第21卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 6
1995年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1995

一类非因果系统的最优滤波与平滑

高 江 戴冠中
(西北工业大学自控系 西安 710072)

摘 要

研究一类非因果系统的最小方差滤波与平滑. 引入前、后向马尔可夫过程的等价性定理，得到了等价系统实现最优滤波的条件，并给出最优滤波和平滑算法. 该算法可应用于一系列实际问题中.

关键词: 非因果系统，马尔可夫过程，卡尔曼滤波，最优平滑.

1 引言

非因果系统存在于一些实际问题中，如地球物理勘探中认为，测量信号是地震子波与反射序列的卷积:

$$z(k)=V(k)*u(k)+n(k). \tag{1}$$

其中 $V(k)$，$u(k)$，$n(k)$ 分别为子波、反射系数和观测噪音序列. 为提高地质资料的分辨率，需使用可控震源，其输入子波是振荡的波形. 可控震源资料与常规地震资料的处理手段不同，为避免子波干扰和压制噪音，先将测量信号与子波信号作相关，得到输出为

$$Z_1(z)=V(z^{-1})Z(z)=V(z^{-1})V(z)U(z)+V(z^{-1})N(z), \tag{2}$$

时域形式为

$$z_1(k)=h(k)*u(k)+n_1(k). \tag{3}$$

其中

$$h(k)=V(-k)*V(k),\quad n_1(k)=V(-k)*n(k). \tag{4}$$

由(3)，(4)式可知，这是一个非因果系统. 非因果系统也存在于吸收光谱学和宇空数据分析等领域[1].

非因果系统的最优滤波问题通常都是在频率域中采用同态滤波等方法解决的[1,2]，七十年代对马尔可夫过程等价关系的研究，为在状态空间中解决这类问题创造了条件，文[3]在这方面则更进了一步.

本文首先引入 Markov 过程等价关系定理，得到非因果系统的状态空间实现，进而研究实现最优滤波与平滑的条件，最后给出非因果系统的滤波与平滑算法.

本文于1993年12月22日收到.

2 马尔可夫过程的等价性

讨论线性定常系统的等价系统,其结论易推广到时变线性系统[4-6]. 考虑下面的线性随机系统:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}_f(k+1) &= \Phi_f \boldsymbol{x}_f(k) + \Upsilon_f \boldsymbol{u}_f(k), \\ \boldsymbol{y}_f(k) &= H_f' \boldsymbol{x}_f(k). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中:

$$\left.\begin{aligned} &E\boldsymbol{u}_f(k) = 0,\ E\{\boldsymbol{u}_f(i)\boldsymbol{u}_f'(j)\} = Q(i)\delta_{ij}, \\ &E\boldsymbol{x}_f(0) = 0,\ E\{\boldsymbol{x}_f(0)\boldsymbol{x}_f'(0)\} = P_f(0), \\ &E\{\boldsymbol{x}_f(0)\boldsymbol{u}_f'(k)\} = 0,\ 0 \leqslant k < l. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

找到一反向系统，使两系统在某种统计意义下等价的问题称为马尔可夫过程的等价性问题. 对此问题的研究多局限于二阶统计等价,即确定后向系统:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}_b(k) &= \phi_b(k+1)\boldsymbol{x}_b(k+1) + \Upsilon_b \boldsymbol{u}_b(k+1), \\ \boldsymbol{y}_b(k) &= H_b' \boldsymbol{x}_b(k), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

使得满足下列条件:

$$\left.\begin{aligned} &E\{\boldsymbol{x}_b(l)\boldsymbol{u}_b'(k)\} = 0,\ 0 < k \leqslant l, \\ &E\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_f(i)\\ \boldsymbol{y}_f(i)\end{bmatrix}[\boldsymbol{x}_f'(j)\boldsymbol{y}_f'(j)] = E\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_b(i)\\ \boldsymbol{y}_b(i)\end{bmatrix}[\boldsymbol{x}_b'(j)\boldsymbol{y}_b'(j)]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

上述问题虽具有理论意义，研究也较为成熟，但难以应用于实际. 原因在于实际问题中常常不仅要求两系统的统计特性相当，更希望系统具有相同的状态轨迹. Verghese 和 Kailath[5]在较弱的约束下用代数变换推导,得到了前、后向 Markov 过程具有相同样本轨迹的条件. 本文沿这条途径推导非因果系统的最优滤波与平滑算法. 首先引入下述定理[5].

定理 1. 设 ϕ_f 非奇异，$P_f(k)$ 可逆,当且仅当下述条件成立,系统(5),(6)和(7)满足条件(8),且具有相同的样本轨迹:

(1) $\phi_b(k+1) = \phi_f^{-1} - \phi_f^{-1}\Upsilon_f Q(k)\Upsilon_f' P_f^{-1}(k+1)$

$$= P_f(k)\phi_f' P_f^{-1}(k+1), \tag{9a}$$

(2) $$\boldsymbol{u}_b(k+1) = \boldsymbol{u}_f(k) - Q(k)\Upsilon_f' P_f^{-1}(k+1)\boldsymbol{x}_f(k+1), \tag{9b}$$

(3) $$\Upsilon_b = -\phi_f^{-1}\Upsilon_f, \tag{9c}$$

(4) $$H_b = H_f. \tag{9d}$$

由上述定理易看出,即使正向系统是定常的,其等价的反向系统一般地是时变的; 输入为平稳信号的正向系统,其等价系统的输入一般是非平稳的.

3 最小方差滤波与平滑

考虑非因果系统

$$z(k)=\sum_{i=1}^{k} h_f(i)u(k-i)+\sum_{i=0}^{l-k-1} h_b(i)u(k+i)+n(k)$$
$$\triangleq y_f(k)+y_b(k)+n(k). \tag{10}$$

满足条件:

$$Eu(k)=0,\ E\{u(k)u'(j)\}=Q(k)\delta_{kj},$$
$$0\leqslant k,\ j<l. \tag{11}$$

用文[3]的实现方法，设 y_b 的状态空间实现为 $\{\phi_b,\Upsilon_b,H_b'\}$，即

$$\boldsymbol{x}_b(k)=\phi_b\boldsymbol{x}_b(k+1)+\Upsilon_b\boldsymbol{u}(k),$$
$$y_b(k)=H_b'\boldsymbol{x}_b(k). \tag{12}$$

满足条件:

$$E\boldsymbol{x}_b(l)=0,\ E\{\boldsymbol{x}_b(l)\boldsymbol{x}_b'(l)\}=P_b(l),$$
$$E\{\boldsymbol{x}_b(l)\boldsymbol{u}'(k)\}=0, 0\leqslant k<l. \tag{13}$$

注意到，若系统

$$y_f'(k)=\sum_{i=0}^{k} h_f(i)u(k-i)$$

的状态空间实现为 $\{\phi_f,\Upsilon_f,H_f'\}$，则 y_f 用状态空间表示为

$$\boldsymbol{x}_f(k+1)=\phi_f\boldsymbol{x}_f(k)+\phi_f\Upsilon_f\boldsymbol{u}(k),$$
$$y_f(k)=H_f'\boldsymbol{x}_f(k). \tag{14}$$

满足条件:

$$E\boldsymbol{x}_f(0)=0,\ E\{\boldsymbol{x}_f(0)\boldsymbol{x}_f'(0)\}=P_f(0),$$
$$E\{\boldsymbol{x}_f(0)\boldsymbol{u}'(k)\}=0,\ 0\leqslant k<l. \tag{15}$$

应用定理 1，并令

$$\boldsymbol{x}_r(k)=P_f^{-1}(k)\boldsymbol{x}_f(k),$$

状态扩展得下列反向系统，它等价于系统(10):

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_b(k)\\ \boldsymbol{x}_r(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_b & \Upsilon_bQ(k)\Upsilon_f'\phi_f'\\ 0 & \phi_f'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_b(k+1)\\ \boldsymbol{x}_r(k+1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Upsilon_b\\ -P_f^{-1}(k)\Upsilon_f\end{bmatrix}u_b(k+1),$$
$$z(k)=[H_b'\quad H_f'P_f(k)]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_b(k)\\ \boldsymbol{x}_r(k)\end{bmatrix}+n(k). \tag{16}$$

其中

$$u_b(k)=u(k-1)-Q(k-1)\Upsilon_f'\phi_f'P_f^{-1}(k)\boldsymbol{x}_f(k), \tag{17}$$

初始条件为

$$E\{[\boldsymbol{x}_b'(l)\ \ \boldsymbol{x}_r'(l)]'\}=0,$$
$$P(l)=E\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_b(l)\\ \boldsymbol{x}_r(l)\end{bmatrix}[\boldsymbol{x}_b'(l)\quad \boldsymbol{x}_r'(l)]\right\}=\begin{bmatrix}P_b(l) & 0\\ 0 & P_f^{-1}(l)\end{bmatrix}. \tag{18}$$

为研究上述系统的最优滤波与平滑问题，首先给出如下推论。

推论 1. 设 $P_f(k)$ 可逆，则(17)式中的 $u_b(k)$ 为白噪序列；若同时有 $\boldsymbol{u}(k)$，$\boldsymbol{x}_f(0)$ 均服从高斯分布，则 $u_b(k)$ 是高斯随机变量；若 $\boldsymbol{x}_b(l)$ 与 $\boldsymbol{x}_f(0)$ 无关，则合成系统(16)—(18)的输入与初始状态无关。

证明. 文[5]采用正交投影的方法给出了 $u_b(k)$ 是白噪序列的证明,这里只需证明后两点。

首先由(17)式易看出，$u_b(k)$ 是 $x_f(0)$ 与 $u(k)(k=0,1,\cdots,k-1)$ 的线性组合，且 $x_f(0),u(k)(k=0,\cdots,k-1)$ 相互独立;由推论的条件知 $u_b(k)$ 也服从高斯分布。

由上述等价性定理，$u_b(k)$ 与 $x_r(l)$ 无关. 由于 $u_b(k)$ 是 $x_f(0)$ 与 $u(k)(k=0,\cdots,k-1)$ 的线性组合，且 $u(k)$ 与 $x_b(l)$ 无关. 因此只要 $x_b(l)$ 与 $x_f(0)$ 无关，则 $x_b(l)$ 与 $u_b(k)$ 无关,进而合成系统的输入与初始状态无关. 证毕.

由计算可知:

$$E\{u_b(k)u_b'(k)\}=Q(k-1)-Q^2(k-1)Y_f'\phi_f'P_f^{-1}(k)\phi_fY_f. \tag{19}$$

在式(16)—(18)中,令

$$x(k)=\begin{bmatrix}x_b(k)\\x_r(k)\end{bmatrix},\ \phi(k,k+1)=\begin{bmatrix}\phi_b & Y_bQ(k)Y_f'\phi_f'\\0 & \phi_f'\end{bmatrix},$$

$$T(k+1)=\begin{bmatrix}Y_b\\-P_f^{-1}(k)Y_f\end{bmatrix},\ H'(k)=[H_b'\quad H_f'P_f(k)],$$

$$E\{n(k)n'(k)\}=\rho, \tag{20}$$

则有下述定理.

定理 2. 设 ϕ_f 非奇异，$P_f(k)$ 可逆，$x_f(0)$ 与 $x_b(l)$ 无关，$u(k)$ 满足(11)式，则系统(16)—(18)(或等价系统(10))的线性最优滤波与平滑可由标准的卡尔曼滤波和最优平滑算法计算. 若 $x_f(0),x_b(l)$ 与 $u(k)$ 均服从高斯分布,则算法是严格最优的.

证明. 由定理条件和推论 1,等价系统与原系统有相同的样本轨迹，且合成系统初始状态与输入非相关，可以应用 Kalman 滤波与最优平滑公式;若系统初始状态与输入服从高斯分布,则所得算法是最小方差意义下最优的. 证毕.

上述算法中应先求 $P_f(k)$,代入(20)式再完成滤波.

4 结论

本文所讨论的一类非因果系统最优估计的状态空间方法,以文[5]的工作为基础，进一步推广了文[3]的结果,提出了最优性条件，并给出滤波与平滑算法. 上述推论 1 的条件在实际中易满足.

非因果系统的状态空间估计算法与频域方法相比，具有精度高和参数精简的优点. 本文推得的等价合成系统与通常方向相反，由于等价关系是对称的，易得等价的前向系统.

参 考 文 献

[1] Blass W E, Halsey G W. Deconvolution of absorption spectra. Academic Press, New York: 1981.

[2] Line L R, Clayton R W. A new approach to vibroseis deconvolution. *Geophys. Prospecting*, 1977, **25**: 417—433.

[3] Mendel J M, Hsuch A C. State space modeling of non-causal impulse responses. Proc. 21sth Conf. on Decision and Control, 1982, 1300—1302.

[4] Anderson B D O, Kailath T. Forwards, backwards and dynamically reversible markovian models of second-order processes. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1979, CAS-**26**: 956—965.
[5] Verghese G, Kailath T. A further note on backward Markovian models. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1979, IT-**25**: 121—124.
[6] Friedlander B, Kailath T, Ljung L. Scattering theory and linear least squares estimation II: Discrete time problems. *Journal of the Franklin Institute*, 1976, **301**: 71—82.

OPTIMAL FILTERING AND SMOOTHING OF A CLASS OF NON-CAUSAL SYSTEMS

Gao Jiang Dai Guanzhong
(Dept. of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract

In this paper, minimum variance filtering and smoothing algorithms of a class of non-causal systems are discussed. Using the equivalence theorem of the forward and backward Markovian processes, the conditions for optimal filtering is obtained, and the formulas for optimal filtering and smoothing are given. The algorithm can be applied to a wide range of problems.

Key words: non-causal systems, Markovian processes, Kalman filter, optimal smoothing.

高 江 1969 年生，1990 年毕业于西安交通大学信息与控制工程系，获学士学位，1993 年于西北工业大学计算机系获硕士学位，现在西北工业大学攻读博士学位。感兴趣的领域有信号处理与控制理论的交叉研究，计算机视觉，控制系统鲁棒性分析等。

戴冠中 西北工业大学教授、校长，自动控制理论及应用学科博士生导师。主要的研究方向为大系统的控制与估计理论、智能控制理论及应用、面向控制的并行处理方法与并行计算机、控制理论在石油和天然气勘探中的应用等等。照片见本刊第18卷第2期。