第21卷 第6期 自动化学报 Vol. 21, No. 6
1995年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1995

短文

差分有界干扰的最优抑制[1)]

吴 俊
(浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027)
方华京
(华中理工大学自控系 武汉 430074)

摘 要

提出了离散 SISO 系统中差分有界干扰的最优抗扰设计问题，讨论了控制对象含 $(1-z)^{-1}$ 和不含 $(1-z)^{-1}$ 两种情况下问题的解法，并证明了上述两种情况都可以转化为现有 l^1 优化理论能够解决的问题.

关键词: 差分有界序列，最优干扰抑制，l^1 优化问题.

1 引言

控制系统 l^1 优化抗扰设计总是假定干扰是幅值有界的. 在离散 SISO 系统中，为了能够处理斜坡信号(它不是幅值有界的)等一类干扰，本文在 l^1 优化理论的基础上，研究差分有界干扰最优抑制问题.

2 问题描述

若实数序列 $f=\{f_0,f_1,\cdots\}$ 满足 $\sup\limits_i |f_i-f_{i+1}|<\infty(i=0,1,\cdots)$，则称 f 是差分有界序列. 记 l^d 为由全体差分有界序列构成的线性空间，在 l^d 中定义范数

$$\|f\|_d=\max(|f_0|,\sup_i|f_i-f_{i+1}|).$$

l^1 空间、l^∞ 空间及其范数 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_\infty$ 的定义见文献[1]，BIBO 稳定和闭环稳定的定义见文献[2]. 记 A 为由全体 l^d 空间到 l^∞ 空间的有界线性算子构成的空间，定义 A 中元素 $\phi:f\longmapsto g$ 的范数 $\|\phi\|_A=\sup\limits_{\substack{f\in l^d\\ f\neq 0}}(\|g\|_\infty/\|f\|_d)$.

考虑离散 SISO 系统 $\Psi_1:(u(z)=-C(z)y(z),y(z)=f(z)+P(z)u(z))$，干扰信号 $f(z)\in l^d$，$y(z)$ 是输出信号，$C(z)$ 是控制器，$P(z)$ 是控制对象. 规定控制对象不含

1) 国家自然科学基金资助项目.

本文于1993年3月1日收到

因子 $(1-z)$。从 $f(z)$ 到 $y(z)$ 的 z 传递函数 $\phi_1(z)=(1+P(z)C(z))^{-1}$，令 S_1 为由全体使 Ψ_1 稳定以及 $\phi_1(z)\in A$ 的 $C(z)$ 构成的集合，则对 $f(z)$ 的最优抑制问题表述为优化问题

$$\mu_1=\inf_{C(z)\in S_1}\|\phi_1(z)\|_A. \tag{OPT1}$$

3　问题的解决

考虑离散 SISO 系统 $\Psi_2:(u(z)=-C(z)y(z),y(z)=(1-z)^{-1}e(z)+P(z)u(z))$，干扰信号 $e(z)\in l^\infty$。从 $e(z)$ 到 $y(z)$ 的 z 传递函数 $\phi_2(z)=(1+P(z)C(z))^{-1}(1-z)^{-1}$，令 S_2 为由全体使 Ψ_2 稳定以及 $\phi_2(z)\in l^1$ 的 $C(z)$ 构成的集合，S_3 为由全体使 Ψ_2 稳定的 $C(z)$ 构成的集合，则对 $e(z)$ 的最优抑制问题是一个特殊的 l^1 优化问题

$$\mu_2=\inf_{C(z)\in S_2}\|\phi_2(z)\|_1. \tag{OPT2}$$

定理 1. 对于同一个 $P(z)$，有 $S_1=S_2$。

证明。对任意 $C(z)\in S_2$，因为 Ψ_1 与 Ψ_2 的闭环结构相同，所以 $C(z)$ 必使 Ψ_1 稳定。对任意 $f(z)\in l^d$，令 $e(z)=\{e_0,e_1,\cdots\}$，其中，$e_0=f_0$，$e_1=f_1-f_0,\cdots$，显然 $\phi_1(z)f(z)=\phi_2(z)e(z)$、$e(z)\in l^\infty$ 且 $\|f(z)\|_d=\|e(z)\|_\infty$，又 $\phi_2(z)\in l^1$，这意味着对任意 $e(z)\in l^\infty$，有 $\phi_2(z)e(z)\in l^\infty$，因此 $\phi_1(z)f(z)\in l^\infty$，即 $\phi_2(z)\in A$。从而 $C(z)\in S_1$，$S_1\supseteq S_2$。类似可证 $S_1\subseteq S_2$。证毕。

定理 2. 在定理 1 的条件下，对任意 $C(z)\in S_1$，有 $\|\phi_1(z)\|_A=\|\phi_2(z)\|_1$。

证明。由定理 1 的证明可知

$$\begin{aligned}\|\phi_1(z)\|_A&=\sup_{f(z)\in l^d}(\|\phi_1(z)f(z)\|_\infty/\|f(z)\|_d)\\&=\sup_{f(z)\in l^d}(\|\phi_1(z)(1-z)^{-1}e(z)\|_\infty/\|e(z)\|_\infty)\\&\leqslant\sup_{e(z)\in l^\infty}(\|\phi_2(z)e(z)\|_\infty/\|e(z)\|_\infty)=\|\phi_2(z)\|_1.\end{aligned}$$

类似可证 $\|\phi_1(z)\|_A\geqslant\|\phi_2(z)\|_1$。证毕。

定理 1 和定理 2 表明 (OPT1) 与 (OPT2) 等价。

定理 3. $C(z)\in S_2$ 的充分必要条件是 $C(z)\in S_3$ 且 $P(z)C(z)$ 含 $(1-z)^{-1}$。

证明。充分性。因为 $P(z)C(z)$ 含 $(1-z)^{-1}$，所以 $(1+P(z)C(z))^{-1}$ 含 $(1-z)$，又 $(1+P(z)C(z))^{-1}\in l^1$，则 $\phi_2(z)=(1+P(z)C(z))^{-1}(1-z)^{-1}\in l^1$，从而 $C(z)\in S_2$。

必要性。若 $C(z)\in S_3$ 但 $P(z)C(z)$ 不含 $(1-z)^{-1}$，则 $(1+P(z)C(z))^{-1}$ 不含 $(1-z)$，从而 $(1+P(z)C(z))^{-1}(1-z)^{-1}\notin l^1$，即 $C(z)\notin S_2$。证毕。

推论 1. 若 $P(z)$ 含 $(1-z)^{-1}$，则 $S_2=S_3$。

推论 1 表明，对于 $P(z)$ 含 $(1-z)^{-1}$ 的情形(如电机位置伺服系统)而言，(OPT2) 是一般 l^1 优化问题[3,4]。下面研究 $P(z)$ 不含 $(1-z)^{-1}$ 的 (OPT2)。

推论 2. 若 $P(z)$ 不含 $(1-z)^{-1}$，那么 $C(z)\in S_2$ 的充分必要条件是 $C(z)\in S_3$ 且 $C(z)$ 含 $(1-z)^{-1}$。

考虑离散 SISO 系统 Ψ_3

$$(u(z) = -C(z)y(z)、y(z) = (1-z)^{-1}e(z) + (1-z)^{-1}P(z)u(z)),$$

其中干扰信号 $e(z) \in l^\infty$,控制对象是 $(1-z)^{-1}P(z)$,$P(z)$ 不含 $(1-z)^{-1}$. 从 $e(z)$ 到 $y(z)$ 的 z 传递函数

$$\phi_3(z) = (1 + (1-z)^{-1}P(z)C(z))^{-1}(1-z)^{-1}.$$

令 S_4 为由全体使 Ψ_3 稳定以及 $\phi_3(z) \in l^1$ 的 $C(z)$ 构成的集合，则对 $e(z)$ 的最优抑制问题表述为

$$\mu_3 = \inf_{C(z)\in S_4} \|\phi_3(z)\|_1. \qquad \text{(OPT3)}$$

定理 4. 对于同一个不含 $(1-z)^{-1}$ 的 $P(z)$，存在从 S_2 到 S_4 的一一映射 h，并且对 $C(z) \in S_2$ 和 $C(z)$ 在 h 下的象,有 $\phi_2(z) = \phi_3(z)$.

证明. 对任意 $C(z) \in S_2$,有

$$(1 + P(z)C(z))^{-1} \in l^1, P(z)(1 + P(z)C(z))^{-1} \in l^1,$$
$$C(z)(1 + P(z)C(z))^{-1} \in l^1, (1 + P(z)C(z))^{-1}(1-z)^{-1} \in l^1.$$

令 $C'(z) = C(z)(1-z)$,则

$$(1 + P(z)(1-z)^{-1}C'(z))^{-1} \in l^1,$$
$$(1 + P(z)(1-z)^{-1}C'(z))^{-1}(1-z)^{-1} \in l^1,$$
$$C'(z)(1 + P(z)(1-z)^{-1}C'(z))^{-1} \in l^1,$$

由于 $P(z)C(z)$ 含 $(1-z)^{-1}$,因此 $(1 + P(z)C(z))^{-1}$ 含 $(1-z)$,所以

$$P(z)(1 + P(z)(1-z)^{-1}C'(z))^{-1}(1-z)^{-1} \in l^1,$$

从而 $h: C(z) \longmapsto C'(z)$ 是从 S_2 到 S_4 的映射.

类似可证 h 是从 S_2 到 S_4 的满射.

假设存在 $C_1(z), C_2(z) \in S_2$ 满足 $C_1(z)(1-z) = C_2(z)(1-z)$,则 $C_1(z) = C_2(z)$,因此 h 是从 S_2 到 S_4 的单射.

以上证明了 h 是从 S_2 到 S_4 的一一映射. 对任意 $C(z) \in S_2$,有

$$\begin{aligned}\phi_2(z) &= (1 + P(z)C(z))^{-1}(1-z)^{-1} \\ &= (1 + P(z)(1-z)^{-1}C'(z))^{-1}(1-z)^{-1} = \phi_3(z),\end{aligned}$$

从而定理的后半部分成立. 证毕.

定理 4 表明，$P(z)$ 不含 $(1-z)^{-1}$ 的 (OPT2) 可以与 (OPT3) 等价，而 $(1-z)^{-1}P(z)$ 含 $(1-z)^{-1}$,(OPT3) 能够用推论 1 来解决，这样便解决了 $P(z)$ 不含 $(1-z)^{-1}$ 的 (OPT2).

致谢: 感谢华中理工大学自控系李涣源教授和陈锦江教授的指导.

参 考 文 献

[1] Luenberger D G. Optimization by vector space methods. New York: Wiley, 1969.
[2] Desoer C A, Vidyasagar M. Feedback systems: input-output properties. New York: Academic, 1975.
[3] Dahleh M A, Pearson J B. l^1 optimal feedback controllers for discrete-time systems. Proc Amer Contr Conf, 1986, 1964—1968.
[4] Dahleh M A, Pearson J B. l^1 optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems. *IEEE Trans. Autom. Contr*, 1987, **32**(4): 314—322.

OPTIMAL REJECTION OF DIFFERENCE BOUNDED DISTURBANCES

WU JUN

(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang Univ. Hangzhou 310027)

FANG HUAJING

(Dept. of Automatic Control Engineering, Huazhong Univ. of Sci. and Tech. Wuhan 430074)

ABSTRACT

This paper formulates the problem of optimal disturbance rejection in SISO discrete-time systems where the disturbance is difference bounded. For controlled plants including or not including $(1-z)^{-1}$, the solution of this problem is discussed respectively. It is proved that this problem is equivalent to general l^1 optimal problem in these cases.

Key words: Difference bounded sequences, optimal disturbance rejection, l^1 optimal problem.