第21卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 6
1995年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1995

GI/G/m 排队系统梯度估计的一种新方法[1)]

刘瑞华 涂奉生
(南开大学计算机与系统科学系 天津 300071)

摘 要

梯度估计是研究复杂离散事件动态系统的关键问题之一. 这里对 GI/G/m 排队系统提出一种新方法,在一次采样(仿真)的基础上,通过分析采样路径,可得到性能指标关于参数的局部函数表达式. 由此可直接求导,得到采样梯度,并证明了由该方法得到的梯度估计的无偏性. 该方法计算量小、精度高,还可以进一步拓广到其它系统上.

关键词: 局部函数表达式,排队系统,梯度估计,无偏性.

1 引言

对复杂的离散事件动态系统(DEDS)而言,纯分析的研究方法遇到困难,需要借助于仿真的途径. 众所周知,在参数优化设计中,估计系统性能指标相对于参数的梯度是个关键点. 假定性能指标为 $J(\theta)=E\{T(\theta,\omega)\}$,其中 θ 为参数,ω 为随机因素,$T(\theta,\omega)$ 是依赖于采样路径的性能测度. 根据大数定律,自然得到如下估计:

$$\frac{\mathrm{d}J(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\approx\frac{E\{T(\theta+\Delta\theta,\omega)\}-E\{T(\theta,\omega)\}}{\Delta\theta}\approx\frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}T(\theta+\Delta\theta,\omega_i)-\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}T(\theta,\omega_i')}{\Delta\theta},$$

这就是原始的 Monte Carlo 方法的基本思想. 这种方法的最大缺点是需要两次采样,因而计算量大且精度差. 近十几年来,许多学者致力于研究如何以较少的计算获得较高精度的梯度估计. 其中最有成效的工作是 Ho YC 等人提出的扰动分析法[1].在一次采样的基础上,通过分析采样路径来构造扰动路径,可得到扰动后系统的有关量,从而计算出梯度的近似估计值. 扰动分析法已被应用到各种 DEDS 系统上,如生产线[2,3]、排队网络[4,5]和排队系统[6,7]. 关于扰动分析的详细讨论见文[8].

这里讨论 GI/G/m 排队系统. 基于一次采样的基本思想,提出一种新的估计梯度的方法. 通过分析采样路径上各事件之间的关系,可以得到性能测度在给定参数点附近关

1) 国家科委 863 计划自动化领域 CIMS 主题项目,本文部分结果曾发表在 1993 年全国控制理论与应用年会上.
本文于 1993 年 6 月 7 日收到.

于该参数的局部函数表达式. 由此可直接求导得到采样梯度的精确值. 因而具有计算量小、精度高的优点. 作为这种方法理论上的保证——估计的无偏性,将用新的方法给以证明.

2 GI/G/m 排队系统描述

2.1 系统模型

一个典型的 GI/G/m 系统包含m个并列的服务台和一个公共队列. 假定顾客的排队规则是先到先排队，且最早完成服务的服务台接受队列中排队在前的顾客服务. 顾客到达间隔时间和服务时间均为相互独立的随机变量. 设 a_k 为第 k 个顾客的到达时间,假定 $a_0=0$, $v_k=a_k-a_{k-1}$ 为第 $k-1$ 个顾客与第 k 个顾客之间的到达时间间隔，它服从一般的概率分布. 所有服务台的服务时间均具有和随机变量 s 相同的概率分布. 假定 s 的分布函数为 $F(x,\theta)$,其中 θ 是参数，$\theta\in\Theta$. 易知，s 可由如下的逆变换实现:

$$s=F^{-1}(\theta,u)=\inf\{x:F(x,\theta)\geqslant u\},\tag{1}$$

其中 u 为[0,1]上的均匀分布.

2.2 性能测度

首先,参照文[6],定义系统的一次采样实现ω为如下的序列:

$$\omega=\{v_1,v_2,\cdots;u_{11},u_{12},\cdots;u_{m1},u_{m2},\cdots,\}.$$

其中 $u_{ik}\in[0,1]$ $(i=1,\cdots m,\ k=1,\cdots)$ 对应于 i 服务台对其第 k 个顾客的服务时间; ω代表了所有随机变量的一次实现.

考虑系统稳态运行时顾客的平均系统时间(即从到达到离开系统这一段时间)，假定共观察了N个顾客. 令 C_k 表示第 k 个顾客，x_k 为 C_k 的离去时间,则 C_k 的系统时间为 $T_k=x_k-a_k$,从而N个顾客的平均系统时间为

$$T(\theta,N,\omega)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}T_k=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-a_k).\tag{2}$$

定义系统的性能测度为

$$J(\theta,N)=E\{T(\theta,N,\omega)\}.\tag{3}$$

设 $1/\lambda=Ev_k$ (平均到达间隔)，$1/\mu=Es$ (平均服务时间). 由排队理论的结果知[9],当 $\lambda/m\mu<1$ 时,系统是稳定的. 故在式(2)中当N取足够大时，$J(\theta,N)$ 可近似代替稳态时的平均系统时间. 在以下的讨论中,认为N已知固定,为表述简单，在相应的式中省略 N.

3 局部函数表达式及梯度

本节将考虑性能指标 $J(\theta)$ 对于服务时间参数 θ 的梯度. 给定 θ 的某一值,在一次采样实现ω的基础上，系统的运行轨线即可确定. 假定有 n_i 个顾客经过服务台 $i(i=1,\cdots,m)$,显然 $N=\sum\limits_{i=1}^{m}n_i$. 考察第 i 个服务台,设它所服务的顾客构成了 k_i 个忙期，且

第 j 个忙期包含 n_{ij} 个顾客 $(j=1,\cdots,k_i)$，易知 $\sum_{j=1}^{k_i} n_{ij}=n_i$. 用 $C_{j1}^i,C_{j2}^i,\cdots,C_{jn_{ij}}^i$ 依序表示这 n_{ij} 个顾客. 用 a_{jl}^i,s_{jl}^i, x_{jl}^i 和 T_{jl}^i 分别表示顾客 C_{jl}^i 的到达、服务、完成和系统时间. 很清楚，任一顾客 C_k 都可找到唯一的 C_{jl}^i 与它对应. 从而式(2)可写为

$$T(\theta,\omega)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{l=1}^{n_{ij}}T_{jl}^i=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{l=1}^{n_{ij}}(x_{jl}^i-a_{jl}^i). \tag{4}$$

考虑服务时间 s_{jl}^i，由式(1)可给出 $s_{jl}^i=F^{-1}(\theta,u_{jl}^i),u_{jl}^i\in[0,1]$. 由于 $C^i{}_l$ 是服务台 i 上第 j 个忙期连续服务的第 l 个顾客，则有

$$x_{jl}^i=\sum_{t=1}^{l}s_{jt}^i+a_{j1}^i=\sum_{t=1}^{l}F^{-1}(\theta,u_{jt}^i)+a_{j1}^i,$$

系统时间 T_{jl}^i 为

$$T_{jl}^i=\sum_{t=1}^{l}F^{-1}(\theta,u_{jt}^i)+a_{j1}^i-a_{jl}^i.$$

从而对这个忙期的所有顾客，有

$$\sum_{l=1}^{n_{ij}}T_{jl}^i=\sum_{l=1}^{n_{ij}}\left[\sum_{t=1}^{l}F^{-1}(\theta,u_{jt}^i)+a_{j1}^i-a_{jl}^i\right]=G_j^i(\theta)+H_j^i. \tag{5}$$

其中

$$G_j^i(\theta)=\sum_{l=1}^{n_{ij}}(n_{ij}-l+1)F^{-1}(\theta,u_{jl}^i),\ H_j^i=(n_{ij}-1)a_{j1}^i-\sum_{l=2}^{n_{ij}}a_{jl}^i.$$

对第 i 个服务台的所有顾客，有

$$\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{l=1}^{n_{ij}}T_{jl}^i=\sum_{j=1}^{k_i}(G_j^i(\theta)+H_j^i)=G^i(\theta)+H^i. \tag{6}$$

其中

$$G^i(\theta)=\sum_{j=1}^{k_i}G_j^i(\theta),\ H^i=\sum_{j=1}^{k_i}H_j^i.$$

从而采样性能式(4)可写为

$$T(\theta,\omega)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}G^i(\theta)+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}H^i. \tag{7}$$

此式表明 $T(\theta,\omega)$ 在指定参数 θ 处的函数关系. 下面将进一步指出，在 θ 附近的一个邻域内，(7)式成立，即在一次采样的前提下，$T(\theta,\omega)$ 关于 θ 的局部函数关系成立，并由(7)式给出. 所以 $T(\theta,\omega)$ 关于 θ 的梯度可由式(7)直接求导而得.

假设 1. 服务时间 s 是连续分布随机变量. 由于假定所有的随机变量均相互独立，因此据该假设，对一给定常数，服务时间 s 在一次采样中恰好取到这个常数的概率为零.

对于所考虑的系统，定义两类事件：其一是顾客的到达事件，到达时间称为事件时间；其二是服务事件，定义完成服务时间为事件时间. 显然，一条采样路径完全是由所有这二类事件所决定的.

定义 1. 如果一条采样路径上的任二事件的时间不相等，则称该采样路径为允许路径.

由假设 1 推知,任二事件时间相等的概率为零,从而得如下命题.

命题 1. 几乎所有的采样实现 ω 决定的采样路径是允许路径.

给定一条允许采样路径，它包含 N 个到达事件和 N 个服务事件. 按这 $2N$ 个事件发生的时间顺序进行排列,记为 $E=\{E_i\}_{i=1}^{2N}$, 其中 E_i 为按序排列的第 i 个事件,则该采样路径由 E 唯一决定. 而对任一事件 E_i 不外乎是以下两种情况(对事件 E_i 的解释):

1) 到达事件,第 k 个顾客到达;

2) 服务事件,第 i 个服务台对第 k 个顾客服务.

定义 2. 若相应的事件具有同样的解释,则两条允许采样路径 $E^1=\{E_i^1\}_{i=1}^{2N}$ 和 $E^2=\{E_i^2\}_{i=1}^{2N}$ 为相似的.

显然，对两条相似允许采样路径 E^1 和 E^2, 由它们决定的性能指标 $T^1(\theta_1,\ \omega_1)$ 和 $T^2(\theta_2,\ \omega_2)$ 具有相同的形如式 (7) 的表达式结构. 只是其中系统时间 T_{jl}^i 可能是不相同的.

给定参数 θ,让 θ 作一微小变动,成为 $\theta+\Delta\theta$, 则由式(1)知对应的服务时间改变为

$$s_{jl}^i(\theta+\Delta\theta,u_{jl}^i)-s_{jl}^i(\theta,u_{jl}^i)=F^{-1}(\theta+\Delta\theta,u_{jl}^i)-F^{-1}(\theta,u_{jl}^i).$$

考虑参数取 θ 的一条允许采样路径，假定只有 θ 变为 $\theta+\Delta\theta$, 而其它所有的量保持不变,由此得到一条扰动路径[1]. 为了保证扰动路径与原路径的相似性,作如下假设:

假设 2. 对几乎所有的 u, $F^{-1}(\theta,\ u)$ 关于 θ 连续.

据此,得如下结果:

命题 2. 对给定参数为 θ 的允许采样路径,存在 θ 的一个邻域,即存在 $\varepsilon>0$, 使得对 $(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)$ 中所有的 θ 相对应的扰动路径是允许路径，且和原路径相似.

由以上讨论可知,式(7)得到的函数关系式在 θ 的一个邻域内不变，称它为性能指标 $T(\theta,\omega)$ 关于参数 θ 的一个局部函数表达式. 从而，$T(\theta,\omega)$关于 θ 在 θ 点处的导数值可直接求出:

$$\frac{\mathrm{d}T(\theta,\omega)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}G^i(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{l=1}^{n_{ij}}(n_{ij}-l+1)\frac{\mathrm{d}F^{-1}(\theta,u_{jl}^i)}{\mathrm{d}\theta}. \tag{8}$$

为了保证上式中 $\dfrac{\mathrm{d}F^{-1}(\theta,u_{jl}^i)}{\mathrm{d}\theta}$ 存在,把假设 2 改为

假设 2′. 对几乎所有的 u, $F^{-1}(\theta,u)$ 关于参数 θ 可微.

综前所述,得到结论：对于几乎所有的采样路径，采样性能测度(2)关于服务时间参数 θ 的局部函数表达式 $T(\theta,\omega)$及其在 θ 处的导数存在,且可由该表达式直接求导得到. 这就保证了几乎在每一次仿真过程中,都能得到局部函数表达式.

进一步,考虑性能测度(3),有

$$\frac{\mathrm{d}J(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}E\{T(\theta,\omega)\}}{\mathrm{d}\theta}. \tag{9}$$

如果求导数和求期望可交换,则有

$$\frac{\mathrm{d}J(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=E\left\{\frac{\mathrm{d}T(\theta,\omega)}{\mathrm{d}\theta}\right\}. \tag{10}$$

由大数定律,取足够大的整数 M,则

$$\frac{\mathrm{d}J(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \approx \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\frac{dT(\theta,\ \omega_k)}{\mathrm{d}\theta}$$
$$= \frac{1}{M}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k(\omega_k)}\sum_{l=1}^{n_{ij}(\omega_k)}[n_{ij}(\omega_k)-l+1]\frac{\mathrm{d}F^{-1}(\theta,u_{il}^{j}(\omega_k))}{\mathrm{d}\theta}$$
$$= \frac{1}{N'}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{l=1}^{n_{ij}}(n_{ij}-l+1)\frac{\mathrm{d}F^{-1}(\theta,u_{il}^{j})}{\mathrm{d}\theta}, \tag{11}$$

其中 $N' = MN$。后一等式表示M次N个顾客仿真估计,可由$M\times N$个顾客一次仿真估计近似得到.

4 无偏性分析

同扰动分析一样,式(10)所要求的交换性,

$$\frac{\mathrm{d}E\{T(\theta,\omega)\}}{\mathrm{d}\theta} = E\left\{\frac{\mathrm{d}T(\theta,\omega)}{\mathrm{d}\theta}\right\} \tag{12}$$

保证了由局部函数表达式方法所得梯度估计((11)式右端)是无偏的. 对此,现有文献已给出了许多结果[10]. 这里,针对所考虑的系统,给出一种不同于其它文献的方法,即利用直接分析服务完成时间的演变关系,来证明无偏性.

考虑式(2),易知条件(12)等价于

$$\frac{\mathrm{d}Ex_k}{\mathrm{d}\theta} = E\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}\theta},\ k=1,\cdots. \tag{13}$$

把假设 2′ 包含在内,对服务时间 s 做进一步的以下假设.

假设 3.

1) $F^{-1}(\theta,u)$ 是θ的可微函数,对 $a.s.u\in[0,1]$;

2) $s,\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ 可积,即 $E|s|<\infty,\ E\left|\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right|<\infty$;

3) $\dfrac{\mathrm{d}Es}{\mathrm{d}\theta} = E\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$;

4) s 作为 θ 与 u 的二元函数,是连续的.

这个假设具有一般性,容易验证,许多常见的分布,如负指数等都满足该条件[6].

利用数学归纳法,可以得到如下结果.

引理 1. $x_{m+k}(k\geqslant 1)$ 有如下表示式:

$$x_{m+k} = s_{m+k} + \max\{a_{m+k},\min_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m+k-2}[x_{m+k-1},\max(x_{j_1},\cdots,x_{j_k})]\},k\geqslant 1. \tag{14}$$

由式(14)易知, x_n 可表示为

$$x_n = s_n + \max_{1\leqslant i\leqslant f(n)}[a_n,\ \min_{1\leqslant j\leqslant t_i^n}(\xi_{ij}^n)]. \tag{15}$$

其中 $f(n)$ 为 max[ ] 中取 min( )的项数, $t_i^n(i=1,\cdots,f(n))$ 为每一 min( )中的项数; $\xi_{ij}^n(n=1,\cdots;i=1,\cdots,f(n);j=1,\cdots,t_i^n)$ 具有如下形式:

$$\xi_{ij}^n = s_{ij}^n(1) + s_{ij}^n(2) + \cdots + s_{ij}^n(r_{ij}^n) + a_{ij}^n. \tag{16}$$

其中 r_{ij}^n 为项数，$s_{ij}^n(1),\cdots,s_{ij}^n(r_{ij}^n)$ 为服务时间 $s_1,\cdots,s_{n-1}$ 中的某些个；a_{ij}^n 是到达时间 $a_1,\cdots,a_{n-1}$ 中的某个.

由式(1)知，每一服务时间 $s_{ij}^n(l)$ 均可由[0,1]上的均匀分布产生，即

$$s_{ij}^n(l)=F^{-1}(\theta,u_{ij}^n(l)),\quad u_{ij}^n(l)\in[0,1]. \tag{17}$$

由于所有 ξ_{ij}^n 中涉及的服务时间为 $s_1,\cdots,s_{n-1}$，且这 $n-1$ 个随机变量相互独立，故考虑乘积空间 $\Omega=[0,1]^{n-1}$，由式(16)及(17)知：

$$\xi_{ij}^n=\sum_{l=1}^{r_{ij}^n}F^{-1}(\theta,u_{ij}^n(l))+a_{ij}^n$$

为定义在 Ω 上的函数(由于到达时间 a_{ij}^n 与参数 θ 无关，故这里不妨把 a_{ij}^n 看为常数). 令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=[u_1,\cdots,u_{n-1}]^T,\\ g(\theta,\boldsymbol{u})&=\max_{1\leqslant i\leqslant f(n)}[a_n,\min_{1\leqslant j\leqslant t_i^n}(\xi_{ij}^n)]\\ &=\max_{1\leqslant i\leqslant f(n)}\left\{a_n,\min_{1\leqslant j\leqslant t_i^n}\left[\sum_{l=1}^{r_{ij}^n}F^{-1}(\theta,u_{ij}^n(l))+a_{ij}^n\right]\right\}.\end{aligned}\tag{18}$$

由假设 3 知，$g(\theta,\boldsymbol{u})$ 是 Ω 上关于 $\boldsymbol{u}$ 的连续函数.

考察 $a_n,\xi_{11}^n,\cdots,\xi_{1t_1^n}^n,\cdots,\xi_{f(n)1}^n,\cdots,\xi_{f(n)t_{f(n)}^n}^n$，一共 $\sum_{i=1}^{f(n)}t_i^n+1\triangleq t$ 个，这相当于 Ω 空间上的 t 个函数. 把它们按大小排列，其所有排列的可能共有 $t!$ 个. 对每一个确定的排列，则确定了 Ω 空间上的一个子区域，且 $g(\theta,\boldsymbol{u})$ 在该区域上取固定值，即有

$$g(\theta,\boldsymbol{u})=\begin{cases}a_n, & \boldsymbol{u}\in\Omega_0^n,\\ \sum_{l=1}^{r_{ij}^n}F^{-1}(\theta,u_{ij}^n(l))+a_{ij}^n, & \boldsymbol{u}\in\Omega_{ij}^n,\ i=1,\cdots,f(n);j=1,\cdots,t_i^n.\end{cases}\tag{19}$$

其中 $\Omega_0^n,\Omega_{ij}^n(i=1,\cdots,f(n);j=1,\cdots,t_i^n)$ 构成 Ω 的一个分割，即

$$\Omega=\Omega_0^n+\sum_{i=1}^{f(n)}\sum_{j=1}^{t_i^n}\Omega_{ij}^n.$$

显然，这些分割集是由前述的 t 个函数的所有 $t!$ 个排列所唯一决定的.

给 θ 一微小变动 $\theta+\Delta\theta$，则同样可得

$$g(\theta+\Delta\theta,\boldsymbol{u})=\begin{cases}a_n, & \boldsymbol{u}\in\hat{\Omega}_0^n,\\ \sum_{l=1}^{r_{ij}^n}F^{-1}(\theta+\Delta\theta,u_{ij}^n(l))+a_{ij}^n, & \boldsymbol{u}\in\hat{\Omega}_{ij}^n\ i=1,\cdots,f(n);j=1,\cdots,t_i^n.\end{cases}\tag{20}$$

令 $\bar{\Omega}_0^n=\Omega_0^n\cap\hat{\Omega}_0^n$，$\bar{\Omega}_{ij}^n=\Omega_{ij}^n\cap\hat{\Omega}_{ij}^n$，且 $\Omega^*=\Omega-\left(\bar{\Omega}_0^n+\sum_{i=1}^{f(n)}\sum_{j=1}^{t_i^n}\bar{\Omega}_{ij}^n\right)$. 则可容易地得到如下两个引理.

引理 2. Ω^* 的概率(面积)与 $\Delta\theta$ 是同阶无穷小，即 $\lim\limits_{\Delta\theta\to0}\dfrac{P_r(\Omega^*)}{\Delta\theta}=\gamma^*$，其中 γ^* 为某个常数.

引理 3. $(n-1)$ 重积分 $\iint\limits_{\Omega^*}\cdots\int[g(\theta+\Delta\theta,\boldsymbol{u})-g(\theta,\boldsymbol{u})]\mathrm{d}\sigma$ 是 $\Delta\theta$ 的高阶无穷小,即

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\iint\limits_{\Omega^*}\cdots\int[g(\theta+\Delta\theta,\boldsymbol{u})-g(\theta,\boldsymbol{u})]\mathrm{d}\sigma}{\Delta\theta}=0.$$

定理 1.

$$\frac{\mathrm{d}Eg(\theta,\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}\theta}=E\frac{\mathrm{d}g(\theta,\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}\theta}.$$

证明. 由于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Eg(\theta,\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}\theta}&=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{Eg(\theta+\Delta\theta,\boldsymbol{u})-Eg(\theta,\boldsymbol{u})}{\Delta\theta}\\&=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\iint\limits_{\Omega}\cdots\int g(\theta+\Delta\theta,\boldsymbol{u})\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{\Omega}\cdots\int g(\theta,\boldsymbol{u})\mathrm{d}\sigma}{\Delta\theta}\\&=\lim_{\Delta\theta\to 0}\left\{\iint\limits_{\bar{\Omega}_0^n}\cdots\int(a_n-a_n)\mathrm{d}\sigma+\sum_{i=1}^{f(n)}\sum_{j=1}^{t_i^n}\iint\limits_{\bar{\Omega}_{ij}^n}\cdots\int\sum_{l=1}^{r_{ij}^n}[F^{-1}(\theta\right.\\&\qquad\left.+\Delta\theta,u_{ij}^n(l))-F^{-1}(\theta,u_{ij}^n(l))]\mathrm{d}\sigma\right\}\Big/\Delta\theta\\&\qquad+\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\iint\limits_{\Omega^*}\cdots\int[g(\theta+\Delta\theta,\boldsymbol{u})-g(\theta,\boldsymbol{u})]\mathrm{d}\sigma}{\Delta\theta}\\&=\sum_{i=1}^{f(n)}\sum_{j=1}^{t_i^n}\lim_{\Delta\theta\to 0}\iint\limits_{ij}^{n}\cdots\int\sum_{l=1}^{r_{ij}^n}\left[\frac{F^{-1}(\theta+\Delta\theta,u_{ij}^n(l))-F^{-1}(\theta,u_{ij}^n(l))}{\Delta\theta}\right]\mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

据假设 3 之 3) 知上式等于

$$\sum_{i=1}^{f(n)}\sum_{j=1}^{t_i^n}\iint\limits_{\Omega_{ij}^n}\cdots\int\sum_{l=1}^{r_{ij}^n}\frac{\mathrm{d}F^{-1}(\theta,u_{ij}^n(l))}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\sigma.\tag{21}$$

这里用到了 $\lim\limits_{\Delta\theta\to 0}\bar{\Omega}_{ij}^n=\Omega_{ij}^n$. 又由式(19)显然有

$$\frac{\mathrm{d}g(\theta,\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}\theta}=\begin{cases}\sum\limits_{l=1}^{r_{ij}^n}\dfrac{\mathrm{d}F^{-1}(\theta,u_{ij}^n(l))}{\mathrm{d}\theta}, & \boldsymbol{u}\in\Omega_{ij}^n, i=1,\cdots,f(n); j=1,\cdots,t_i^n.\\ 0 & ,\ \boldsymbol{u}\in\Omega_0^n.\\ \text{不存在} & ,\ \boldsymbol{u}\text{ 在区域交界上}.\end{cases}$$

从而有

$$E\frac{\mathrm{d}g(\theta,\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}\theta}=\sum_{i=1}^{f(n)}\sum_{j=1}^{t_i^n}\iint\limits_{\Omega_{ij}^n}\cdots\int\sum_{l=1}^{r_{ij}^n}\frac{\mathrm{d}F^{-1}(\theta,u_{ij}^n(l))}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\sigma.\tag{22}$$

比较式(21)与(22),定理得证.

由于 $x_n = s_n + g(\theta,\mathbf{u})$，故有

推论. $\dfrac{\mathrm{d}Ex_n}{\mathrm{d}\theta} = E\dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}\theta}$.

5　实验结果

这里通过几个仿真实验，来验证前述方法的有效性．一般的随机估计用一定次数重复仿真结果的平均值来获得较高的置信度．这里转化成由足够长度的一次仿真得到梯度估计(见式(11))． 在仿真中取顾客数 $N = 200,000$ 个．由于所讨论系统的服务台个数不超过 10，因而可以认为，当系统运行了 100,000 个顾客后，完全反映了稳态行为．所以在实验中用 N 从 100, 000 到 200, 000 间的逐个数估计得到的梯度 (共 100,000 个)． 从它与理论值或平均值的比较可以看出，这种方法具有很高的置信度．

例 1. 考虑 M/M/m 系统．对此情形，解析结果可在文献[9]中找到．设 $1/\lambda$ 为平均到达间隔时间，$1/\mu$ 为平均服务时间，则 $\rho = \lambda/m\mu$ 为服务强度系数．可以估算出系统时间 T 对于平均服务时间 $\theta(=1/\mu)$ 的梯度．仿真中取 $\lambda = 0.02$ (平均到达间隔为 50)，ρ 取 0.2，0.5，0.8 分别表示轻阻、中阻和重阻三种情况．表 1 给出了 $m = 5$ 的实验及理论结果.

表 1　$M/M/5$ 实验及理论结果

服务强度	方法	T	$\mathrm{d}T/\mathrm{d}\theta$
$\rho = 0.2$ ($\theta = 50$)	实验 理论	50.0479 ± 0.1355 50.0479	1.0053 ± 0.0025 1.0053
$\rho = 0.5$ ($\theta = 125$)	实验 理论	131.5186 ± 0.3523 131.5186	1.280 ± 0.0107 1.280
$\rho = 0.8$ ($\theta = 200$)	实验 理论	310.8225 ± 8.0955 310.8225	5.3130 ± 0.3760 5.3130

注. 表中的 ± 数是 100,000 次估计中与理论值的最大出现偏差.

例 2. 考虑 GI/G/m，其中到达间隔时间 v_k 服从由三级负指数分布构成的爱尔朗分布，其分布密度函数为

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^3}{2} x^2 e^{-\alpha x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

服务时间服从如下的韦伯分布：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta^2} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

这时，解析结果不能得到．设平均到达时间间隔为 100，考虑平均系统时间 T 关于 θ 的梯度 (这里平均服务时间为$\left.\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\theta\right)$．表 2 给出了 $m = 5$ 的实验结果.

表 2 GI/G/5 实验结果

服务强度	θ	T	$dT/d\theta$
$\rho=0.2$	112.8379	99.9247±0.1328	0.8856±0.0011
$\rho=0.5$	282.0948	251.0248±0.3370	0.9199±0.0012
$\rho=0.8$	451.3517	452.2253±1.4415	1.9291±0.0276

注. 表中估计值是 100,000 次实验的平均值,"±"数是所有估计中与该平均值的最大偏离.

从上面这些结果可以看出，局部函数表达式在估计性能测度关于参数梯度时的有效性.

6 结束语

本文针对 GI/G/m 排队系统,提出了局部函数表达式方法. 从本质上讲，它是无穷小扰动分析的另一种表现. 近来，国外有关文献也涉及到了类似的思想[11,12]. 而本文是第一次明确提出采样性能测度的局部函数表达式,并通过对它求导得到采样梯度. 由此，有可能进一步对性能函数的全局表达式给出近似逼近，从而对系统性能得到更深层次的结果. 另一方面,这种方法将有助于有效的随机优化算法的研究.

参 考 文 献

[1] Ho Y C, C Cassandras. A new approach to the analysis of discrete event dynamic system. *Automatica*, 1983, **19**(2): 149—167.

[2] Cao X R, Ho Y C. Sensitivity analysis and optimization of throughput in a production line with blocking. *IEEE Trans. on AC.*, 1987, **32**(11): 959—967.

[3] Ho Y C, M A Eyler, T T Chien. A new approach to determine parameter sensitivities of transfer lines. *Management Science*, 1983, **29**(6): 700—714.

[4] Ho Y C, Cao X R. Peturbation analysis and optimization of queueing networks. *J. Optimization Theory and Applications*, 1983, **40**(4): 559—582.

[5] Ho Y C, Cao X R. Performance sensitivity to routing changes in queueing networks and flexible manufacturing system using perturbation analysis. *IEEE J. Robotics and Automation*, 1985, 1(4): 165—172.

[6] Suri R, Zazanis M A. Perturbation analysis gives strongly consistent sensitivity estimates for the M/G/1 queue. *Management Science*, 1988, 34(1): 39—64.

[7] Suri R. Perturbation analysis: The state of the art and research issues explained via the GI/G/1 queue. *Proceedings of IEEE*, 1989, **77**(1): 183—206.

[8] Ho Y C, Cao X R. Perturbation analysis of discrete event dynamic systems. Boston: Kluwer Academic Pub., 1991.

[9] Gross D, C M Harris. Fundamentals of queueing theory. John Wiley & Sons Pub., 2nd edition, 1985.

[10] Glasserman P. Gradient estimation via perturbation analysis. Boston: Kluwer Academic Pub., 1991.

[11] Fu Michael C, Hu Jian Qiang. Consistency of infinitesimal perturbation analysis for the GI/G/m queue. *European Journal of Operational Research*, 1991, **54**: 121—139.

[12] Hu Jian Qiang, Strong consistency of sample path derivatives, Proceedings of The First Chinese World Congress on Intelligent Control & Intelligent Automation, 1668—1682, Science Press, 1993.

A NEW APPROACH TO ESTIMATE THE GRADIENT OF THE GI/G/m QUEUEING SYSTEMS

LIU RUIHUA　　TU FENGSHENG

(Department of Computer and System Sciences, Nankai University, Tianjin 300071)

ABSTRACT

Evaluating the performance gradient is an important issue in the study of the complicated discrete event dynamic systems (DEDS). In this paper we propose a new approach to determine the gradient for the GI/G/m queueing systems. Based on a single sample realization of the system, an explicit function expression of the performance measure in the vicinity of a given point of the parameter, i.e., Local Function Expression, is obtained by analysing the sample trajectory, and then the corresponding gradient is calculated by straightforwardly differentiating this function. Therefore, this method can give highly accurate estimation with less computation. The unbiasedness of the estimate is analytically proved. Furthermore, this approach can be extended to other DEDS.

Key words: Local function expression, queueing system, gradient estimation, unbiasedness.

刘瑞华　1963 年出生，1988 年在南开大学获硕士学位，现在该校计算机与系统科学系任讲师，在职博士生. 主要研究兴趣为离散事件动态系统理论、自适应控制等.

涂奉生　1937 年出生，1961 年毕业于南开大学数学系，现为该校计算机与系统科学系教授、CIM 研究室主任. 已发表论文 50 多篇. 主要研究兴趣为离散事件动态系统理度、调度理论、线性系统理论等.