单机随机调度中机器的失效分析[1)]

谭 民 李 伟
(中国科学院自动化研究所 北京 100080) (中国科学院应用数学研究所 北京 100080)

摘 要

随机调度问题已越来越受到人们的重视，单机随机调度的研究已经取得了不少结果，而当机器失效时会出现什么现象呢? 这是实际生产中更关心的问题.本文考虑了机器允许失效时的单机随机调度问题，在部件的加工时间,机器的寿命和修复时间都服从指数分布的情况下，得到并证明了使目标函数 $\Sigma\omega_j C_j$，$\Sigma\omega_j U_j$，$\Sigma\omega_j T_j$ 最小的最优调度策略与机器是否失效无关这一更具一般性的结论.

关键词: 随机调度，完成时间，交工期，失效与修理.

1 引言

近些年，由于柔性制造系统(FMS)以及计算机集成制造系统(CIMS)的兴起，确定性调度和随机调度问题已受到越来越多的重视. 在确定性调度中，有关的信息都是确定性的，事先已知的，而随机调度中系统的参数是随机变量.

单机随机调度是研究最多的一种，它的描述形式是: n 个不同的工件在一台机器上加工，每个工件的加工时间是独立的随机变量，工件如何排序才能使预先给定的性能指标最优.

在单机随机调度中考虑最多的性能指标有三个:

1) 加权完成时间之和的期望最小，即 $\min E\left(\sum_{j=1}^{n}\omega_j C_j\right)$. 其中 C_j 为工件 j 的完成时间(Completion times)，ω_j 为工件 j 的权值，这种调度模型表示为 $1\mid X_j\sim G_j\mid E(\Sigma\omega_j C_j)$;

2) 在一定的交工期 d_j(due date)内，误工工件数的加权和的期望最小，即 $\min E\left(\sum_{j=1}^{n}\omega_j U_j\right)$. 其中，当 $C_j\geqslant d_j$ 时，$U_j=1$，当 $C_j<d_j$ 时，$U_j=0$，这种问题的调度模型表示为 $1\mid X_j\sim G_j, d_j\sim F_j\mid E(\Sigma\omega_j U_j)$，其中 G_j 为加工时间 X_j 的分布函数，F_j 为交工期 d_j 的分布函数. 若所有工件有共同的交工期 d，那么模型描述为 $1\mid X_j\sim G_j, d\sim F\mid E(\Sigma\omega_j U_j)$;

3) 在一定的交工期 d_j 内，工件延误时间的加权和的期望最小，即 $\min E\left(\sum_{j=1}^{n}\omega_j T_j\right)$.

---

1) 本课题受到国家自然科学基金的资助.
本文于1993年7月14日收到

其中 $T_j=\max(C_j-d_j,\ 0)$，这种问题的调度模型表示为 $1|X_j\sim G_j, d_j\sim F_j|E(\Sigma\omega_j T_j)$.

很多学者对加工时间服从指数分布的单机调度问题进行了研究，得到了如下结果:

1）对于 $1|X_j\sim \exp(\lambda_j)|E(\Sigma\omega_j C_j)$问题，最优策略是按 $\lambda_j\omega_j$ 下降的顺序调度工件.

2）对于 $1|X_j\sim \exp(\lambda_j)$，$d\sim \exp(r)|E(\Sigma\omega_j U_j)$问题，最优策略是按 $\lambda_j\omega_j$ 下降来调度工件.

3）对于 $1|X_j\sim \exp(\lambda_j)$，$d\sim \exp(r)|E(\Sigma\omega_j T_j)$问题；最优策略是按 $\lambda_j\omega_j$ 下降来调度工件.

上面的这些结果都是针对机器不发生故障的情况．若考虑机器的故障，机器加工工件会发生一系列的变化，给问题的分析增加了难度．那么在机器失效时，上面的结论是否还成立，在什么条件下还适用，这是人们更关心的问题，因为机器不可能完全可靠，发生故障总是不可避免的.

本文就是对考虑失效的单机调度问题进行分析，对上述三种性能指标的调度问题进行讨论，给出更具一般性的结果.

2　机器失效的加工现象问题

考虑 n 个不同的工件一台加工机器，工件的加工时间是独立的随机变量，服从参数为 λ_j 的指数分布，机器允许失效，失效后进行修理，机器的寿命时间 U 和修理时间 Z 也是随机变量，并且分别服从参数为 α 和 β 的指数分布，对上面三种性能指标，调度模型表示为

1）$1|X_j\sim \exp(\lambda_j)$，$U\sim \exp(\alpha)$，$Z\sim \exp(\beta)|E(\Sigma\omega_j C_j)$，

2）$1|X_j\sim \exp(\lambda_j)$，$U\sim \exp(\alpha)$，$Z\sim \exp(\beta)$，$D\sim \exp(r)|E(\Sigma\omega_j U_j)$，

3）$1|X_j\sim \exp(\lambda_j)$，$U\sim \exp(\alpha)$，$Z\sim \exp(\beta)$，$D\sim \exp(r)|E(\Sigma\omega_j T_j)$.

当一个工件正在加工的过程中机器出现故障，这时机器的加工会出现不同的现象，一种是当机器修好后，在原来已加工的基础上继续加工，这种情况称为 resume 模型；另一种是当机器修好后，不考虑已加工的部分，对这个工件从头开始加工，这种情况称为 repeat 模型[1].

假设机器的加工时间 X_j— $\exp(\lambda_j)$，寿命时间 U— $\exp(\alpha)$，修理时间 Z— $\exp(\beta)$，并且设 $Y_j=\min(X_j,\ U)$，即加工完成与发生故障中较早发生的事件，那么易知

$$P(Y_j\leqslant t)=1-\exp[-(\lambda_j+\alpha)t]. \tag{1}$$

2.1　resume 模型

设 X_j' 为工件 j 所需的实际加工时间，则由 [6] 并利用本文的条件有:

实际加工时间的 L－S 变换

$$X_j'(s)=E\exp(-sX_j')=\frac{\lambda_j(s+\beta)}{s^2+s(\lambda_j+\alpha+\beta)+\lambda_j\beta}.$$

实际加工的平均加工时间为

$$E(X_j')=-\left.\frac{dX_j'(s)}{ds}\right|_{s=0}=\frac{1}{\lambda_j}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

2.2 repeat 模型

这个模型当机器失效修好后，机器对工件从头开始加工，所以实际的加工时间为[1]

$$X_j'=E\{\min(X_j,\ U)\}+P(X_j>U)\left(\frac{1}{\beta}+X_j'\right).$$

由(1)及上式易知 $E(X_j')=\frac{1}{\lambda_j}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

我们可以看到，当工件的加工时间服从指数分布时，由 resume 模型和 repeat 模型得到的实际加工时间是相同的. 这一点也非常好理解，因为指数分布函数有一个非常重要的性质即所谓"无记忆性"，若一个工件的加工时间服从指数，当加工了 t 时间之后，则它在 t 以后的剩余加工与新的加工一样服从原来的指数分布，即每个时刻的加工都相当是新的工件开始加工，这时的 resume 模型实际上就是 repeat 模型，从上面的推导也可明确地看到这一点.

3 机器失效的调度问题分析

从上面对失效现象的讨论，我们可以看到，失效仅仅影响到机器的实际加工时间，并且是在原机器加工时间 $\frac{1}{\lambda_j}$ 上乘了一个常数 $\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)$，变成了 $\frac{1}{\lambda_j'}=\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{1}{\lambda_j}$.

3.1 性能指标 $E(\Sigma\omega_j C_j)$的调度问题

讨论了机器的失效之后，对工件的调度就应该用实际的加工时间去考虑，这时调度的结果是按 $\omega_j/E(X_j')$下降来排序工件[1,2]. 那么，对指数分布的加工时间，$E(X_j')=\frac{1}{\lambda_j}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)$，这样就是按 $\lambda_j\omega_j\Big/\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)$下降来排序，而$\left[1+\frac{\alpha}{\beta}\right]$为一常数，所以还是按照 $\lambda_j\omega_j$ 下降来排序，这样我们就可以得到下面的定理.

定理 1. 对于 $1|X_j—\exp(\lambda_j),\ U—\exp(\alpha),\ Z—\exp(\beta)|E(\Sigma\omega_j C_j)$的单机调度问题，其最优排序的结果与机器的失效无关，仍是按$\lambda_j\omega_j$下降来排序.

3.2 性能指标 $E(\Sigma\omega_j U_j)$的调度问题

当所有的工件有同一交工期，且服从参数为 r 的指数分布时，文献 [2] 得到这样的结论：最优排序的结果是按 $\frac{\omega_j G_j(h(r))}{1-G_j(h(r))}$ 下降的顺序，其中 $G_j(h(r))=E(e^{-h(r)X_j})$，$h(r)=r+\alpha(1-E(e^{-rZ}))$.

当 $X_j—\exp(\lambda_j)$，$U—\exp(\alpha)$，$Z—\exp(\beta)$时，我们可以得到 $h(r)=r+\frac{\alpha r}{\beta+r}$，$G_j(h(r))=\frac{\lambda_j}{\lambda_j+r+\frac{\alpha r}{\beta+r}}$， 因此就有 $\frac{\omega_j G_j(h(r))}{1-G_j(h(r))}=\frac{\omega_j\lambda_j}{r+\frac{\alpha r}{\beta+r}}$； 而

$r+\frac{\alpha r}{\beta+r}$ 为一常数，所以还是按照 $\lambda_j\omega_j$ 下降来排序.

定理 2. 对于 $1|X_j—\exp(\lambda_j), U—\exp(\alpha), Z—\exp(\beta), D—\exp(r)|E(\Sigma\omega_j U_j)$ 的单机调度问题，其最优排序的结果与机器的失效无关，仍是按 $\lambda_j\omega_j$ 下降来排序.

3.3 性能指标 $E(\Sigma\omega_j T_j)$ 的调度问题

1977 年，Lenstra 等[7] 曾给出了排序中四个 open problem，其中第一个即为“单机总延误问题”，亦即有 n 个需加工的工件和一台机器，工件 j 的加工时间为常数 P_j，工期为常数 d_j $(j=1, 2, \cdots, n)$，对这些工件进行调度，使 $\Sigma\omega_j T_j$ 最小. 1984 年，Lenstra 等[8] 在其综述报告中多次提出这个问题. 当加工时间 P_j 和工期 d_j 都为指数分布时，Pinedo[3] 对加权总延误 $\Sigma\omega_j T_j$ 进行了考虑，首次给出了最优策略. 然而，一旦机器可失效并可修复时，问题将变得更为复杂. 下面我们就对机器可修，工件具有同一交工期的“单机总延误问题”进行讨论.

我们先证明一个一般性的结论：当随机变量 $A\sim A(x)$，$B\sim\exp(b)$时，有

$$E\{\max(A-B,\ 0)\}=E(A)-\frac{1}{b}(1-Ee^{-Ab}).$$

事实上，由条件概率易知

$$\begin{aligned}E\{\max(A-B,\ 0)\}&=\int_0^\infty t\,dP(A-B\leqslant t)\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty bte^{-bx}dx\,dA(x+t)\\&=b\int_0^\infty e^{-bx}\left[\int_x^\infty(y-x)dA(y)\right]dx\\&=b\int_0^\infty\left[\int_0^y(y-x)e^{-bx}dx\right]dA(y)\\&=\int_0^\infty\left[y(1-e^{-by})+ye^{-by}-\frac{1}{b}(1-e^{-by})\right]dA(y)\\&=E(A)-\frac{1}{b}(1-Ee^{-bA}).\end{aligned}$$

那么对性能指标 $E(\Sigma\omega_jT_j)$可得

$$ET_1=E\{\max(C_1-d,\ 0)\}=\frac{1}{\lambda_1}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)-\frac{1}{r}(1-Ee^{-rX_1'}),$$

$$\begin{aligned}ET_2=E\{\max(C_2-d,\ 0)\}=&\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\\&-\frac{1}{r}(1-E\,e^{-rX_1'}Ee^{-rX_2'}).\end{aligned}$$

其中 $Ee^{-rX_j'}$ 的表达式在前面我们已经得到，所以

$$
\begin{aligned}
&E\{\Sigma\omega T(1,\ 2)\}-E\{\Sigma\omega T(2,\ 1)\}\\
&=\omega_1\left\{\frac{1}{\lambda_1}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)-\frac{1}{r}(1-Ee^{-rX_1'})\right\}+\omega_2\left\{\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{r}(1-Ee^{-rX_1'}Ee^{-rX_2'})\right\}-\omega_2\left\{\frac{1}{\lambda_2}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)-\frac{1}{r}(1-Ee^{-rX_2'})\right\}\\
&\quad-\omega_1\left\{\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)-\frac{1}{r}(1-Ee^{-rX_1'}Ee^{-rX_2'})\right\}\\
&=\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}[\omega_2\lambda_2-\omega_1\lambda_1]+\frac{1}{r^2}(1-Ee^{-sX_1'})(1-Ee^{-sX_2'})\\
&\quad\cdot\left[\frac{r\omega_1Ee^{-rX_1'}}{1-Ee^{-sX_1'}}-\frac{r\omega_2Ee^{-rX_2'}}{1-Ee^{-sX_2'}}\right]\\
&=[\omega_2\lambda_2-\omega_1\lambda_1]\left\{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}-\frac{1}{r^2}(1-Ee^{-rX_1'})(1-Ee^{-rX_2'})\frac{r+\beta}{r+\alpha+\beta}\right\}\\
&=(\lambda_2\omega_2-\lambda_1\omega_1)\left\{\frac{\alpha+\beta}{\beta\lambda_1\lambda_2}-\frac{(\beta+r)(r+\alpha+\beta)}{[r^2+r(\alpha+\beta)+\lambda_1(r+\beta)][r^2+r(\alpha+\beta)+\lambda_2(r+\beta)]}\right\}\\
&=(\lambda_2\omega_2-\lambda_1\omega_1)\frac{(\alpha+\beta)r(r+\alpha+\beta)[r^2+r(\alpha+\beta)+(\lambda_1+\lambda_2)(r+\beta)]+\alpha r\lambda_1\lambda_2(r+\beta)}{\beta\lambda_1\lambda_2[r^2+r(\alpha+\beta+\lambda_1)+\lambda_1\beta)][r^2+r(\alpha+\beta+\lambda_2)+\lambda_2\beta)]}.
\end{aligned}
$$

从而当 $\lambda_2\omega_2\leqslant\lambda_1\omega_1$ 时，$E\{\Sigma\omega T(1,\ 2)\}-E\{\Sigma\omega T(2,\ 1)\}\leqslant 0$.

利用[3]的证明思想容易证明，当工件按 $\lambda_j\omega_j$ 下降来排序时，才使 $E\{\Sigma\omega_jT_j\}$最小.

由此可以看出排序的结果与机器是否失效无关.

定理3. 对于 $1|X_j\text{—}\exp(\lambda_j),\ U\text{—}\exp(\alpha),\ Z\text{—}\exp(\beta),\ D\text{—}\exp(r)|E(\Sigma\omega_jT_j)$ 的单机调度问题，其最优排序的结果与机器的失效无关，仍是 $\lambda_j\omega_j$ 下降的排序.

上面三个定理说明对于 n 个工件一台机器的单机调度问题，若每个工件的加工时间 X_j 服从参数为 λ_j 的指数分布，机器的寿命时间和修理时间均服从指数分布的情况下，机器的失效只影响工件的实际加工时间，不影响最优策略的排序结果．也就是说，当机器的寿命时间和修理时间均为指数分布时，对加工时间是指数分布的工件的排序与机器是否失效无关．这一结果对于加工时间是指数分布的单机调度问题具有更重要的意义.

4 结束语

本文对考虑失效的单机调度问题进行了讨论．对机器的寿命时间和修理时间均服从指数分布的情况进行了分析，得到了一个非常重要的结果，即在上面三种性能指标的情况下，如果工件的加工时间是指数分布时，那么机器的失效不影响最优策略的排序结果．从这一结论可以知道当考虑机器失效时，机器失效对调度策略的影响情况.

更一般的情况，如果工件的加工时间不是指数分布，而是满足一般分布，那么机器失效的影响到底是怎么样的呢？ 这将是我们下一步的工作.

参 考 文 献

[1] Frostig E. A note on stochastic scheduling on a single machine subject to breakdown —— the preemptive repeat model. *Probability in the engineering and informational sciences*, 1991 (5): 349— 354.

[2] Pinedo M. & Rammouz E. A note on stochastic scheduling on a single machine subject to break-down and repair. *Probability in the engineering and informational sciences*, 1988 (2): 41 — 49.

[3] Pinedo M. Stochastic scheduling with release dates and due dates. *Operations Research*, 1983, **31** (3): 559 — 572.

[4] Glazebrook K D. Scheduling stochastic jobs on a single machine subject to breakdowns. *Naval research logistics quarterly*, 1984, **31** (2): 251 — 264.

[5] Birge J et al. Single-machine scheduling subject to stochastic breakdowns. *Naval research logistics*, 1990, **37** (4): 661 — 677.

[6] 曹晋华, 程侃. 服务台可修的M/G/1 排队系统分析: 应用数学学报, 1982, **5** (2): 113 — 127.

[7] Lenstra J K Rinnooy Kan A H G & Brucker P. Complexity of machine scheduling problems. *Ann. Discrete Math.*, 1977, (1): 343 — 362.

[8] Lenstra J K, Rinnooy Kan A H G. New directions in scheduling theory. *Ann. Discrete Math.*, 1984, (6): 255 — 259.

THE FAILURE ANALYSIS OF STOCHASTIC SCHEDULING ON A SINGLE MACHINE SUBJECT TO BREAKDOWN

TAN MIN

(*Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences*)

LI WEI

(*Institute of Applied Mathematics, Chinese Academy of Sciences*)

ABSTRACT

Stochastic scheduling for an unreliable machine is considered in this paper. Under the assumptions that the processing times of jobs, the uptime and repair time of the machine are all exponentially distributed, the optimal policies for minimizing objective functions $f_\pi \in \{\Sigma\omega_j C_j, \Sigma\omega_j U_j, \Sigma\omega_j T_j\}$ are given. These optimal policies are independent of the types of failures.

Key words: Stochastic scheduling, completion times, due date, failure and repair.

谭 民 1962年出生，1986年毕业于清华大学自动化系，获工学学士，1990年获中国科学院自动化研究所工学博士，现为中国科学院自动化研究所研究员，中科院复杂系统工程学开放实验室副主任. 感兴趣的领域有：控制系统故障检测与诊断、系统可靠性、制造系统调度问题与可靠性、机器人控制及可靠性、神经网络等.

李 伟 照片及简介见本刊第20卷第5期.

中国自动化学会第十一届青年学术年会(YAC'96)
征 文 通 知

中国自动化学会第十一届青年学术年会将于1996年8月中旬召开(会址为武夷山市)，这又将是一次促进我国自动化界青年科技工作者迅速成长，促进自动控制及相关学科青年学者学术交流的盛会. 届时还将邀请国内有关专家、学者做综述或专题报告，组织专题讨论，同时还将举办小型高新技术产品展示会.

一、征文范围

(1) 线性与非线性系统控制；(2) 自适应控制、最优控制；(3) 智能控制、模糊控制与专家系统；(4) 系统辨识、滤波与预报；(5) 故障诊断与容错控制；(6) 神经元网络及其应用；(7) 工业自动化仪表与过程控制；(8) 计算机软、硬件技术及应用；(9) 离散事件系统；(10) 数据处理、图象识别；(11) 管理系统工程及应用；(12) 其它相关领域的新理论、新方法、新技术等.

二、征文要求

(1) 于1996年3月1日前提交一份应征论文的详细摘要(500字左右)，经评审通过后，即通知作者于1996年5月1日前提交正文；(2) 论文应理论联系实际，具有较高学术价值或应用价值，未在国内外公开发表过；(3) 论文第一作者的年龄不超过40岁.

三、投稿地址·

石家庄市河北机电学院自动化系 刘永强 翟成；

邮政编码：050054

联系电话：(0311)7052945转341

四、承办单位：河北机电学院自动化工程系、清华大学自动化系

* 欢迎港、澳、台青年学者及在国外留学和工作的青年学者参加会议.