}$，$J_I = J_{Ic}\cup J_{Ir}$ 及 $J_u = J_{0c}\cup J_{0r}\cup(n_0+J_I)\cup\cdots\cup(n_0+(N-1)n+J_I)\cup(n_0+Nn+J_{ec})$.

则

$$(\bar{L}_0)_{J_{0r}\cup J_{Ic}} = 0, (\bar{M}_0)_{J_{0c}\cup J_{Ir}} = 0, (\bar{B})_{J(U)} = 0. \tag{3.12}$$

这里 $J(U) = J_{ec}\cup[J_{0r}\cup(n_0+J_{Ir})\cup\cdots\cup(n_0+(N-1)n+J_{Ir})]$。据引理 3.1,(3.12)

式,引理 3.3 和引理 3.2, 有

$$
\begin{aligned}
r([\bar{A}_d\bar{B}]) &\leqslant n(J_u) + r(([\bar{A}_d\bar{B}])_{J_u}) \\
&= n(J_u) + r\left(\begin{bmatrix} (\bar{A}_1+\bar{H}_1)_{J_I} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\bar{A}_1+\bar{H}_1)_{J_I} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\bar{A}_1+\bar{H}_1)_{J_I} \end{bmatrix}\right) \\
&= n(J_u) + r\left(\begin{bmatrix} (\bar{A}_1)_{J_I} & (\bar{H}_1)_{J_I} & \cdots & (\bar{H}_1)_{J_I} \\ (\bar{H}_1)_{J_I} & (\bar{A}_1)_{J_I} & \cdots & (\bar{H}_1)_{J_I} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\bar{H}_1)_{J_I} & (\bar{H}_1)_{J_I} & \cdots & (\bar{A}_1)_{J_I} \end{bmatrix}\right) \\
&= n(J_u) + r(([\bar{A}(S)\bar{B}])_{J_u}) = r([A(S)\bar{B}]).
\end{aligned}
$$

同理可证$r([A(S)\bar{B}]) \leqslant r([\bar{A}_d\bar{B}])$. 从而$r([A(S)\bar{B}]) = r([\bar{A}_d\bar{B}])$. 等式 $r([A(C)\bar{B}]) = r([\bar{A}_d\bar{B}])$ 的证明是类似的,从略.

等式 3.5b) 和 3.5c) 可由引理 3.3 以及类似的证明方法推出,证略.

定理 3.1 的证明. 条件 3.1.1) 的必要性. 假定系统 $\Sigma_d(N) = (\bar{A}_d, \bar{B})$ 是结构不可控的,则由引理 3.4 和引理 3.5 可知,或 $r([A(S)\ \bar{B}]) < n_0 + Nn$ 成立,或存在一个正整数 $k, 1 \leqslant k \leqslant n_0 + Nn$, 使得 $r([([A(S)]^*)_k\bar{B}]) < n_0 + Nn$ 成立. 由于 $r([\bar{A}\bar{B}]) \leqslant r([A(S)\ \bar{B}])$ 以及 $r([(\bar{A}^*)_k\bar{B}]) \leqslant r([([A(S)]^*)_k\bar{B}])$ $(k = 1, \cdots, n_0 + Nn)$, 所以据引理 3.4 可知,系统 $\Sigma$ 是结构不可控的. 条件 3.1.2) 的必要性的证明是类似的, 证略.

定理 3.2 的证明. 必要性由定理 3.1 得到.

条件 3.1.1) 的充分性. 由于系统 $\Sigma$ 满足内联条件 $I$,所以在系统 $\Sigma$ 的图 $G_T$ 中存在互不相交的圈 $G_k = (V_k, E_k)(k = 1, \cdots, t)$ 使得 $V_T \subset \bigcup_{k=1}^{t} V_k$. 如果 $t = 1$,那末对应于圈 $G_1 = (V_1, E_1)$ 的系统可由 $(A(C), \bar{B})$ 来描述. 由引理 3.4 和引理 3.5 可知, 系统 $(A(C), \bar{B})$ 是结构可控的. 而 $G_1 \subset G_T$, 因此系统 $\Sigma = (\bar{A}, \bar{B})$ 也是结构可控的. 对于 $t > 1$ 的情况, 重复地使用 $t = 1$ 时的结论即可推出对应于图 $\bigcup_{k=1}^{t} G_k$ 的系统是结构可控的,从而系统 $\Sigma$ 结构可控. 条件 3.1.2) 的充分性的证明是类似的,证略.

定理 3.3 的证明. 充分性由定理 3.2 的推出.

必要性. 由定义 3.1 和定理 3.2 可知,条件 3.3.1) 的必要性是显然的. 假定 $r([\bar{A}_1 + \bar{H}_1\ \bar{B}_1]) < n$, 则当 $N > n_0$ 时,由引理 3.5 和引理 3.1 得

$$
\begin{aligned}
r([A(S)\ \bar{B}]) = r([\bar{A}_d\ \bar{B}]) &\leqslant 2n_0 + Nr([\bar{A}_1 + \bar{H}_1\ \bar{B}_1]) \\
&\leqslant 2n_0 + N(n-1) < n_0 + Nn.
\end{aligned}
$$

据引理 3.4 可知,系统 $\Sigma$ 是结构不可控的. 从而条件 3.3.2) 是必要的.

# 4 结语

本文的主要工作就是对一类具有广泛实际背景的组合系统给出了数学描述. 在适当

的内联假定下，证明了这类系统的结构可控性与渐近合作性是以其修正的低阶子系统或解耦系统的相应性质为特征的。这使得对整个系统的某些定性性质的分析得到极大地简化。事实上，这种简化来自于这类系统所具有的相似结构。关于具有相似结构的组合系统其它优越性有待于进一步的研究。

## 参　考　文　献


[1] Araujo C S and Castro J C. Application of power system stabilizers in a plant with identical units. IEE Proc. Part C, 1991, 138: 11—18.

[2] Castro J C. Decentralized control of systems with groups of similar subsystems and symmetrical interconnections. Proc. IFAC/IFORS/IMACS Symposium LSS: Theory and Application, 1992, 90—95.

[3] Sundareshan M K and Elbanna R M. Qualitative analysis and decentralized controllers synthesis for a class of large-scale systems with symmetrically interconnected subsystems. *Automatica*, 1991, **27**: 383—388.

[4] Shields R W and Pearson J B. Structural controllability of multiinput linear systems. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1976, **AC-21**: 203—212.

[5] Davison E J. Connectability and structural controllability of composite systems. *Automatica*, 1977, **13**: 109—123.

[6] 高为炳. 非线性控制系统引论. 北京：科学出版社，1988.

[7] Siljak D D. Large-scale dynamic systems: stability and structure. North-Holland, New York, 1978.

[8] Konig D. Graphak es Matrixok, *Mater. Fiz. Lapak.*, 1931, **38**: 116—119.

# STRUCTURAL CONTROLLABILITY AND ASYMPTOTICALLY COOPERATIVENESS OF A CLASS COMPOSITE SYSTEMS WITH SIMILAR STRUCTURES

YANG GUANGHONG ZHANG SIYING

*(Dept. of Automatic Control, Northeastern Univ. Shenyang* 110006)

ABSTRACT

In this paper, a class of composite systems is discussed. A composite system is composed of several subsystems with similar structure and an external system. Under appropriately interconnecting conditions, it is shown that the structural controllability and asymptotically cooperativeness of such a composite system can be determined by the corresponding properties of the modified subsystem and the decoupled system corresponding to the system.

**Key words:** Composite system, similar structure, structural controllability, asymptotically cooperativeness.

**杨光红** 1963年出生于吉林省乾安县. 分别于 1983 年和 1986 年在东北工学院数学系获学士和硕士学位. 现在东北大学自控系攻读博士学位,从事复杂控制系统结构的研究.

**张嗣瀛** 照片、简介见本刊第 18 卷第 2 期.