第21卷 第6期 自动化学报 Vol. 21, No 6
1995年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1995

可修排队系统 GI/G(M/G)/1 的可靠性分析[1)]

史 定 华
(上海科技大学数学系 上海 201800)

摘 要

利用更新过程理论和向量马氏过程方法全面考察了可修排队系统 GI/G(M/G)/1 的结构，得到了所有感兴趣的指标，并证明了服务台的可靠性指标只与系统的忙期、闲期和忙期循环时间有关。

关键词: 可靠性，排队论，可修排队，离散事件动态系统。

1 引言

可修排队网络系统可作为离散事件动态系统（DEDS）的一种新模型，在柔性制造系统（FMS）、计算机集成制造系统（CIMS）等领域有着广泛的应用前景。它能综合分析系统的拥挤现象和运行可靠性，为设计和控制这类系统提供理论依据。由于研究一般的可修排队网络系统难度很大，所以目前文献中还只限于讨论单服务台的可修排队系统。文献[1]用马氏更新过程方法详细分析了 M/G(M/G)/1，其他作者又研究了 Em/G(M/G)/1 和 GI/M(M/PH)/1 等模型。

本文讨论可修排队系统 GI/G(M/G)/1。假定到达间隔时间 τ_n 服从一般分布 $A(x)$，均值 λ^{-1} 有限；顾客服务时间 χ_n 服从一般分布 $B(x)$，均值 μ^{-1} 有限；服务台的使用寿命 X 服从指数分布 $F(x)=1-e^{-\alpha x}$；服务台的修理时间 Y 服从一般分布 $G(x)$，均值 β^{-1} 有限。进一步假定服务台空闲时不会失效；当服务台失效时，正在接受服务的顾客需要等待其修复后再继续接受服务，已服务过的时间仍然有效，即累积计算；服务台修复如新，并立即投入服务。此外，上述所有随机变量 τ_n,χ_n,X,Y 相互独立。

记 GI/G(M/G)/1 的忙期、闲期、忙期循环时间分别为 $\hat{D}\sim\hat{D}(x)$，$\hat{I}\sim\hat{I}(x)$，$\hat{C}=\hat{D}+\hat{I}\sim\hat{C}(x)$。GI/G/1 的忙期、闲期和忙期循环时间分别用不带“∧”的字母表示。由于在统计平衡条件下，忙期循环时间独立同分布，若 0^+ 时刻刚好一个顾客到达空闲的系统，则忙期循环时间序列 $\{\hat{C}_n,n\geq 1\}$ 形成一个更新过程，否则在其它初始条件下形成一个延迟更新过程。另一方面，在一个忙期内，服务台完好工作和失效修理时间序列 $\{X_n+Y_n,n\geq 1\}$ 形成一个条件交替更新过程。本文充分利用这两个更新过程，得到了可修排

---

1) 国家自然科学基金资助项目.
本文于1993年9月9日收到.

队系统 GI/G(M/G)/1 所有感兴趣的排队指标和可靠性指标。由于所得可靠性指标只依赖于系统的忙期、闲期和忙期循环时间的分布，因此可以利用 Neuts 提出的方法[2,3]给出可修排队系统 GI/PH(M/PH)/1 和 PH/G(M/G)/1 的具体计算公式和程序。

2 排队指标

定理 1. 从排队的角度，可修排队系统 GI/G(M/G)/1 等价于经典排队系统 GI/Ĝ/1，后者顾客的广义服务时间 $\hat{\chi}_n$ 包括服务台可能多次失效而顾客需要等待其修复的延误时间。记 $\hat{\chi}_n \sim \hat{B}(x)$，则 $\hat{B}(x)$ 的 LS 变换为

$$\widetilde{\hat{B}}(s) = \widetilde{B}[s + \alpha - \alpha\widetilde{G}(s)], \quad E[\hat{\chi}_n] = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) = \hat{\mu}^{-1}.$$ （证明见文献[1].）

定理 2. 令$\hat{\sigma}_n = \sum_{k=1}^{n} (\hat{\chi}_k - \tau_{k+1})$，$\hat{K}_n(x) = P\{\hat{\sigma}_n \leqslant x\}$，则有 $\hat{K}_1(x) = \int_0^\infty \hat{B}(x+u)\,\mathrm{d}A(u)$，$\hat{K}_n(x) = \hat{K}_1^{(n)}(x)$，$n = 1, 2, \cdots$。其中 $\hat{K}_1^{(n)}(x)$ 表示 $\hat{K}_1(x)$ 的 n 重卷积。（证明见文献[4].）

定理 3. 可修排队系统 GI/G(M/G)/1 达到统计平衡的充要条件是

$$\hat{\rho} = \frac{\lambda}{\mu}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) < 1.$$

证明. 因 $E[|\hat{\chi}_k - \tau_{k+1}|] \leqslant E[\hat{\chi}_k] + E[\tau_{k+1}] = \hat{\mu}^{-1} + \lambda^{-1} < \infty$，而 $E[|\hat{\chi}_k - \tau_{k+1}|] = 0$ 推出 $\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{\lambda}$，这与 $\hat{\rho} < 1$ 矛盾。故排队系统 GI/Ĝ/1 满足 $0 < E[|\hat{\chi}_k - \tau_{k+1}|] < \infty$，且达到统计平衡的充要条件是 $\hat{\rho} < 1$（见文献[5]）。再由定理 1，可修排队系统 GI/G(M/G)/1 达到统计平衡的充要条件是 $\hat{\rho} < 1$。 证毕.

定理 4. 当 $\hat{\rho} < 1$ 时，可修排队系统 GI/G(M/G)/1 的忙期、闲期和忙期循环时间分布的 LS 变换分别为

$$\widetilde{\hat{D}}(s) = 1 - \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\hat{\varphi}}_n(s)/n\right\},$$

$$E[\hat{D}] = \hat{\mu}^{-1}\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \hat{\varphi}_n)/n\right\};$$

$$\widetilde{\hat{I}}(s) = 1 - \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{sx}\mathrm{d}\hat{K}_n(x)/n\right\},$$

$$E[\hat{I}] = (\lambda^{-1} - \hat{\mu}^{-1})\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \hat{\varphi}_n)/n\right\};$$

$$\widetilde{\hat{C}}(s) = 1 - \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\hat{\psi}}_n(s)/n\right\},$$

$$E[\hat{C}] = \lambda^{-1}\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \hat{\varphi}_n)/n\right\}.$$

其中 $\hat{\varphi}_n(x) = \int_0^x [1 - A^{(n)}(u)] \mathrm{d}\hat{B}^{(n)}(u), \hat{\varphi}_n = \hat{\varphi}_n(\infty)$; $\hat{\Phi}_n(x) = \int_0^x \hat{B}^{(n)}(u) \, \mathrm{d}A^{(n)}(u)$.

(证明见文献[4]或[6].)

定理 5. 对可修排队系统 GI/G(M/G)/1，令 N_R 表示任一顾客在接受服务的过程中因服务台失效而中断的次数，$\Pi(z) = E[z^{N_R}]$ 表示其母函数,则

$$P\{N_R = j\} = \int_0^\infty e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j} \mathrm{d}B(u), \; j = 0,1,2,\cdots,$$

$$\Pi(z) = \widetilde{B}(\alpha - \alpha z), \; E[N_R] = \alpha/\mu.$$

证明. 根据概率分析(见图 1),由服务台寿命服从指数分布,易得

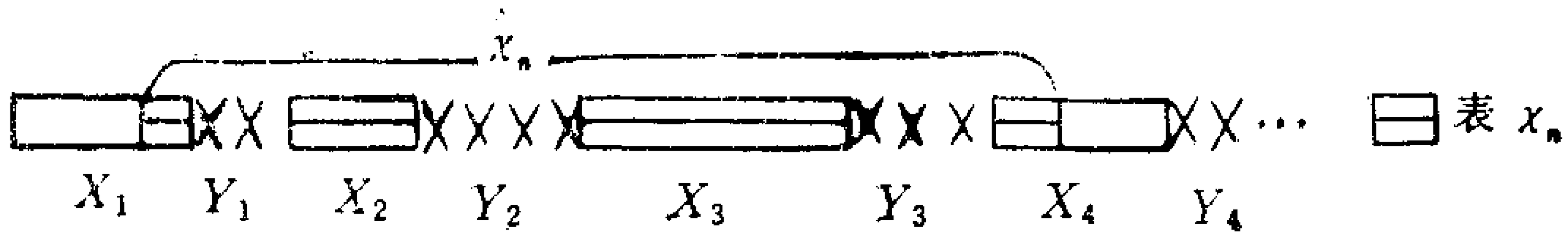


图 1 顾客一种可能的服务实现

$$\begin{aligned} P\{N_R = j\} &= P\left\{\sum_{k=1}^{j} X_k \leqslant \chi_n < \sum_{k=1}^{j+1} X_k\right\} \\ &= \int_0^\infty [X^{(j)}(u) - X^{(j+1)}(u)] \mathrm{d}B(u) \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \mathrm{d}B(u), \; j = 0,1,2,\cdots. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} P\{N_R = j\} z^j \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha u} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha u z)^j}{j!} \mathrm{d}B(u) \\ &= \widetilde{B}(\alpha - \alpha z), \end{aligned}$$

$$E[N_R] = \Pi'(z)|_{z=1} = \alpha/\mu.$$ 证毕.

定理 6. 对可修排队系统 GI/G(M/G)/1，令 W_R 表示任一顾客在接受服务的过程中因服务台失效为等待其修复而延误的时间,记 $F_R(x) = P\{W_R \leqslant x\}$，则 $F_R(x)$ 的 LS 变换为

$$\widetilde{F}_R(s) = \widetilde{B}[\alpha - \alpha \widetilde{G}(s)], \; E[W_R] = \alpha/\mu\beta.$$

证明. 在 $N_R = j$ 的条件下,顾客因服务台修理而延误的时间等于 $Y_1 + \cdots + Y_j$，当 $j = 0$ 时不延误，故

$$F_R(x) = P\{N_R = 0\} H(x) + \sum_{j=1}^{\infty} P\{N_R = j\} P\{Y_1 + \cdots + Y_j \leqslant x\}.$$

其中 $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

对上式两边取 LS 变换,并约定 $G^{(0)}(t) = H(t)$，可得

$$\widetilde{F}_R(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\alpha u}\frac{(\alpha u)^n}{n!}\mathrm{d}B(u)\cdot\widetilde{G}^n(s)$$
$$=\widetilde{B}[\alpha-\alpha\widetilde{G}(s)],$$
$$E[W_R]=-\widetilde{F}_R'(s)|_{s=0}=\alpha/\mu\beta.$$

证毕.

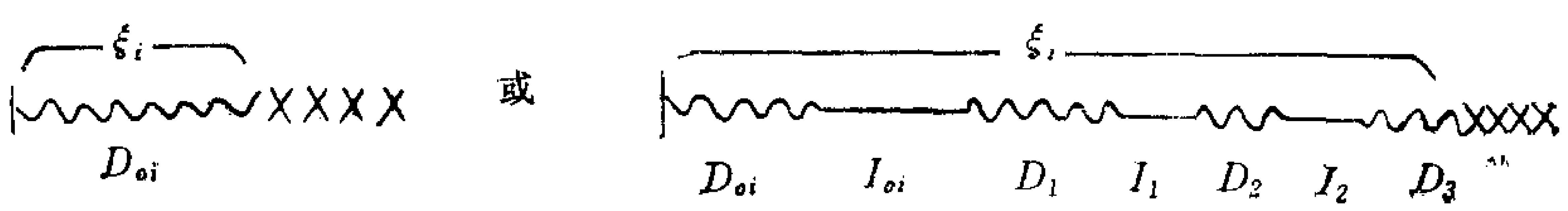
3 可靠性指标

定理 7. 对可修排队系统 GI/G(M/G)/1，令 $F_i^q(t)=P\{\xi\leqslant t|L=i\}$ 表示在系统开始运行时有 i 个顾客的条件下，服务台首次失效前所经历的时间分布，当 $\hat{\rho}<1$ 时，$F_i^q(t)$ 的 LS 变换为

$$\widetilde{F}_i^q(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha}\left\{1-\widetilde{D}_{0i}(s+\alpha)+\frac{[1-\widetilde{D}(s+\alpha)]\int_0^{\infty}e^{-st}\mathrm{d}P\{D_{0i}+I_{0i}\leqslant t,X>D_{0i}\}}{1-\int_0^{\infty}e^{-st}\mathrm{d}P\{D+I\leqslant t,X>D\}}\right\}.$$

其中 D_{0i}，I_{0i} 表示经典排队系统 GI/G/1 开始运行时有 i 个顾客的首次忙期与闲期，$D_{0i}(x)$ 表示 D_{0i} 的分布函数.

证明. 简记 $\xi_i=\{\xi|L=i\}$，ξ_i 的可能情况如图 2 所示.



XXXX 表服务台首次失效

图 2　ξ_i 的可能进程

首先考虑 $i=1$ 的情形. 由图 2 根据全概率公式

$$F_1^q(t)=P\{\xi_1\leqslant t\}$$
$$=P\{\xi_1\leqslant t,\xi_1\leqslant D_1\}+P\{\xi_1\leqslant t,\xi_1>D_1\}$$
$$=P\{X\leqslant t,X\leqslant D_1\}+P\{D_1+I_1\leqslant t,X>D_1\}*F_1^q(t).$$

其中第一项是因为在第一个忙期中 $\xi_1=X$；第二项是因为要 $\xi_1>D_1$ 必须 $X>D_1$，且假设闲期服务台不会失效，故必有 $\xi_1>D_1+I_1$，而其中卷积 $*$ 是利用了 $\{C_n,n\geqslant 1\}$ 形成一更新过程，由更新技巧所得. 两边取 LS 变换

$$\widetilde{F}_1^q(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}[1-D(t)]\alpha e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^{\infty}e^{-st}\mathrm{d}P\{D+I\leqslant t,X>D\}\widetilde{F}_1^q(s),$$

解得

$$\tilde{F}_1^q(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha}[1-\tilde{D}(s+\alpha)]\Big/\left[1-\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}P\{D+I\leqslant t,X>D\}\right].$$

类似地,对一般的 $i=0,1,2,\cdots$, 注意到系统首次忙期加闲期结束后,忙期循环形成一更新过程,由全概率公式和更新技巧,有

$$\begin{aligned}F_i^q(t)&=P\{\xi_i\leqslant t,\xi_i\leqslant D_{0i}\}+P\{\xi_i\leqslant t,\xi_i>D_{0i}\}\\&=P\{X\leqslant t,X\leqslant D_{0i}\}+P\{D_{0i}+I_{0i}\leqslant t,X>D_{0i}\}*F_1^q(t).\end{aligned}$$

两边取 LS 变换,并将 $\tilde{F}_1^q(s)$ 代入得

$$\begin{aligned}\tilde{F}_i^q(s)&=\frac{\alpha}{s+\alpha}[1-\tilde{D}_{0i}(s+\alpha)]\\&\quad+\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}P\{D_{0i}+I_{0i}\leqslant t,X>D_{0i}\}\tilde{F}_1^q(s)\\&=\frac{\alpha}{s+\alpha}\left\{1-\tilde{D}_{0i}(s+\alpha)+\frac{[1-\tilde{D}(s+\alpha)]\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}P\{D_{0i}+I_{0i}\leqslant t,X>D_{0i}\}}{1-\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}P\{D+I\leqslant t,X>D\}.}\right\}\end{aligned}$$

证毕.

推论 1. 在定理 7 的条件下,令 $MTTFF_i=E[\xi|L=i\}$ 表示服务台首次失效前的(条件)平均时间,则有

$$MTTFF_i=\frac{1}{\alpha}+\tilde{D}_{0i}(\alpha)\left[\frac{E[I]}{1-\tilde{D}(\alpha)}-E[I]+E[I_{0i}]\right],i=0,1,2,\cdots.$$

证明. 因有

$$\begin{aligned}&\lim_{s\downarrow 0}\left\{1-\tilde{D}_{0i}(s+\alpha)+\frac{[1-\tilde{D}(s+\alpha)]\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}P\{D_{0i}+I_{0i}\leqslant t,X>D_{0i}\}}{1-\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}P\{D+I\leqslant t,X>D\}}\right\}\\&\quad=1-\tilde{D}_{0i}(\alpha)+\frac{[1-\tilde{D}(\alpha)]P\{X>D_{0i}\}}{1-P\{X>D\}}=1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}'(\alpha)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tilde{D}(s+\alpha)|_{s=0}=\int_0^\infty -te^{-\alpha t}\mathrm{d}D(t)\\&=-\int_0^\infty t\mathrm{d}P\{D\leqslant t,X>D\}=-E[D|X>D]\tilde{D}(\alpha),\end{aligned}$$

$$\tilde{D}'_{0i}(\alpha)=-E[D_{0i}|X>D_{0i}]\tilde{D}_{0i}(\alpha),$$

$$E[I|X>D]=E[I],\ E[I_{0i}|X>D_{0i}]=E[I_{0i}].$$

于是

$$\begin{aligned}MTTFF_i&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tilde{F}_i^q(s)|_{s=0}\\&=\frac{1}{\alpha}+\tilde{D}'_{0i}(\alpha)+(E[D_{0i}|X>D_{0i}]+E[I_{0i}|X>D_{0i}])\\&\quad\cdot\tilde{D}_{0i}(\alpha)+\frac{\tilde{D}'(\alpha)\tilde{D}_{0i}(\alpha)}{1-\tilde{D}(\alpha)}\end{aligned}$$

$$+\frac{\widetilde{D}_{0i}(\alpha)(E[D|X>D]+E[I|X>D])\widetilde{D}(\alpha)}{1-\widetilde{D}(\alpha)}$$

$$=\frac{1}{\alpha}+\widetilde{D}_{0i}(\alpha)\left\{\frac{E[I]}{1-\widetilde{D}(\alpha)}-E[I]+E[I_{0i}]\right\}.$$

注意到 $D_{00}=0, I_{00}=\tau_1; D_{01}=D, I_{01}=I$。可得

$$MTTFF_0=\frac{1}{\alpha}+\left[\frac{E[I]\widetilde{D}(\alpha)}{1-\widetilde{D}(\alpha)}+\frac{1}{\lambda}\right],$$

$$MTTFF_1=\frac{1}{\alpha}+\frac{E[I]\widetilde{D}(\alpha)}{1-\widetilde{D}(\alpha)}.$$

证毕.

推论 2. 在定理 7 的条件下，若 $A(x)=1-e^{-\lambda x}$，则

$$\widetilde{F}_i^q(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha}\cdot\frac{1-\widetilde{I}(s)\widetilde{D}(s+\alpha)-\widetilde{D}^i(s+\alpha)+\widetilde{I}(s)\widetilde{D}^i(s+\alpha)}{1-\widetilde{I}(s)\widetilde{D}(s+\alpha)},$$

$$MTTFF_i=\frac{1}{\alpha}+\frac{E[I]\widetilde{D}^i(\alpha)}{1-\widetilde{D}(\alpha)},\quad i=0,1,2,\cdots.$$

证明。当 $A(x)=1-e^{-\lambda x}$ 时，由文献[1]，$D_{0i}=\overbrace{D+\cdots+D}^{i}$，$I_{0i}=I$，且 D 与 I 相互独立，于是

$$\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}P\{D+I\leqslant t,\ X>D\}=\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}\int_0^t I(t-x)e^{-\alpha x}\mathrm{d}D(x)$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}I(t)\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)x}\mathrm{d}D(x)$$

$$=\widetilde{I}(s)\widetilde{D}(s+\alpha),$$

$$\widetilde{D}_{0i}(s+\alpha)=\widetilde{D}^i(s+\alpha),$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}P\{D_{0i}+I_{0i}\leqslant t, X>D_{0i}\}=\widetilde{I}(s)\widetilde{D}^i(s+\alpha).$$

所以，由定理 7 可得

$$\widetilde{F}_i^q(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha}\left[1-\widetilde{D}^i(s+\alpha)+\frac{[1-\widetilde{D}(s+\alpha)]\widetilde{I}(s)\widetilde{D}^i(s+\alpha)}{1-\widetilde{I}(s)\widetilde{D}(s+\alpha)}\right]$$

$$=\frac{\alpha}{s+\alpha}\cdot\frac{1-\widetilde{I}(s)\widetilde{D}(s+\alpha)-\widetilde{D}^i(s+\alpha)+\widetilde{I}(s)\widetilde{D}^i(s+\alpha)}{1-\widetilde{I}(s)\widetilde{D}(s+\alpha)}.$$

而由推论 1

$$MTTFF_i=\frac{1}{\alpha}+\frac{E[I]\widetilde{D}^i(\alpha)}{1-\widetilde{D}(\alpha)}.$$

证毕。

定理 8. 对可修排队系统 GI/G(M/G)/1，令 $L(t)$ 表示 t 时刻系统的队长（$L(0)$ 简记为 L），$p_{0i}(t)=P\{L(t)=0|L=i\}$，当 $\hat{\rho}<1$ 时，$p_{0i}(t)$ 的 LS 变换为

$$1-sp_{0i}^*(s)=1-\widetilde{\hat{D}}_{0i}(s)+\frac{1-\widetilde{\hat{D}}(s)}{1-\widetilde{\hat{C}}(s)}\widetilde{\hat{C}}_{0i}(s),\quad i=0,1,2,\cdots.$$

其中 $\hat{C}_{0i}(x)$ 表示 $\hat{D}_{0i}+\hat{I}_{0i}$ 的分布函数。

证明. 当 $i=1$ 时，$\widetilde{\hat{D}}_{01}(s)=\widetilde{\hat{D}}(s)$，$\widetilde{\hat{C}}_{01}(s)=\widetilde{\hat{C}}(s)$，问题变成

$$1-sp_{01}^{*}(s)=\frac{1-\widetilde{\hat{D}}(s)}{1-\widetilde{\hat{C}}(s)}.$$

由全概率公式和更新技巧,显然有

$$p_{01}(t)=P\{\hat{D}\leqslant t<\hat{C}\}+\int_0^t p_{01}(t-x)\mathrm{d}\hat{C}(x).$$

两边取 L 变换得(约定 $\bar{F}(t)=1-F(t)$)

$$p_{01}^{*}(s)=\bar{\hat{C}}^{*}(s)-\bar{\hat{D}}^{*}(s)+p_{01}^{*}(s)\widetilde{\hat{C}}(s),$$

$$sp_{01}^{*}(s)=\widetilde{\hat{D}}(s)-\widetilde{\hat{C}}(s)+sp_{01}^{*}(s)\widetilde{\hat{C}}(s),$$

$$1-sp_{01}^{*}(s)=\frac{1-\widetilde{\hat{D}}(s)}{1-\widetilde{C}(s)}.$$

当 $i\neq 1$ 时,注意到

$$p_{0i}(t)=P\{\hat{D}_{0i}\leqslant t<\hat{D}_{0i}+\tilde{I}_{0i}\}+\int_0^t p_{01}(t-x)\mathrm{d}\hat{C}_{0i}(x),$$

两边取 L 变换代入 $1-sp_{01}^{*}(s)$ 即得. 证毕.

定理 9. 对可修排队系统 GI/G(M/G)/1，令 $U_i^q(t)=P\{$在时刻 t 服务台不可用 $|L=i\}$ 表示服务台的(条件)瞬时不可用度，$U(t)$ 表示服务台看成通常单部件系统的瞬时不可用度. 当 $\hat{\rho}<1$ 时，$U_i^q(t)$ 的 L 变换为

$$U_i^{q*}(s)=[1-sp_{0i}^{*}(s)]U^{*}(s),\ i=0,1,2,\cdots.$$

其中

$$U^{*}(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{\alpha\bar{G}^{*}(s)}{1+\alpha\bar{G}^{*}(s)}.$$

证明. 令 $P_i(t)=P\{L(t)\neq 0$，服务台可用 $|L=i\}$，$Y(t)$ 表示 t 时刻在修服务台已花去的修理时间.

$$Q_i(t,y)\mathrm{d}y=P\{L(t)\neq 0,y<Y(t)\leqslant y+\mathrm{d}y|L=i\},$$

假定 $G(t)=1-\exp\left\{-\int_0^t\beta(y)\mathrm{d}y\right\}$，根据向量马氏过程方法[7]，有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial y}+\beta(y)\right)Q_i(t,y)=0,\\ Q_i(t,0)=\alpha P_i(t).\end{cases}$$

解此微分方程得

$$Q_i^{*}(s,y)=\alpha P_i^{*}(s)e^{-sy}\bar{G}(y).$$

令 $Q_i(t)=P\{L(t)\neq 0$，服务台不可用 $|L=i\}$，显然

$$Q_i(t)=\int_0^\infty Q_i(t,y)\mathrm{d}y=U_i^q(t),$$

$$p_{0i}(t)+P_i(t)+Q_i(t)=1.$$

取 L 变换得

$$1 - sp_{0i}^*(s) = sP_i^*(s)[1 + \alpha\bar{G}^*(s)],$$

故

$$U_i^{q*}(s) = Q_i^*(s) = \alpha P_i^*(s)\bar{G}^*(s)$$
$$= [1 - sp_{0i}^*(s)]\frac{1}{s}\cdot\frac{\alpha\bar{G}^*(s)}{1+\alpha\bar{G}^*(s)}$$
$$= [1 - sp_{0i}^*(s)]U^*(s).$$

证毕.

推论 3. 在定理 9 的条件下,服务台的稳态不可用度存在,且与初始条件无关,即

$$U^q = \lim_{t\to\infty} U_i^q(t) = \hat{\rho}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

证明. 当 $\hat{\rho} < 1$ 时,根据 L 变换的 Tauber 定理, 有[8]

$$\widetilde{U}_i^q = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t U_i^q(x)\mathrm{d}x = \lim_{s\downarrow 0} sU_i^{q*}(s) = \hat{\rho}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

与 i 无关. 再利用文献[6]关于 GI/Ĝ/1 排队极限状态概率存在的结论, 可得服务台的稳态不可用度存在,且(见文献[8])

$$U^q = \widetilde{U}^q = \hat{\rho}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

证毕.

推论 4. 在定理 9 的条件下,若 $A(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, 则

$$U_i^{q*}(s) = \frac{1 - \widetilde{\hat{C}}(s) - \widetilde{\hat{D}}^i(s) + \widetilde{\hat{I}}(s)\widetilde{\hat{D}}^i(s)}{1 - \widetilde{\hat{C}}(s)}U^*(s),\quad i = 0,1,2,\cdots.$$

证明. 因 $A(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ 时, $\widetilde{\hat{D}}_{0i}(s) = \widetilde{\hat{D}}^i(s)$, $\widetilde{\hat{C}}_{0i}(s) = \widetilde{\hat{I}}(s)\widetilde{\hat{D}}^i(s)$, 代入定理 8 和 9 即得.

证毕.

定理 10. 对可修排队系统 GI/G(M/G)/1, 令 $N_q(t)$ 表示服务台在 $(0,t]$ 中的故障(失效)次数, $M_i^q(t) = E[N_q(t)|L = i]$ 表示服务台在 $(0, t]$ 中的(条件)平均故障次数, $M(t)$ 表示服务台看成通常单部件系统时在 $(0,t]$ 中的平均故障次数. 当 $\hat{\rho} < 1$ 时, $M_i^q(t)$ 的 LS 变换为

$$\widetilde{M}_i^q(s) = [1 - sp_{0i}^*(s)]\widetilde{M}(s),\quad i = 0,1,2,\cdots.$$

其中

$$\widetilde{M}(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha\bar{G}^*(s)}.$$

证明. 根据定理 9 的证明和计算故障频度的公式[9], 有

$$\widetilde{M}_i^q(s) = W_{fi}^*(s) = \alpha P_i^*(s)$$
$$= [1 - sp_{0i}^*(s)]\frac{1}{s}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha\bar{G}^*(s)}$$
$$= [1 - sp_{0i}^*(s)]\widetilde{M}(s).$$

证毕.

推论 5. 在定理 10 的条件下,服务台的稳态故障频度存在,且与初始条件无关,即

$$M^q = \lim_{t\to\infty}\frac{M_i^q(t)}{t} = \hat{\rho}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

证明. 根据 L 变换的 Tauber 定理和文献[8]立得.

推论 6. 在定理 10 的条件下,若 $A(x)=1-e^{-\lambda x}$, 则

$$\widetilde{M}_i^q(s)=\frac{1-\widetilde{\hat{C}}(s)-\widetilde{\hat{D}}^i(s)+\widetilde{\hat{I}}(s)\widetilde{\hat{D}}^i(s)}{1-\widetilde{C}(s)}\widetilde{M}(s),\quad i=0,1,2,\cdots.$$

证明. 与推论 4 的证明相同.

4 结束语

可修排队系统与传统可靠性理论研究的孤立系统不同，它受到系统的外部输入和系统输出能力的强烈影响,因此这类系统的可靠性指标与系统的输入输出过程密切相关.研究结果表明：这种依赖关系可以用系统的忙期、闲期及忙期循环时间加以刻画，尽管忙期、闲期、忙期循环时间的性态取决于排队系统的关键参数 $\hat{\rho}<1$（或 $\hat{\rho}\geq 1$），然而 $\hat{\rho}$ 的大小对这类系统可靠性指标的性态几乎没有什么影响. 本文虽然只严格论证了 $\hat{\rho}<1$ 的情况,但使用文献[1]的方法不难讨论 $\hat{\rho}\geq 1$ 的情况.

由于这类系统的可靠性指标与队长和等待时间无关，因此本文的研究预示着有可能对可修排队网络系统展开研究.

另一方面，这里较大的限制是服务台寿命服从指数分布. 对非指数寿命情况，也已经取得某些有意义的结果，见文献[7]和待发表的论文（Queueing equivalence between RQS with PH lifetime and ordinary queue).

参 考 文 献

[1] 曹晋华,程侃. 服务台可修的 $M/G/1$ 排队系统分析,应用数学学报,1982,5(2): 113—127.

[2] Neuts M F. Matrix-geometric solutions in stochastic models ——An algorithmic approach, Boltimore: The Johns Hopkins University Press, 1981.

[3] Neuts M F. Structural stochastic matrices of $M/G/1$ Type and their applications. New York: Macel Dekker Inc., 1989.

[4] Cohen J. W., The single server queue, North-Holland publishing company, 1982.

[5] Kleinrock L. Queuing systems, Vol. I Theory. John Wiley & Sons, 1975.

[6] 徐光辉. 随机服务系统. 第二版,科学出版社,1988.

[7] Shi D. Probability analysis of the repairable queuing system $M/G(E_k/H)/1$. *Ann. of O. R.*, 1990, **24**: 185—203.

[8] 曹晋华,程侃. 可靠性数学引论. 科学出版社,1986.

[9] 史定华. 计算可修系统在$(0,t]$中平均故障次数的新方法. 应用数学学报,1985,8(1): 101—110.

RELIABILITY ANALYSIS OF THE REPAIRABLE QUEUEING SYSTEM GI/G(M/G)/1

SHI DINGHUA
(*Shanghai Univ of Sci & Techn., Shanghai* 201800)

ABSTRACT

In this paper, we thoroughly investigate the structure of the repairable queueing system GI/G(M/G)/1 by renewal theory and the method of vector Markov process, and obtain its all interested indices. The obtained results show that server's reliability indices of the repairable queueing system only depend on the busy, idle, and cycle time of the system.

Key words: Reliability, queueing theory, repairable queueing system, discrete event dynamic system.

史定华　上海科技大学教授、中国运筹学会可靠性学会副理事长，排队论专业委员会副主任。主要从事随机运筹学、系统分析、优化和控制等方向的教学与研究。 已发表学术论文60余篇，著、译作三部。曾荣获国家教委、部、市多项科技进步奖。