

路径规划问题的商空间表达¹⁾

沈林成 常文森

(国防科大自动控制系 长沙 410073)

摘 要

利用计算几何理论研究了非结构化环境中路径规划问题的商空间表达及其结构特征,并讨论了最优路径间的等价关系和商空间路径规划的基本思想,针对非结构化二值地形环境,设计了商空间构造的递归算法.该方法可以推广到 n 维空间中.

关键词: 路径规划,商空间,最优路径表, Voronoi 图.

1 引言

运动规划是 MA(Mobile Agent) 研究的一个重要课题,其中心任务是要规划出一条从出发地到目的地的最优路径^[1,2].虽然 MA 在道路网或自由空间中的路径规划问题已在计算几何、人工智能和机器人学中研究得比较透彻,但绝大多数方法都局限于二值结构化环境.迄今未发现哪个算法能较好地解决非结构化环境中的路径规划问题.

这里提出了路径规划问题的一种新的表达方法——商空间表达法.该方法以预处理时间和存贮空间为代价,将非结构化环境中的规划问题转化为商空间规划问题,从而可以大大地提高运行速度.在固定目标的非结构化环境中,商空间的构造可以在预处理阶段完成,而 MA 在导航时的路径规划实际上只是当前位置在商空间中的定位问题.所以,从当前位置到目标点的最优路径就可以实时地重构出来.

2 基本假设和几个引理

为了便于讨论,假设:(1)地形的边界可分段线性化描述;(2)地形是各向同性的,即移动费用与运动方向无关;(3)任意两个地形不会重叠.基于上述假设,非结构化环境可用背景、障碍物、河流段、道路段、凸多边形等费用率区域五类基本地形模型化.

还假设非结构化环境为 M ,已知的固定目标为 g ,并用 $(pg)^*$ 表示 $p \in M$ 到 g 的最优路径, (pg) 表示 p 到 g 的一条可行路径, $(pg)_i$ 表示 p 到 g 的第 i 条可行路径.

引理 1 (最优路径原理)^[3]. 给定最优路径 $(AB)^*$, $\forall p \in (AB)^*$, $(PB)_i = (PB)^*$,

1) 得到国防预研基金资助的课题.
本文于 1993 年 12 月 28 日收到.

如果 $(PB)_i \subset (AB)^*$, 即最优路径的子路径也是最优的。

引理 2 (最优路径的 Snell's Law)^[4]. 穿越两相邻区域公共边界的最优路径应服从光学折射定理, 即 $C_1 * \sin \theta_1 = C_2 * \sin \theta_2$. 这里 θ_1 和 θ_2 分别是入射角和折射角, C_1 和 C_2 分别是两个区域的费用率。

引理 3^[3]. 在由上述五类基本地形模型化的非结构化环境中, 最优路径只有在地形的顶点和边界上才有可能改变其方向。

3 商空间规划的基本思想

$\forall p \in M, (pg)^*$ 取决于 M 中的地形分布特征和目标 g 的位置, 而 $(pg)^*$ 又依赖于关于目标 g 的代价函数^[5]. 所以可以用 M 中关于 g 的代价函数来研究 M 的结构 F . 由于 M 的任意性, 研究 M 的结构 F 是困难的。

根据引理 3, 可以用最优路径 $(pg)^*$ 经过的地形顶点和边的一个列表 (即路径表) 来描述最优路径, 记为 $OPL(p)$, 并用 $OPL(p) = [q | OPL(r)]$ 表示从 p 经 q 到 g 的最优路径表 (q 是 $OPL(r)$ 的元素). q 或是地形顶点, 或是道路段、或是河流段, 或是 Snell's Law 边. 将属性函数定义为 $\phi(p) = OPL(p) - [p]$.

定义 1. 若 $\forall p \in M, q \in M, \phi(p) = \phi(q)$, 则称 p 和 q 具有关系 R , 记为 pRq . 显然 R 是 M 中的一个等价关系, 记 p 的等价类为 $[p]_R = \{q | q \in M \wedge pRq\}$.

定义 2. 设 M 中有一个等价关系 R, D 是 M 中等价类的全体, 即 $D = \{[p]_R | p \in M\}$, 称 D 是 M 关于 R 的商集, 记为 M/R .

商集 M/R 是将等价类作为其元素而构成的新空间. 设 $N = \{OPL(p) - [p] | p \in M\}$, 则 $\phi(p)$ 定义了从 M 到 N 的一个映射, 并通过 ϕ 规定了当 $p \in M, q \in M, \phi(p) = \phi(q)$ 时, pRq . 这是由 ϕ 决定的等价关系。

定义 3. 如果 $r: OPL(p) = [r | OPL(\omega)]$, 则称 r 为等价类 $[p]_R$ 的根, 记为 $\text{root}(p)$, 并将以 r 为根的等价类区域记为 $\text{Cell}(r)$.

这样, 路径规划问题 (M, g, F, ϕ) 就转化为新层次上问题 $(M/R, g/R, F/R, \phi/R)$ 的求解. 其中 M/R 为 M 关于 R 的商空间, g/R 为商空间中的目标描述, 显然 $g/R = g$; F/R 为商空间的结构; ϕ/R 为商空间的属性函数, 它是一个由 M/R 到 N 的映射, 可以由 ϕ 导出: 当 $p \in M$ 时, $\phi/R([p]_R) = \phi(p)$. 由于当 $[p]_R = [q]_R$ 时, $\phi(p) = \phi(q)$, 则根据规定的等价关系 R 就有 pRq , 或 $[p]_R = [q]_R$. 因此 ϕ/R 是一个可逆映射。

4 商空间的结构分析

M 的结构 F 可以用关于 g 的代价函数 $F(x, y)$ 来表示, 而在 M 中讨论 $F(x, y)$ 是困难的, 但在商空间 M/R 中, F/R 将具有明显的特征. 用 $f_r(x, y)$ 表示 M/R 中以 r 为根的等价类区域 $\text{Cell}(r)$ 中的代价函数。

4.1 以地形顶点 v 为根的等价类区域特征分析

首先考虑 $\text{Cell}(g), \forall p = (x, y) \in \text{Cell}(g), f_g(x, y)$ 正比于 p 到 g 的距离. 在考虑了

代价的三维空间(代价轴垂直于 M 平面)中, $f_g(x, y)$ 是一个顶点在 g 的倒置圆锥, 如图 1(a) 所示. 以点 v 为根的等价类 $\text{Cell}(v)$ 中的 $f_v(x, y)$ 则是顶点在 v 的沿垂直轴向上离 M 平面 $f_{v,g}$ 处的倒置圆锥, 如图 1(b) 所示, $f_{v,g}$ 为 $(vg)^*$ 的代价.

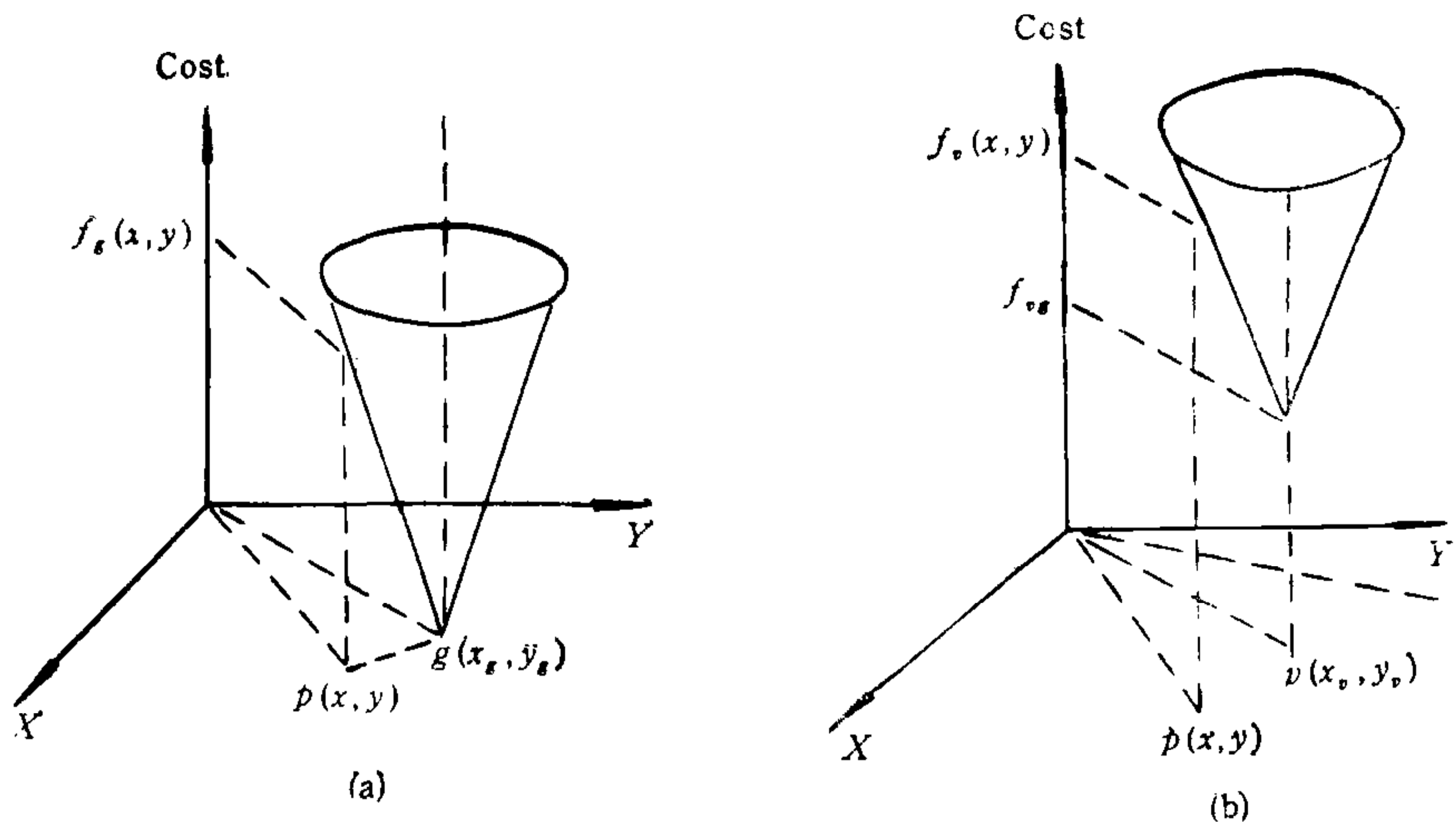


图 1 以地形顶点为根的等价类区域中代价函数的结构特征

4.2 以道路段 r 为根的等价类区域特征分析

$\forall p=(x, y) \in \text{Cell}(r)$ 的最优路径将以 $\theta_c = \sin^{-1}(C_r/C_0)$ (C_0 为背景费用率, C_r 为道路费用率) 的角度在道路某处 P_E 进入 r 并沿 r 运动到另一点 P_x 后离开 (如图 2). 因此, 从进入点 P_E 到退出点 P_x 的代价为 $C_r |P_E P_x| = C_0 \sin \theta_c |P_E P_x|$. 由引理 1, (pP_x) 也为最优路径, 其代价为 $|pP_E| C_0 + |P_E P_x| C_0 * \sin \theta_c = C_0 (|pP_E| + |P_E P_x| \sin \theta_c) = C_0 |PQ|$, 即 $(pP_x)^*$ 代价等于从 p 直接到 Q 的代价. 所以 p 描述一个和 M 平面交于 QP_x 且斜率为 C_0 的平面. 因此以道路段 r 为根的等价类中的代价函数 $f_r(x, y)$ 描述了一个平面.

4.3 以 Snell's Law 边 e 为根的等价类区域特征分析

$\forall p=(x, y) \in \text{Cell}(e)$, 设 $r = \text{root}(e)$, 从 p 经 e 进入 $\text{Cell}(r)$ 的最优路径应满足 $C_1 * \sin \theta_1 = C_2 * \sin \theta_2$, 其中 C_1, C_2 是 $\text{Cell}(e)$ 和 $\text{Cell}(r)$ 的费用率, θ_1, θ_2 为入射角和

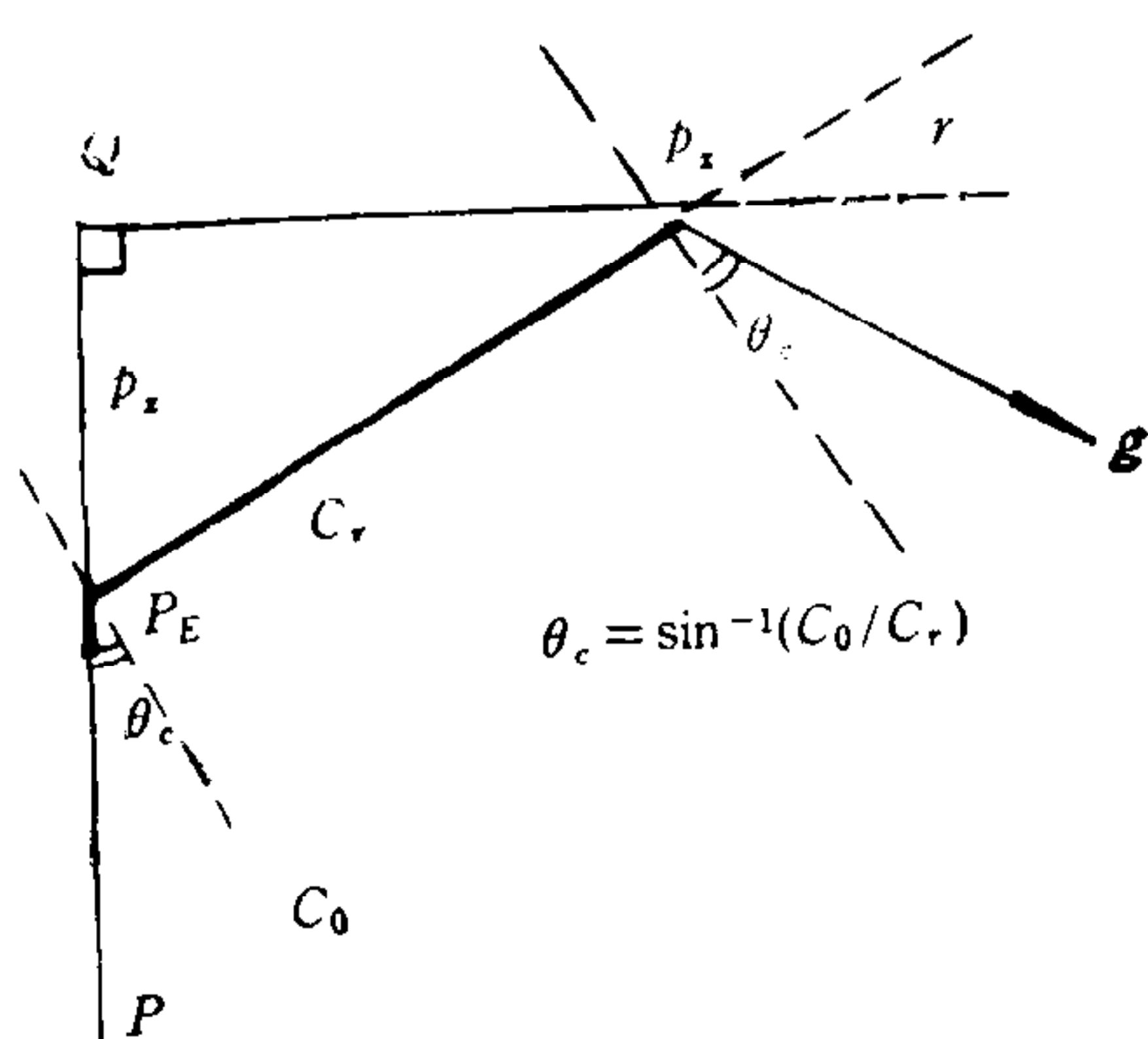


图 2 以道路段为根的等价类区域的代价函数结构特征

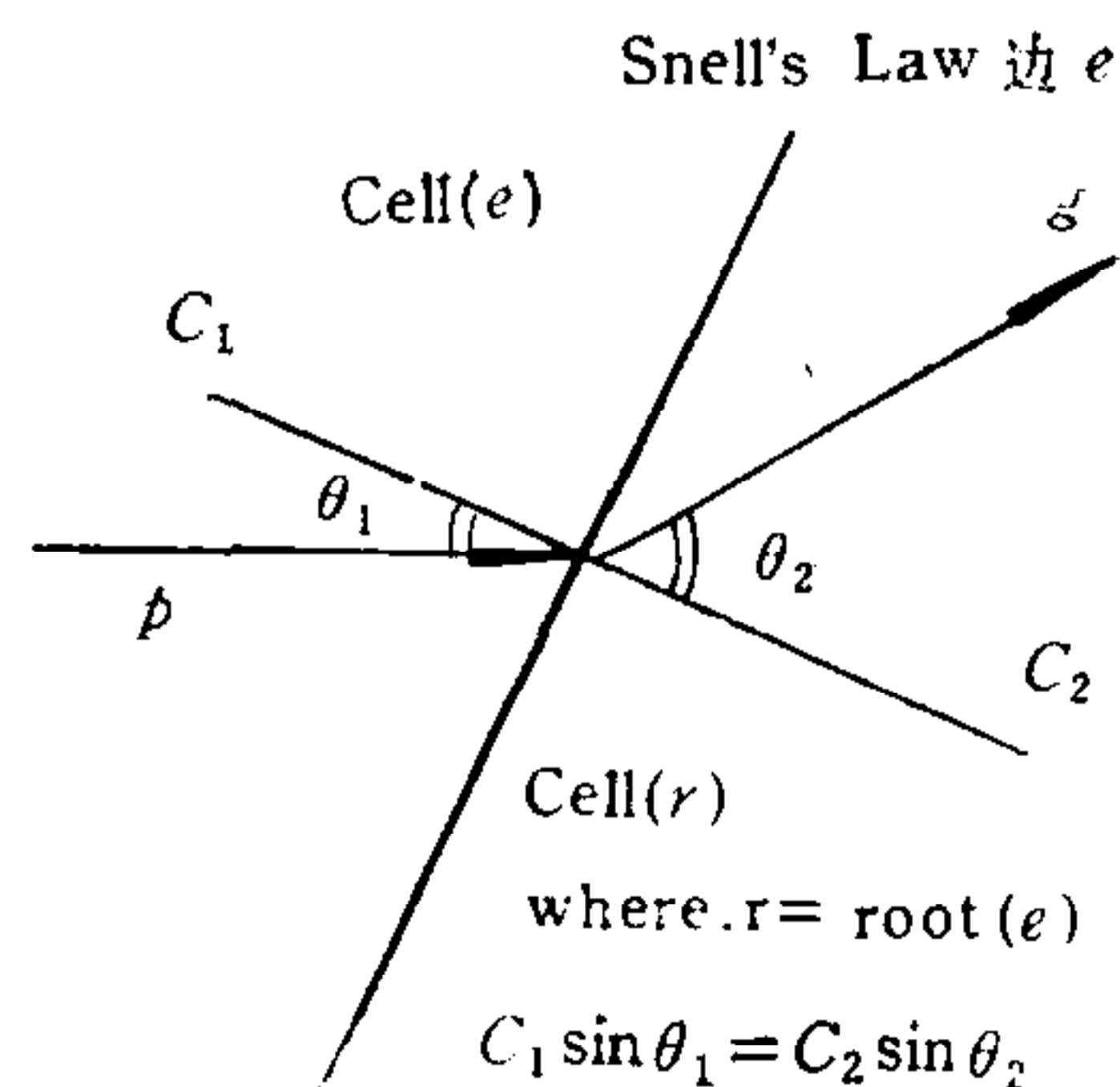


图 3 以 Snell's Law 边 e 为根的等价类区域中的代价函数是对 r 为根的等价类区域中的代价函数进行非线性变换得到的 其中 $r = \text{root}(e)$

折射角(如图 3)。因此 Snell's Law 边实现了对原代价函数 $f_r(x,y)$ 的一种非线性变换,或者说 Snell's Law 边扭曲了 $f_r(x,y)$ 。即以 Snell's Law 边为根的等价类 $\text{Cell}(e)$ 中的 $f_e(x,y)$ 是 $\text{Cell}(r)$ 中 $f_r(x,y)$ 的一种变形。 $f_e(x,y)$ 取决于根 r, r 途径 n 条 ($n \geq 0$) Snell's Law 边,或者归结到以地形顶点为根,或者归结到以道路为根。所以以 Snell's Law 边为根的等价类 $\text{Cell}(e)$ 中的代价函数 $f_e(x,y)$ 只有二种类型,即变形圆锥(变换了 $n + 1$ 次)或平面(斜率改变了 $n + 1$ 次)。

由此可见,商空间中只存在三种类型的代价函数(或结构特征):圆锥、平面和变形圆锥。

由于在两个相邻等价类区域的公共边界上,这两个区域的代价函数都应满足,所以该公共边界必定是这两个代价函数的交在 M 平面上的投影。根据几何理论:两圆锥的交在 M 平面上的投影是一双曲线,而平面与圆锥的交在 M 平面上的投影是一抛物线¹⁾。所以上述三种类型的代价函数的交在 M 上的投影有五种类型(如表 1)。表 1 中最后一行和一列的曲线形状于穿越 Snell's Law 边的次数而略有不同,并且对某些特殊情况,表 1 中的各种边界都有可能退化为一一直线。

表 1

代价函数类型 / 边界类型	圆锥 (以点为根)	平面 (以道路为根)	变形圆锥 (以 Snell's Law 边为根)
圆锥 (以点为根)	双曲线	抛物线	变形双曲线
平面 (以道路为根)	抛物线	直线	变形抛物线
变形圆锥 (以 Snell's Law 边为根)	变形双曲线	变形抛物线	变形双曲线

5 商空间的构造及算法定理

计算几何中 Voronoi 图的构造一般将平面上的点集分割成大致相等的两个集,递归地计算这两个集的 Voronoi 图,最后再将其合并为一个完整的 Voronoi 图。这种递归构造方法为非结构化环境中商空间的构造提供了一种非常有启发性的思想。为了简化讨论,假定 $M = F \cup O$, 其中 F 为背景地形, O 是由 m 个互不相连的障碍物组成的集合。根据前面的讨论,在这种环境中等价类的边界只有双曲线和直线(障碍物边界或扩展段^[3,4])两种类型,如图 4 所示。为了实现递归计算,将 O 分解为两个子集 O_1, O_2 , 并称 O_1 为基本障碍物空间, O_2 为次障碍物空间,并记 D_{O_1} 为 M 中关于基本障碍

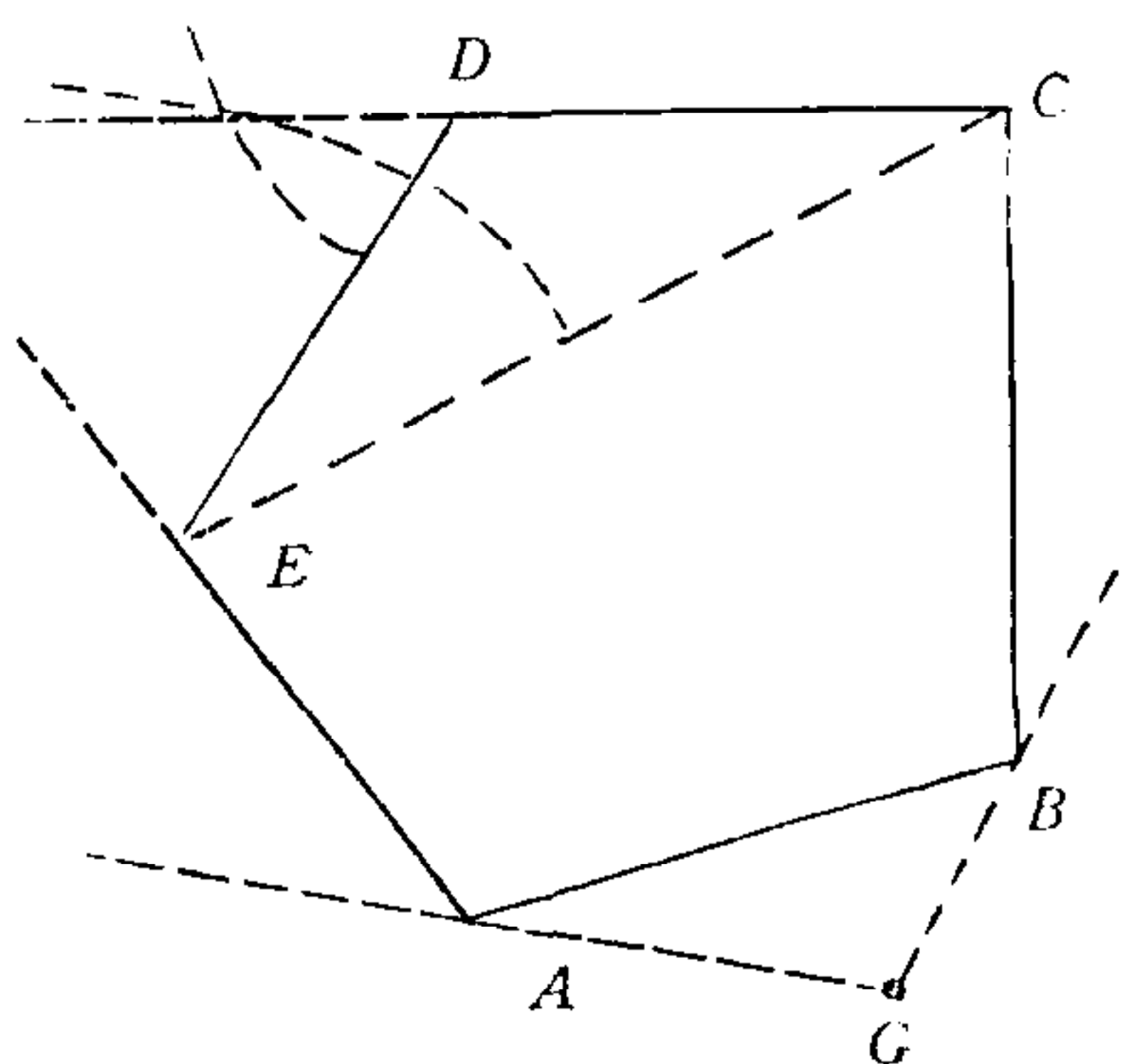


图 4 障碍物空间的商空间

1) 根据前面的讨论,平面的斜率与圆锥曲面在梯度方向上的斜率是相同的,所以,交在 M 上的投影是一抛物线,否则有可能是椭圆。

物空间 O_1 的商空间, 记 $(pg)_{O_1}^*$ 为 M 中从 p 到 g 关于 O_1 的最优路径.

定义 4(可达性). 给定两障碍物集 O_1, O_2 , 则 $\forall p, q \in F$ 是关于 O_1 模 O_2 可达的, 当且仅当 $(pq)_{O_1}^* \cap O_2 = \emptyset$.

设 $V_g(O_1, O_2) = \{p | (pg)_{O_1}^* \cap O_2 = \emptyset\}$ 为所有关于 O_1 模 O_2 可达 g 的点, 容易证明 $V_g(O_1, O_2)$ 的边界是由 $O(n_1 + n_2)$ 条直线段(障碍物边界或根在 O_2 顶点处的扩展段)和双曲线段 (D_{O_1} 中的双曲线段)构成, 其中 n_1, n_2 分别是 O_1 和 O_2 的顶点数.

算法 1. 可达性区域 $V_g(O_1, O_2)$ 的计算.

输入: 目标 g , 障碍物集 O_1, O_2 以及商空间 D_{O_1} .

输出: 直线段和双曲线段序列表达的 $V_g(O_1, O_2)$ 可达性区域边界描述.

step 1. 确定 O_2 的每个顶点 $v \in V_2$ 在 D_{O_1} 中所属的等价类, 并对任一 $v \in V_2$, 设 r_v 是 v 的根, 生成一扩展段——始于 v 沿 r_v 方向扩展直到 $\text{Cell}(r_v)$ 的边界;

step 2. 设 U_1 由 O_1 的边界、商空间 D_{O_1} 的边界及 step1 形成的扩展段构成的一种结构, 其复杂度为 $O(n_1 + n_2)$, 特别地 U_1 包含 g 的细胞的边界描述具有线性复杂度;

step 3. 设 U_2 为次障碍物空间边界构成的一种结构, 其复杂度为 $O(n_2)$, U_2 中包含 g 的细胞的边界具有线性复杂度;

step 4. 将 U_1 重叠到 U_2 上获得组合结构 A , 定理 1 将证明 A 中包含 g 的细胞刚好是集合 $V_g(O_1, O_2)$.

定理 1. 算法 1 计算 $V_g(O_1, O_2)$ 的时间复杂性为 $O((n_1 + n_2) \log(n_1 + n_2))$.

容易证明, 由 D_{O_1} 产生的 $V_g(O_1, O_2)$ 和由 $D_{O_1 \cup O_2}$ 产生的 $V_g(O_1, O_2)$ 是完全相同的. 设 $U = M - \{V_g(O_1, O_2) \cup O_a\}$ 为不可达点集, 其中 $O_a \subseteq O_1 \cup O_2$ 为关于 O_1 模 O_2 可达的障碍物点集. 下面考虑 U 上商空间 D_{O_a} 的构造. 可以证明 U 或是一个含有洞的简单连通区域 R_0 , 或是简单连通区域 R_1, \dots, R_j 的并.

算法 2. 不可达点集上商空间构造算法.

输入: 目标 g , 商空间 D_{O_1} 和可达性区域 $V_g(O_1, O_2)$ 的边界描述.

输出: 不可达点集 $U = M - \{V_g(O_1, O_2) \cup O_a\}$ 上的商空间是 D_{O_a} .

step 1. 通过扫描 D_{O_1} 的边界, 确定关于 O_1 和 O_2 可达的障碍物子集 O_a ;

step 2. 构造描述不可达点集的平面图 U (如图 5);

step 3. 遍历 U 边界, 对每一双曲线弧 ab 用二直线 \overline{ar} 和 \overline{rb} 来代替 (这里 r 是弧 ab 左边的等价类 $\text{Cell}(r)$ 的根), 形成一个楔根在 r 的一楔. 这样 U 变成了一个只具有直线段边界的新集 $U' \supset U$. 如图 5, 双曲线弧 ab 被 $\overline{ar_2}$ 和 $\overline{r_2b}$ 代替, 形成根在 r_2 的一楔. 同一点上可允许多个楔根存在 (图 5 的两个楔的根在 r_1 , 另一个楔的根在 r_2). U' 或是一个含有洞的简单多边形 Q_0 , 或是互不相交的简单多边形 Q_1, \dots, Q_j 的并;

step 4. 如果 $v \in V_2$ 是关于 O_1 模 O_2 可达 g 的, 且 v 不在任何楔的边界上, 则称 v 为关键顶点, 图 5 中顶点 $v_i (i = 3, \dots, 7)$ 是关键顶点, 而 v_1, v_2 不是关键顶点, 因为它们位于一个楔的边界上;

step 5. 对 U' 中每个连通区域 Q_j , 定义一个加权 Voronoi 图 (WVD_j), WVD_j 的关键点集 S_j 为所有关键顶点和 Q_j 边界上的楔根构成的一个点集, 而对 S_j 中的每个位置点附加一个从该点到 g 的最优路径的费用 (从 D_{O_1} 中获得). 图 6 中的 Q_1 和 Q_2 的二个

Voronoi 图的关键点集为 $S_1 = \{r_1, v_6, v_7\}, S_2 = \{r_1, r_2, v_3, v_4, v_5\}$;

step 6. 求解加权 Voronoi 图 (WVD_i) 问题产生 D_{O_a} 在 R_i 中的子空间。

定理 2. 算法 2 正确地把商空间扩展到不可达集 U , 且时间复杂性为 $O(V(n_1 + n_2))$, 其中 $V(n) = O(n(\log(n))^2)$ 为一简

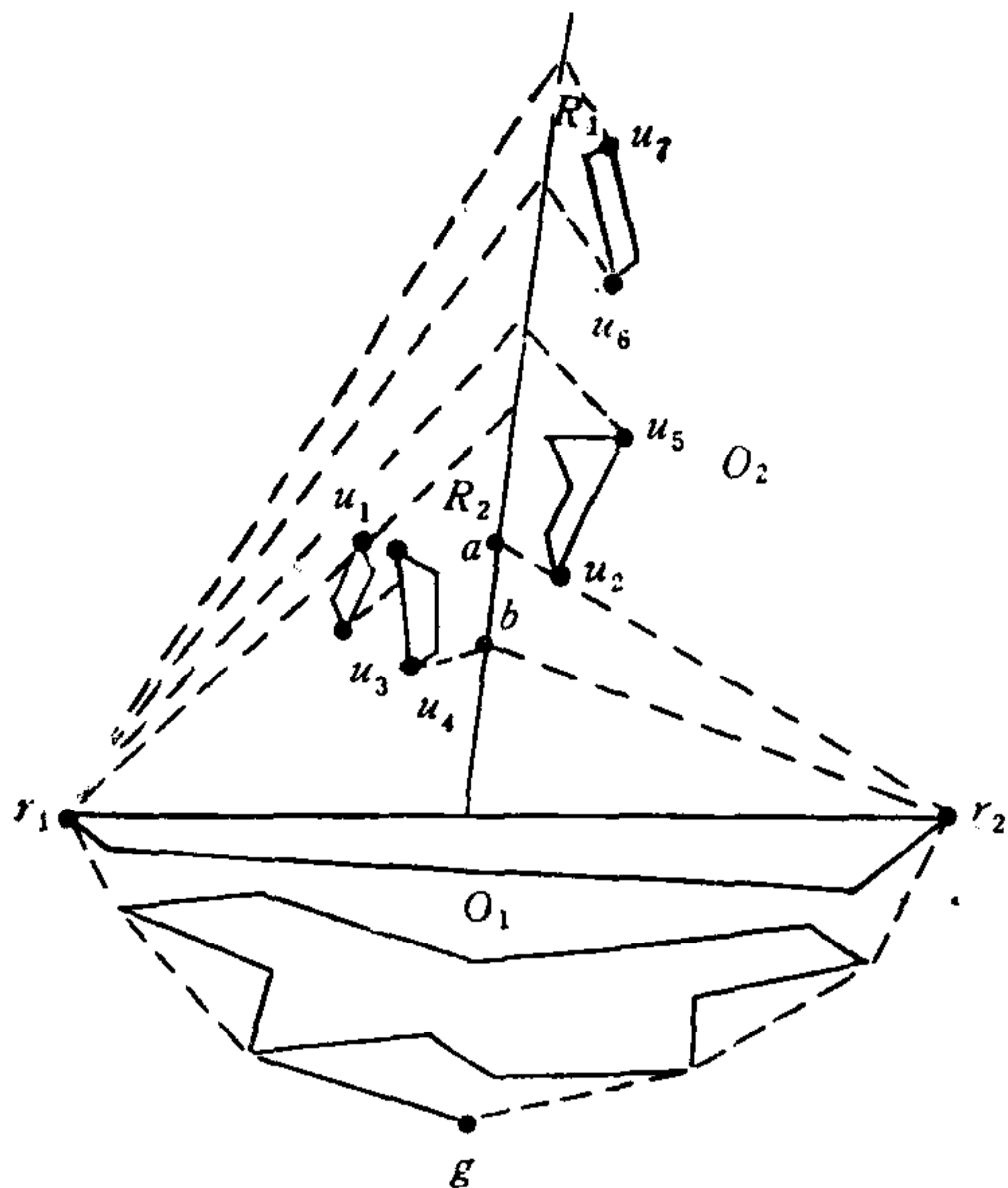


图 5 把楔添加到区域 R_1 和 R_2 中

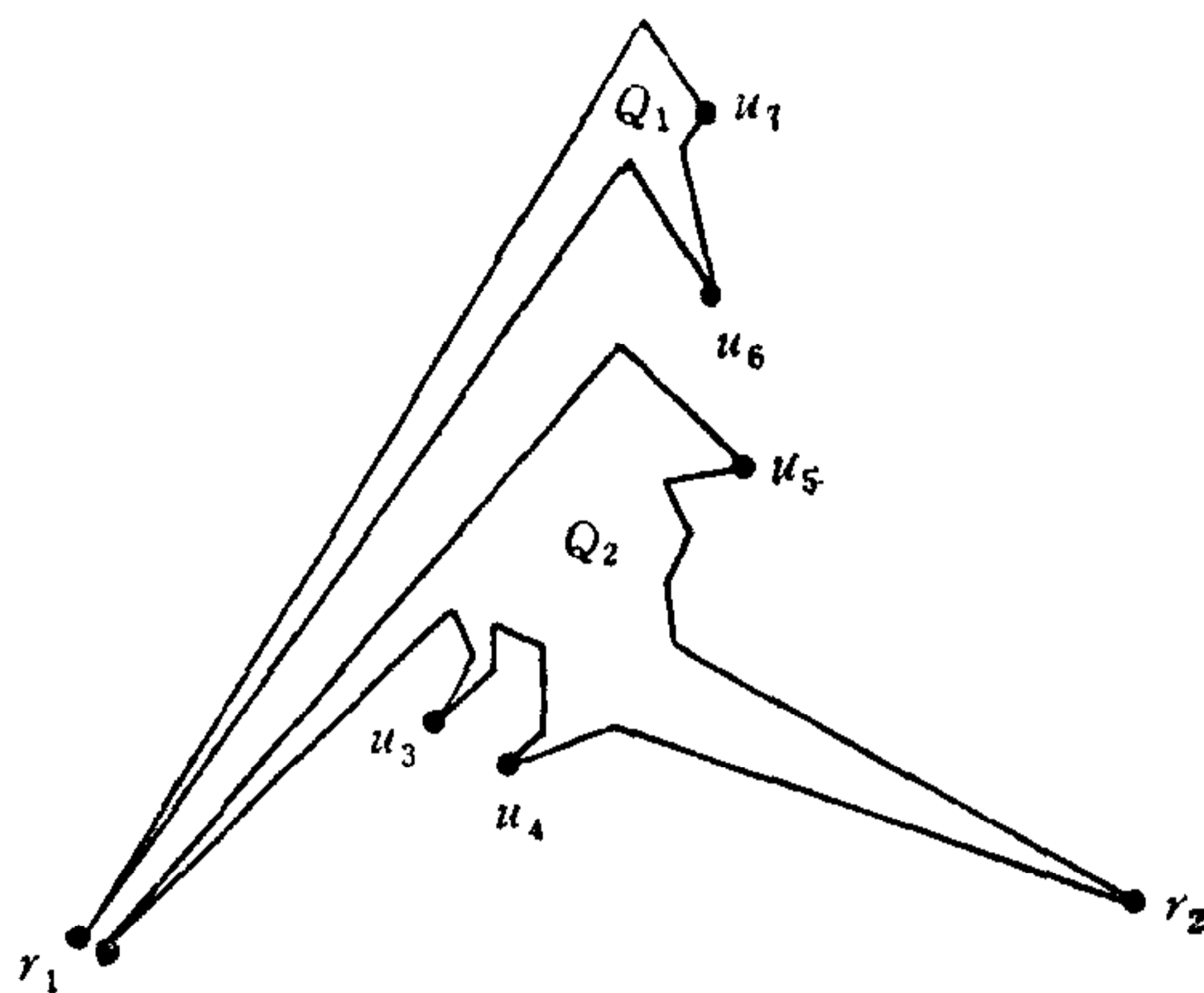


图 6 多边形区域 Q_1 和 Q_2

单多边形中求解大小为 n 的 WVD 的时间复杂性^[5].

算法 3. 非结构化环境 M 中商空间的构造。

输入: 目标 g , 非结构化环境 M 及 m 个互不连通的障碍物集 O (共 n 条边)。

输出: 商空间 D_o 。

step 1. 让 $O_1 = \emptyset, O_2 = O, k = 0, D_{O_1}$ 为平凡商空间(把 M 作为一个等价类);

step 2. 如果 $O_2 = \emptyset$, 算法中止, 否则转 step 3;

step 3. 利用算法 1, 计算 $V_g(O_1, O_2)$;

step 4. 利用算法 2, 计算 O_a , 并把商空间的构造扩展到不可达点集 U , 形成 D_{O_a} ;

step 5. 置 $O_1 \leftarrow O_a, O_2 \leftarrow O_2 - O_a, D_{O_1} \leftarrow D_{O_a}, k \leftarrow k + 1$, 转 step 2.

该算法结束时, k 的大小就是算法递归的次数, 称 k 为障碍空间的照明深度, 容易证明 $1 \leq k \leq m$ (m 为障碍物个数)。

定理 3. M 中商空间的构造可以在 $O(k * n * \log(n) + k * V(n))$ 内完成, 其中 n 为地形顶点数, k 为照明深度, $V(n)$ 为求解多边形中 Voronoi 图的时间。

6 结论

本文所讨论的路径规划问题的商空间表达法, 将复杂环境中路径规划问题归结为商空间的构造和商空间上的规划两个子问题。这里, 关键问题是商空间的构造。商空间中明显的结构特征和等价类区域规范的边界特征为商空间的构造提供了有力的基础。文中提出的商空间递归算法是富有启发性的, 其基本思想可以推广到一般的环境中。

参 考 文 献

- [1] Olin K E, Tseng D Y. Autonomous cross-country navigation. I EEE Expert, 1991.
- [2] Mitchell J S B, Payton D W, Keirsey D M. Planning and reasoning for autonomous vehicle control. *International Journal of Intelligent Systems*. 1987, 2: 129—198.
- [3] Alexander R S. Construction of optimal-path maps for homogeneous-cost-region path-planning problems. AD-A220 082, 1990.
- [4] Mitchell J S B. A new algorithm for shortest paths among obstacles in the plane. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*. 1991, 3: 83—106.
- [5] Aronov B. On the geodesic voronoi diagram of point sites in a simple polygon. Proceedings of the 3rd Annual ACM Symposium on computational geometry. Waterloo, Ontario, 1987, 39—49.

QUOTIENT SPACE REPRESENTATION OF PATH-PLANNING PROBLEMS

SHEN LINCHENG CHANG WENSEN

(Dept. of Automatic Control, National University of Defence
Technology, Changsha 410073)

ABSTRACT

This paper explores the quotient space representation of path-planning problems and its structure characterisation in unstructured environment by employing the theory of computational geometry, discusses the equivalent relation among optimal-paths and the basic ideology of quotient space approach, and develops a recursive construction algorithm of quotient space particularly for a unstructured environment associated with obstacles in homogeneous-cost background terrain. This method can be extended to the n -dimension space.

Key words: Path-planning, quotient space, optimal-path table, Voronoi figure.



沈林成 1965 年生于江苏省吴江市, 1986 年毕业于国防科技大学飞行力学专业, 1989 年在该校自动控制理论及其应用专业获硕士学位。现为该校自动控制系讲师、博士研究生。当前研究领域为智能机器人, 地形数据库系统、路径规划、神经网络及智能控制。



常文森 1961 年毕业于哈尔滨军事工程学院自动控制专业。现为国防科技大学自动控制系教授、博士生导师。目前正在从事智能机器人、磁悬浮控制技术等方面的研究工作。