第21卷 第6期 自动化学报 Vol. 21, No. 6
1995年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1995

线性离散系统的鲁棒约束方差控制——含结构参数扰动的情形[1)]

王子栋
(南京理工大学11系 南京 210094)
郭治
(南京理工大学10系 南京 210094)

摘 要

研究一类性能鲁棒控制器的设计问题,即针对含结构参数扰动的线性离散随机系统,设计反馈控制器,使闭环系统不仅渐近稳定,而且其每个状态分量的稳态方差不大于各自预先给定的上界. 基于一个修正的代数 Riccati 方程,给出了上述性能鲁棒控制器的存在条件及解析表达式,并举出相应的数值例子,以说明本文设计方法的简单性与直接性.

关键词: 线性离散系统,参数扰动,鲁棒控制.

1 引言

近年来,线性随机系统的约束方差控制设计已成为随机控制理论研究中的一个热点,并涌现了大量成果[1-8]. 其工程背景是: 在大量工程系统中,性能指标要求直接表现为系统状态方差上限的形式. 传统的控制方法,包括 LQG 控制和 H_2/H_∞ 混合范数控制,用于上述约束方差控制设计都是间接的. 因为它们不能保证系统每个状态分量的方差都能满足给定约束. 协方差配置控制理论[3-7]则为约束方差设计提供了更为直接有效的设计方法,它能使闭环系统的稳态协方差达到预先指定值.

然而, 几乎所有关于约束方差设计的文献均假定系统模型是精确的, 但在工程实践中,系统模型常含有不确定性. 这样,按系统标称参数设计的控制器可能达不到预期的性能,因而有必要研究参数扰动下的鲁棒约束方差控制器的设计问题. 另一方面,约束方差设计中所蕴含的自由度为控制系统达到期望的鲁棒性能约束提供了可能, 这是 LQG 设计所不具备的. 为此,文献[9]讨论了连续随机系统在结构参数扰动下的鲁棒约束方差设计问题,这里则研究离散时间情形下的相应问题.

1) 获得高校博士点学科专项科研基金及南京理工大学青年科学基金资助课题.
本文于1993年12月6日收到.

2 问题的描述

考虑如下不确定线性离散随机系统：

$$x(k+1) = [A + \Delta A(\sigma)]x(k) + Bu(k) + Dw(k). \tag{1}$$

这里状态 $x(k) \in R^{n_x}$；控制输入 $u(k) \in R^{n_u}$；噪声输入 $w(k) \in R^{n_w}$；w 为零均值高斯白噪声序列，其协方差 $W > 0$；$w(k)$与 $x(0)$ 不相关；A, B, D 为适维常数矩阵，且有 $DWD^T > 0$；(A,B) 和 (A,D) 分别假定为可稳的和可扰的；$\Delta A(\sigma)$ 表示系统的结构扰动，σ 为不确定参数向量，属于一个紧集.

假定系统的参数扰动是时不变的，且具有如下结构[10,11]：

$$\Delta A(\sigma) = MF(\sigma)N. \tag{2}$$

其中，$F(\sigma) \in R^{i\times j}$ 是未知的定常矩阵函数；M,N 为适维已知矩阵. $F(\sigma)$ 是范数有界的：

$$F(\sigma) \in \mathscr{F} = \{F(\sigma): F(\sigma)F^T(\sigma) \leqslant I,\ F(\sigma) \text{ 的所有元素都是 Lebesgue 可测}\}. \tag{3}$$

若 $F(\sigma) \in \mathscr{F}$，则称 $\Delta A(\sigma)$ 或 $F(\sigma)$ 是可允许的. 这里考虑状态反馈控制：

$$u(k) = Gx(k), \tag{4}$$

则闭环系统为

$$x(k+1) = [A_c + \Delta A(\sigma)]x(k) + Dw(k), A_c = A + BG. \tag{5}$$

定义稳态状态协方差为

$$X = \lim_{k\to\infty} E[x(k)x^T(k)]. \tag{6}$$

易于验证，若闭环系统稳定，则X是如下离散 Lyapunov 方程的唯一正定解：

$$X = (A_c + \Delta A(\sigma))X(A_c + \Delta A(\sigma))^T + DWD^T. \tag{7}$$

至此，可以描述本文所考虑的鲁棒约束方差控制问题，即设计状态反馈控制器 G，使如下性能指标同时得到满足：

1) 闭环系统(5)对所有可允的 $\Delta A(\sigma)$ 保持稳定；

2) 闭环系统各状态分量的稳态方差满足给定约束，即有

$$[X]_{ii} \leqslant \sigma_i^2,\ i = 1,2,\cdots,n_x. \tag{8}$$

这里 $[X]_{ii}$ 表示X的第 i 个对角元素，给定方差约束 $\sigma_i^2(i = 1,2,\cdots,n_x)$ 可由实际系统性能要求确定.

3 主要结果及证明

定理 1. 考虑系统(1)，若存在常数 $\varepsilon > 0$ 和正定对称阵Q满足：

$$\varepsilon NQN^T < I, \tag{9a}$$

$$Q = A_cQA_c^T + A_cQN^T(\varepsilon^{-1}I - NQN^T)^{-1}NQA_c^T + \varepsilon^{-1}MM^T + DWD^T. \tag{9b}$$

则 (1) 闭环系统(5)对所有可允的 $\Delta A(\sigma)$ 渐近稳定；(2) 闭环系统稳态状态协方差X

存在且满足:

$$X \leqslant Q. \tag{10}$$

证明.

(1) 若存在常数 $\varepsilon > 0$ 及正定阵 $Q > 0$, 使式(9)成立, 且令 $P(\sigma) = [A_c Q N^T(\varepsilon^{-1}I - NQN^T)^{-\frac{1}{2}} - MF(\sigma)(\varepsilon^{-1}I - NQN^T)^{\frac{1}{2}}]$, 则由 $F(\sigma)F^T(\sigma) \leqslant I$ 及 $\Delta A(\sigma)$ 的定义, 易得

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant P(\sigma)P^T(\sigma) \\ &= A_c Q N^T(\varepsilon^{-1}I - NQN^T)^{-1}NQA_c^T - [A_c Q \Delta A^T(\sigma) \\ &\quad + \Delta A(\sigma) Q A_c^T + \Delta A(\sigma) Q \Delta A^T(\sigma)] + \varepsilon^{-1} M F(\sigma) F^T(\sigma) M^T \\ &\leqslant A_c Q N^T(\varepsilon^{-1}I - NQN^T)^{-1}NQA_c^T - [(A_c + \Delta A(\sigma))Q(A_c \\ &\quad + \Delta A(\sigma))^T - A_c Q A_c^T] + \varepsilon^{-1} M M^T \triangleq \Phi. \end{aligned} \tag{11}$$

从而由式(9b)可知:

$$Q = (A_c + \Delta A(\sigma))Q(A_c + \Delta A(\sigma))^T + \Phi + DWD^T. \tag{12}$$

据上式, 由假设 $DWD^T > 0$ 及事实 $\Phi \geqslant 0$, 利用离散 Lyapunov 稳定性理论可知, 对所有可允的 $\Delta A(\sigma)$, $A_c + \Delta A(\sigma)$ 渐近稳定.

(2) 因闭环矩阵 $A_c + \Delta A(\sigma)$ 渐近稳定,故由式(6)定义的协方差阵 X 存在且满足式(7). 将式(12)减去式(7)得

$$Q - X = (A_c + \Delta A(\sigma))(Q - X)(A_c + \Delta A(\sigma))^T + \Phi. \tag{13}$$

注意到 $A_c + \Delta A(\sigma)$ 的渐近稳定性及 $\Phi \geqslant 0$, 由式(13)可直接推出 $Q - X \geqslant 0$, 即 $X \leqslant Q$. 证毕.

说明. 由定理 1 可知,当 Riccati 方程 (9b) 有正定解 Q 且满足(9a)时,结构参数扰动的作用就自动融入问题中,而且 Q 还给出了 H_2 性能指标(即 X)的上界.

基于以上分析, 可采用“配置控制”的思想达到设计目的: 对给定的稳态方差约束 $\sigma_i^2 (i = 1,2,\cdots,n_x)$, 可选择适当的正定阵 Q, 使之满足:

$$[Q]_{ii} \leqslant \sigma_i^2 \quad (i = 1,2,\cdots,n_x) \tag{14}$$

及 (9a), 然后对给定的正定阵 Q, 寻找使方程 (9b) 成立的控制器 G 的集合. 若这样的 G 存在,则由定理 1 可知, 闭环系统(5)渐近稳定且 $[X]_{ii} \leqslant [Q]_{ii} \leqslant \sigma_i^2 (i = 1,2,\cdots,n_x)$, 从而达到鲁棒约束方差设计的目的. 这样, 自然产生如下问题: 1) 满足式(14), (9a) 的正定阵 Q 可配置的充要条件是什么? (这里 Q 可配置是指存在控制器 G 使方程 (9b) 有正定解 Q); 2) 若满足式(14), (9a) 的正定阵 Q 可配置, 则配置该 Q 的控制器 G 的解析表达式是什么?

下面将解决所提出的 Q-矩阵配置问题.

引理 1.[5] 若 $M \in R^{m\times n}$ 及 $N \in R^{m\times p} (m \leqslant p)$ 为给定矩阵, 则存在矩阵 V 同时满足:

$$MV = N, \ VV^T = I \tag{15}$$

当且仅当

$$MM^T = NN^T. \tag{16}$$

此时 V 的通解可表示为

$$V = V_M \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} V_N^T, U \in R^{(n-r_M)\times(p-r_M)}, UU^T = I. \tag{17}$$

这里 V_M 和 V_N 分别来自 A 和 B 的奇异值分解:

$$M = U_M \begin{bmatrix} \Lambda_M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_M^T = [U_{M1}\ U_{M2}] \begin{bmatrix} \Lambda_M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{M1}^T \\ V_{M2}^T \end{bmatrix};$$

$$N = U_N \begin{bmatrix} \Lambda_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_N^T = [U_{N1}\ U_{N2}] \begin{bmatrix} \Lambda_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{N1}^T \\ V_{N2}^T \end{bmatrix}.$$

且 $r_M = \mathrm{rank} M$，$U_M = U_N$，$\Lambda_M = \Lambda_N$.

方程 (9b) 可表示为

$$Q - \varepsilon^{-1} M M^T - D W D^T = A_c[Q + QN^T(\varepsilon^{-1} I - NQN^T)^{-1} NQ] A_c^T. \tag{18}$$

注意到式(18)右端非负定,从而应有

$$Q \geqslant \varepsilon^{-1} M M^T + D W D^T. \tag{19}$$

上式给出了 Q 的下界. 令

$$Q + QN^T(\varepsilon^{-1} I - NQN^T)^{-1} NQ = TT^T,\ Q - \varepsilon^{-1} M M^T - D W D^T = LL^T. \tag{20}$$

其中 $T, L \in R^{n_x \times n_x}$ 分别为上两式左端的平方根因子,则将式(20)代入式(18),并由引理1知,式(18)等价于存在正交阵 V，使得

$$(A + BG)T = LV \text{ 或 } BG = LVT^{-1} - A. \tag{21}$$

而存在 V，使式(21)有解 G 的充要条件是[12]:

$$(I - BB^+)LV = (I - BB^+)AT,\ B^+ \text{ 为广义逆}. \tag{22}$$

又由引理1,存在正交阵 V 使式(22)成立,并等价于

$$[(I - BB^+)L][(I - BB^+)L]^T = [(I - BB^+)AT][(I - BB^+)AT]^T \tag{23}$$

或

$$(I - BB^+)[Q - A(Q + QN^T(\varepsilon^{-1} I - NQN^T)^{-1} NQ)A^T - \varepsilon^{-1} M M^T - D W D^T](I - BB^+) = 0. \tag{24}$$

综上所述,可得如下 Q-矩阵可配置的充要条件.

定理 2. 满足式(14),(9a) 的正定阵 Q 是可配置的，当且仅当存在常数 $\varepsilon > 0$，使式(19),(24)成立.

由以下定义及其奇异值分解:

$$J \triangleq (I - BB^+)L = U_J \begin{bmatrix} \Lambda_J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_J^T, \tag{25}$$

$$K \triangleq (I - BB^+)AT = U_K \begin{bmatrix} \Lambda_K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_K^T. \tag{26}$$

可得到相应于可配置阵 Q 的控制器 G 的解析表达式.

定理 3. 若正定阵 Q 可配置,则所有配置该正定阵 Q 的控制器 G 可表示为

$$G = B^+\left(LV_J \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} V_K^T T^{-1} - A\right) + Z - B^+ B Z. \tag{27}$$

其中 $U \in R^{(n_x - r_J)\times(n_x - r_J)}$ 为任意正交阵 ($r_J = \mathrm{rank} J$)；$Z \in R^{n_u \times n_x}$ 为任意矩阵；L, T 的定义见式(20)；J, K 的定义见式(25).

证明. 由定理 2 的证明可知,给定 $Q>0$ 是可配置的,当且仅当存在正交阵 V 使方程(21)有解 G, 且此时 G 的通解为[12]

$$G=B^{+}(LVT^{-1}-A)+Z-B^{+}BZ,\ Z \text{ 为任意适维阵}. \tag{28}$$

注意到使式(21)有解 G 的正交阵应满足式(22), 即 $JV=K$. 于是由引理 1 可得 V 的表达式,代入式(28)即可得式(27). 证毕.

由定理 2,3, 可容易得到如下结果.

定理 4. 考虑受扰线性离散随机系统(1), 给定稳态方差约束 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n_x)$. 若存在正定阵 $Q>0$ 满足式(14),(9a), (19)和(24),则鲁棒约束方差控制问题的解可由式(27)获得.

说明.

1) 在工程应用中, 常常希望能从式(14),(9a), (19)和(24)中直接构造出可配置正定阵 Q. 注意到式(14)易于验证,而 (9a),(19),(24) 三式与文献[2]中的式(45)—(49)属同一类型,因而同样可由待定参数法求解. 因工程应用中模型经简化后往往阶数较低,故待定参数法一般是可行的.

2) 可以看到,鲁棒控制器的设计过程中存在着相当的自由度(主要表现在 Q,U,Z 选取的不唯一性), 可利用这些自由度达到其它期望的指标约束, 如区域极点配置[8] 等. (这方面的结果将另文发表.)

4 数值例子

考虑不确定线性随机系统(1),其中参数

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & -0.5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ D=I_2,\ W=0.005I_2,$$

$$\Delta A(\sigma)=MF(\sigma)N=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}\sin\sigma[\,0\ \ 0.2\,].$$

现欲设计线性反馈控制器, 使得: 1) 闭环系统鲁棒稳定; 2) 闭环系统稳态协方差阵满足 $[X]_{11}\leqslant 0.01$, $[X]_{22}\leqslant 1.5$.

由上节提供的方法,令 $Q=(q_{ij})_{2\times 2}$, 将 Q 及 ε 直接代入可配置条件(24)中,得

$$0.75q_{11}-0.01q_{12}^2/(\varepsilon^{-1}-0.04q_{22})-0.005=0. \tag{29}$$

而条件(14),(9a),(19)则分别成为

$$q_{11}\leqslant 0.01,\ q_{22}\leqslant 1.5, \tag{30}$$

$$\varepsilon\cdot 0.04q_{22}<1, \tag{31}$$

$$Q\geqslant\begin{bmatrix}0.005 & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\cdot 0.01+0.005\end{bmatrix}. \tag{32}$$

故相应于式(29)—(32),可选取:

$$Q=\begin{bmatrix}0.0067 & 0.0001\\ 0.0001 & 1\end{bmatrix},\ \varepsilon=0.5.$$

从而

$$L=\begin{bmatrix}0.04123 & 0.0030\\ 0.0030 & 0.29155\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}0.08185 & 0.00011\\ 0.00011 & 1.01015\end{bmatrix},$$

$$V_J=\begin{bmatrix}0.99736 & 0.07257\\ 0.07257 & -0.99736\end{bmatrix},\ V_K=\begin{bmatrix}1 & 0.00147\\ 0.00147 & -1\end{bmatrix}.$$

将 $B^+,L,V_J,U=1;V_K,T,A,Z=0$ 代入式(27)可得

$$G=[-0.29471\ \ 0.78767].$$

经验证，闭环系统极点为 $\{0.5, 0.28767+0.02\sin\sigma\}$。显然，闭环系统渐近稳定。经仿真试验，$[X]_{11}$ 最大为 0.00510，$[X]_{22}$ 最大为 0.61392，从而设计任务得以完成。

5 结论

对于含结构参数扰动的线性离散随机系统的一类性能鲁棒控制问题，利用代数方法，给出了期望控制器的存在条件及其解析表达式。该设计方法中所蕴含的自由度已被成功地用来达到新的性能指标，如 H_∞ 范数约束及区域极点约束。文中结果也已推广至动态输出反馈的情形。进一步的有关研究将主要集中于采样数据系统的约束方差控制等。

参 考 文 献

[1] Skelton R E, DeLorenzo M L. Space structure control design by variance assignment. *J. Guidance and Control*, 1985, **8**(4): 454—462.

[2] Chang W J, Chung H Y. A study of H_∞ norm and variance-constrained design using dynamic output feedback for linear discrete systems. *Int. J. Contr.*, 1993, **57**(2): 473—484.

[3] Hotz A, Skelton R E. Covariance control theory. *Int. J. Contr.*, 1987, **46**(1): 13—32.

[4] Collins E G Jr, Skelton R E. A theory of state covariance assignment for discrete systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1987, **32**(1): 35—41.

[5] Hsieh C, Skelton R E. All covariance controllers for linear discrete-time systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1990, **35**(8): 908—915.

[6] Skelton R E, Ikeda M. Covariance controllers for linear continuous time systems. *Int. J. Contr.*, 1989, **49**(5): 1773—1785.

[7] Skelton R E, Iwasaki T. Liapunov and covariance controllers. *Int. J. Contr.*, 1993, **57**: 519—536.

[8] Wang Zidong Chen Xuemin, Guo Zhi. Controller design for continuous systems with variance and circular pole constraints. *Int. J. Systems Science* 1995, **26**(5): 1249—1256.

[9] 王子栋，郭治. 含结构参数扰动的线性连续系统的鲁棒约束方差控制. 自动化学报(已录用，将发表).

[10] Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilization and H_∞ control theory. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1990, **35**(3): 356—361.

[11] Xie L H, De souza C E, Wang Y Y. Robust control of discrete time uncertain dynamical systems. *Automatica*, 1993, **29**(4): 1133—1137.

[12] Ben Israel A, Greville T N E. Generalized Inverse: Theory and Application. 1974, John Wiley and Sons, Inc.

ROBUST CONSTRAINED VARIANCE CONTROL FOR LINEAR DISCRETE SYSTEMS WITH STRUCTURED PARAMETER PERTURBATIONS

WANG ZIDONG

(*The 11th Dept., Nanjing Univ. of Sci. Tech., Nanjing* 210094)

GUO ZHI

(*The 10th Dept., Nanjing Univ. of Sci. Tech., Nanjing* 210094)

ABSTRACT

In this paper the problem of designing a class of performance robust controllers is considered. The purpose of the addressed problem is to design feedback controllers, for the linear discrete stochastic systems with structured parameter perturbations, such that the closed-loop system is stable and the steady-state variance of each state is not greater than the prespecified upper bound, simultaneously. Based on a modified algebraic Riccati equation, this paper provides the conditions for the existence of the previous performance robust controllers. The explicit expression of the controller is also presented. A numerical example illustrates the simplicity and directness of the present design method.

Key words: Linear discrete systems, parameter perturbations, robust control.

王子栋,郭 治 作者简介及照片见本刊第21卷第3期。