第21卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol.21, No.6
1995年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1995

时滞系统的变结构控制及其在火箭发动机燃烧过程镇定中应用的理论基础[1)]

郑 锋
(清华大学电机工程系 北京 100084)

$\boxed{\text{程 勉}}$ $\boxed{\text{高为炳}}$
(北京航空航天大学第七研究室 北京 100083)

摘 要

本文研究时滞系统的变结构控制及其应用的理论基础. 这里引入切换泛函的概念，系统地给出了时滞系统变结构控制的设计方法. 此外,还研究了上述设计方法中的关键问题,即所谓特征矩阵的求解问题,给出了一般情况下时滞系统特征矩阵的求法.

关键词: 时滞系统,变结构控制,切换泛函,特征矩阵,镇定.

1 引言

关于时滞系统变结构控制的设计，目前的研究结果还不多，也缺乏一般化的设计方法. 在已有文献[1—4]中，[1,2]给出了控制器的设计方法，[3,4]对于一些特殊的时滞系统给出了切换函数的设计方法. 所有这些结果还远远不能满足工程实践的需要.

实际上，在许多系统中都存在着时滞，如化工过程控制系统中反馈信号的时延，电路系统中传输线的时延，核反应堆的控制问题,生物学中的捕获-繁殖问题等等，并且时滞的表现形式也是各种各样的. 因此，为了镇定火箭发动机燃烧过程的需要和使其能够应用于更为广泛的系统，有必要为更一般的时滞系统的变结构控制建立系统的设计方法.

2 时滞系统的变结构控制

考虑如下时滞系统

$$S_d:\ \dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(t+\theta)+\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\beta(\tau)u(t+\tau), \tag{1}$$

其中 $x(t)\in R^n$;$u(t)\in R^m$;$\alpha\in BV([-r,0],R^{n\times n})$;$\beta\in BV([-r,0],R^{n\times m})$; $BV([a,b],$

1) 国家自然科学基金资助课题.
本文于1993年12月25日收到.

$R^{n_1\times n_2}$) 表示 $[a,b]$ 上的有界变差实函数阵，维数为 $n_1\times n_2, r>0$；式(1)中的积分为 Stieltjes 积分. 引进记号

$$x_t(\theta)=x(t+\theta),\ u_t(\theta)=u(t+\theta),\ \theta\in[-r,0].$$

假定系统(1)的初始条件为

$$x(\theta)=x_0(\theta),\ u(\theta)=u_0(\theta),\ \theta\in[-r,0], \tag{2}$$

其中 $x_0\in C([-r,0],R^n)$; $u_0\in C([-r,0],R^m)$. 令 $u\in\Omega\subset L_1([0,\infty),R^m)$，其中 $L_1([0,\infty),R^m)$ 表示$[0,\infty]$上的可积函数类，Ω表示容许控制集. 据文献[5]，$\forall u\in\Omega$，存在唯一的满足初始条件(2)的函数 $x\in X\subset AC([0,\infty),R^n)$，它满足式(1). 这里 $AC([0,\infty),R^n)$ 表示$[0,\infty)$上的绝对连续函数类.

定义变换 $\mathscr{T}$：

$$z(t)=\mathscr{T}(x,u)(t)=x(t)+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\beta(\theta)u(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{3}$$

显然 $z\in AC([0,\infty),R^n)$，因而几乎处处可微. 微分式(3)之右端，并利用式(1)，容易证明[6]，当阵A满足

$$A=\int_{-r}^{0}e^{A\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta) \tag{4}$$

时，有

$$\dot z(t)=Az(t)+Bu(t). \tag{5}$$

其中

$$B=\int_{-r}^{0}e^{A\theta}\mathrm{d}\beta(\theta). \tag{6}$$

可以证明[6]，在条件(4)下，$\{z(t),t\geqslant 0\}$ 满足式(5)当且仅当 $\{x(t),t\geqslant 0\}$ 满足式(1).

定义 1. 矩阵A称为系统(1)的特征矩阵.

关于特征矩阵A的存在性及解法将在下节讨论. 对系统(1)，作如下假设：

假设 1. 系统(1)谱能控.

假设 2. 系统(1)存在特征矩阵 A.

假设 3. 由式(6)定义的矩阵B列满秩.

引理 1.[6] 若假设 1 及假设 2 成立，则系统(5)完全能控.

因矩阵B列满秩，故存在非奇异矩阵 T，使得

$$TB=\begin{bmatrix}0\\ I_m\end{bmatrix}, \tag{7}$$

这里 I_m 表示m阶单位阵. 作变换

$$\bar z=Tz=\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\end{bmatrix}z=\begin{bmatrix}\bar z_1\\ \bar z_2\end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中 $T_1\in R^{(n-m)\times n}; T_2\in R^{m\times n}; \bar z_1\in R^{n-m}; \bar z_2\in R^m$. 令

$$\bar A=TAT^{-1}=\begin{bmatrix}\bar A_{11} & \bar A_{12}\\ \bar A_{21} & \bar A_{22}\end{bmatrix},$$

其中 $\bar{A}_{11},\bar{A}_{12},\bar{A}_{21},\bar{A}_{22}$ 分别为 $(n-m)\times(n-m),(n-m)\times m,m\times(n-m)$, $m\times m$ 维矩阵. 则系统(5)化为

$$\dot{\bar{z}}_1=\bar{A}_{11}\bar{z}_1+\bar{A}_{12}\bar{z}_2, \tag{9}$$

$$\dot{\bar{z}}_2=\bar{A}_{21}\bar{z}_1+\bar{A}_{22}\bar{z}_2+u. \tag{10}$$

容易证明,当矩阵对 (A,B) 能控时,矩阵对 $(\bar{A}_{11},\bar{A}_{12})$ 亦能控(参见文献[7]). 因此由假设 1, 对子系统(9),可构造反馈律:

$$\bar{z}_2=-K\bar{z}_1, \tag{11}$$

使得子系统(9)渐近稳定. 特别地,取 K, 使得

$$\sigma(\bar{A}_{11}-\bar{A}_{12}K)\subset\mathscr{C}^-_{-\nu_0}.$$

这里 $\sigma(\cdot)$ 表示矩阵或系统的谱; $\mathscr{C}^-_{-\nu_0}\overset{\text{def}}{=\!=}\{s\in\mathscr{C}:\mathrm{Re}(s)<-\nu_0\}$; $\mathscr{C}$ 表示复平面或复数域; ν_0 为某一给定正数. 从而对系统(9)—(10), 可取切换函数

$$s=\bar{z}_2+K\bar{z}_1=[K,I_m]\bar{z}\overset{\text{def}}{=\!=}\bar{C}\bar{z}. \tag{12}$$

当系统(9)—(10)到达滑动流形 $\{\bar{z}\in R^n:\bar{C}\bar{z}=0\}$ 并在其上运动时,它是渐近稳定的.

将式(3),(8)代入式(12),得系统(1)的切换泛函:

$$\begin{aligned}s(t)&=C\left[x(t)+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\beta(\theta)u(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\\&=C\left[x(t)+\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}e^{A(\theta-\tau)}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(t+\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}e^{A(\theta-\tau)}\mathrm{d}\beta(\theta)u(t+\tau)\mathrm{d}\tau\right].\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $C\overset{\text{def}}{=\!=}\bar{C}T$.

注 1. 式(13)表明,在时滞变结构控制系统中,传统的切换函数表现为一个切换泛函,即 $s\in\{C([-r,0],R^n)\times L_1([-r,0],R^m)\to R^m\}$. 而切换流形 $\mathscr{S}$ 则是 $C([-r,0],R^n)\times L_1([-r,0],R^m)$ 中的一个子流形,这里

$$\begin{aligned}\mathscr{S}=\{&(\phi_1,\phi_2)\in C([-r,0],R^n)\times L_1([-r,0],R^m),\\&\phi_1(0)+\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}e^{A(\theta-\tau)}\mathrm{d}\alpha(\theta)\phi_1(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}e^{A(\theta-\tau)}\mathrm{d}\beta(\theta)\phi_2(\tau)\mathrm{d}\tau=0\}.\end{aligned}$$

这是时滞变结构控制系统的一个重要特征.

由式(7),(8)及(12)可得

$$\begin{aligned}\dot{s}(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=CA\bigg[&x(t)+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\tau)\mathrm{d}\tau\\&+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\beta(\theta)u(\tau)\mathrm{d}\tau\bigg]+u(t).\end{aligned} \tag{14}$$

取等速趋近控制律[8], 即令

$$\dot{s}(t)=-\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,s(t). \tag{15}$$

式中 $\varepsilon=\mathrm{diag}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m\},\varepsilon_i>0$; $\mathrm{sgn}\,s=[\mathrm{sgn}\,s_1,\mathrm{sgn}\,s_2,\cdots,\mathrm{sgn}\,s_m]^T$. 联立式(14)及(15),可得变结构控制器:

$$\begin{aligned}u(t)=-CA\bigg[&x(t)+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\tau)\mathrm{d}\tau\\&+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\beta(\theta)u(\tau)\mathrm{d}\tau\bigg]-\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,s(t).\end{aligned} \tag{16}$$

在式(14)中令 $\dot{s}=0$，得等价控制为

$$u_{eq}(t)=-CA\Big[\,x(t)+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\beta(\theta)u_{eq}(\tau)\mathrm{d}\tau\,\Big]. \tag{17}$$

从而得到滑动模态的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(t+\theta)+\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\beta(\tau)u_{eq}(t+\tau),\\&C\Big[x(t)+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\\&\qquad\cdot\,\mathrm{d}\beta(\theta)u_{eq}(\tau)\mathrm{d}\tau\Big]=0.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

注 2. 将有界变差函数 $\beta(\theta)$ 表示为可列个跳跃函数（设在 $t=-r_i$ 处的跳跃值为 $\tilde{\beta}_i$）及一绝对连续函数 $\tilde{\beta}(\theta),\theta\in[-r,0]$ 之和的形式. 则方程(1)右端的第二个积分及式(16)右端的第二个积分可分别表为

$$\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\beta(\theta)u(t+\theta)=\sum_{i=0}^{N}\tilde{\beta}_iu(t-r_i)+\int_{-r}^{0}\tilde{\beta}(\tau)u(t+\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{19}$$

$$\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\beta(\theta)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\sum_{i=0}^{N}\int_{-r_i}^{0}e^{-A(\tau+r_i)}\tilde{\beta}_iu(t+\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-r}^{0}\int_{-r}^{\tau}e^{-A(\tau-\theta)}\tilde{\beta}(\theta)\mathrm{d}\theta u(t+\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{20}$$

这里N可为有限值,亦可以等于$+\infty$,$0=r_0<r_1<\cdots<r_N=r$. 设系统(1)于 t_r 时刻到达切换流形 $\mathscr{S}$. 则当 $t<t_r$ 时,系统的运动是定义好的. 即任给 $(\phi_1,\phi_2)\in C([-r,0],R^n)\times L_1([-r,0],R^m)$，闭环系统(1)和(16)有满足初始条件 $(x_{t_0},u_{t_0})=(\phi_1,\phi_2)$ 的唯一解. 当 $t>t_r+r$ 时，系统的运动由方程(18)和(17)定义,它也是定义好的,即任给 $(\phi_1,\phi_2)\in\mathscr{S}$，系统(18)和(17)有满足初始条件 $(x_{t_0},u_{t_0})=(\phi_1,\phi_2)$的唯一解. 其证明类似于文献[5]中的 §2.2. 当 $t_r\leqslant t\leqslant t_r+r$ 时,描述系统运动的微分方程由式(18)和(17)给出,但其初始条件 (x_{t_r},u_{t_r}) 则是由系统(1)和(16)的运动给出. 因而系统运动的微分方程在 $[t_r,t_r+r]$ 上无定义. 尽管如此，由式(1)，(19)及(20)可以看出，$u(t)$ 将只在时刻 t_r 处不连续，$x(t)$ 在 $[t_r,t_r+r]$ 内均为连续的,但 $\dot{x}(t)$ 在时刻 $t=t_r+r_i$,$(0\leqslant i\leqslant N)$ 处则是不连续的，除此可数个点外，$\dot{x}(t)$ 仍是连续的.

下面讨论闭环系统(1)和(16)的稳定性. 为此，定义系统(1)的不稳定谱 $\sigma_{us}(S_d)=\{s\in\mathscr{C}:\det\Delta(s)=0,\mathrm{Re}(s)\geqslant-\nu_0\}$，相应地,定义系统(1)的稳定谱 $\sigma_s(S_d)$ 为 $\sigma_s(S_d)=\sigma(S_d)\backslash\sigma_{us}(S_d)$，其中

$$\sigma(S_d)=\{s\in\mathscr{C}:\det\Delta(s)=0\},\ \Delta(s)=sI-\int_{-r}^{0}e^{s\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta).$$

定理 1. 如果 $\sigma_{us}(S_d)\subset\sigma(A)$，则采用变结构控制策略(16)，闭环系统(1)和(16)是渐近稳定的.

证明. 证明分为两步. (i) 证明系统到达滑动模态后,将有 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$. (ii) 证明系统在到达过程中，$|x_i(t)|(i=1,2,\cdots,n)$ 有界.

(i) 由式(15)可知,系统将在有限时间内到达滑动模态,设到达时间为 t_r，则当 $t>t_r+r$ 时,系统的运动将由式(18)和(17)描述. 相应地,方程(9)和(10)则化为

$$z_1=(\bar{A}_{11}-\bar{A}_{12}K)\bar{z}_1,$$

$$\bar{z}_2 = -K\bar{z}_1.$$

由K阵的选取可知，$\lim_{t\to\infty}\bar{z}(t) = 0$，因而$\lim_{t\to\infty}z(t) = 0$。特别地，$z(t)$ 的 Laplace 变换 $Z(s)$ 将具有形式:

$$Z(s) = \frac{\boldsymbol{b}_z(s)}{a_z(s)}, \quad a_z(s) = \prod_{j=1}^{n-m}(s - s_j), \ \mathrm{Re}(s_j) < -\nu_0,$$

$$j = 1, 2, \cdots, n - m.$$

其中 $\boldsymbol{b}_z(s)$ 为 n 维列向量，其每个分量均为 s 的多项式。因而 $u(t) = -CAz(t)$ 的 Laplace 变换 $U(s)$ 具有形式:

$$U(s) = \frac{\boldsymbol{b}_u(s)}{a_z(s)}.$$

这里 $\boldsymbol{b}_u(s)$ 为m维列向量,其每个分量亦为 s 的多项式。

记 $x(t)$ 的 Laplace 变换为 $X(s)$，对式(3)的两边进行 Laplace 变换可得

$$X(s) = (\Gamma_1(s))^{-1}[Z(s) - \Gamma_2(s)U(s)]. \tag{21}$$

其中

$$\Gamma_1(s) = sI - \int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0} e^{A(\theta-\tau)}e^{s\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\alpha(\theta),$$

$$\Gamma_2(s) = \int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0} e^{A(\theta-\tau)}e^{s\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\beta(\theta).$$

注意到A的定义式(4),经过简单计算可得 $\Gamma_1(s) = (sI - A)^{-1}\Delta(s)$。于是式(21)化为

$$X(s) = \Delta^{-1}(s)(sI - A)[Z(s) - \Gamma_2(s)U(s)].$$

显然，$\Gamma_2(s)$ 是解析的,因而 $\Gamma_2(s)$ 不含任何极点。由于 $\sigma_{us}(S_d)\subset\sigma(A)$，于是有

$$\mathrm{Pole}(X)\subset\mathrm{Pole}(Z)\cup\sigma_s(S_d)\subset\mathscr{C}^{-}_{-\nu_0}.$$

这里 Pole(·) 表示变元的极点集。因而有 $\lim_{t\to\infty}x(t) = 0$。

(ii) 在到达过程,即 $t\in[0, t_r + r]$，系统运动的微分方程为

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(t+\theta) + \int_{-r}^{0}\mathrm{d}\beta(\tau)u(t+\tau), \tag{22}$$

$$\begin{aligned} u(t) = -F\Big[\, x(t) &+ \int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t} e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t} e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\beta(\theta)u(\tau)\mathrm{d}\tau\Big] + f(t). \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $F = CA, f(t) = [\pm\varepsilon_1, \pm\varepsilon_2, \cdots, \pm\varepsilon_m]^T$。相应地,系统(5)为

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + Bu(t), \\ u(t) &= -Fz(t) + f(t). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

系统(24)为一线性系统外加一个驱动项 $f(t)$，由于 $|f_i(t)| \leqslant \bar{\varepsilon}, i = 1, 2, \cdots, m$，其中 $\bar{\varepsilon} = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m\}$。故在 $[0, t_r + r]$ 内，$|z_i(t)|$ 有界，因而 $|u_i(t)|$ 有界，记此界为 P，即

$$|u_i(t)| \leqslant P, i = 1, 2, \cdots, m, t\in[0, t_r + r].$$

式(22)可等价地表为

$$x(t) = x(0) + \int_0^t\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\tau+\theta)\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\beta(\theta)u(\tau+\theta)\mathrm{d}\tau. \tag{25}$$

定义

$$|\phi| = \sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|\phi(\theta)|,\ \forall\phi\in C([-r,0],R),$$

$$\bar{\alpha}_{ij} = \bigvee_{-r}^{0}(\alpha_{ij}),\quad \bar{\beta}_{ij} = \bigvee_{-r}^{0}(\beta_{ij}),$$

$$\bar{\alpha} = \max\{\bar{\alpha}_{ij}: i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,n\},$$
$$\bar{\beta} = \max\{\bar{\beta}_{ij}: i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,m\}.$$

这里 $\bigvee_{-r}^{0}(\cdot)$ 表示函数在区间 $[-r,0]$ 上的总变分. 由式(25)可得

$$\begin{aligned}|x_i(t)| &\leqslant |x_i(0)| + \int_0^t\left|\int_{-r}^0\sum_{j=1}^n \mathrm{d}\alpha_{ij}(\theta)x_j(\tau+\theta)\right|\mathrm{d}\tau \\ &\quad + \int_0^t\left|\int_{-r}^0\sum_{j=1}^m \mathrm{d}\beta_{ij}(\theta)u_j(\tau+\theta)\right|\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant |x_i(0)| + \int_0^t\sum_{j=1}^n\bar{\alpha}_{ij}|x_{j\tau}|\mathrm{d}\tau + \int_0^t\sum_{j=1}^m\bar{\beta}_{ij}P\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant |x_i(0)| + m\bar{\beta}Pt + \int_0^t\bar{\alpha}\sum_{j=1}^n|x_{j\tau}|\mathrm{d}\tau, i = 1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

上述不等式对所有的 $t\in[0,t_r+r]$ 均成立. 故

$$|x_{it}| \leqslant |x_i(0)| + m\bar{\beta}Pt + \int_0^t\bar{\alpha}\sum_{j=1}^n|x_{j\tau}|\mathrm{d}\tau, i = 1,2,\cdots,n.$$

令 $\|x_t\| = \sum_{i=1}^n|x_{it}|$, 则由上式可得

$$\|x_t\| \leqslant \sum_{i=1}^n|x_i(0)| + mn\bar{\beta}Pt + \int_0^t\bar{\alpha}n\|x_\tau\|\mathrm{d}\tau.$$

由文献[5]的引理 3.1 可得

$$\|x_t\| \leqslant \left[\sum_{i=1}^n|x_i(0)| + mn\bar{\beta}Pt\right]e^{\bar{\alpha}nt},$$

因而 $|x_i(t)|(i = 1,2,\cdots,n)$ 在 $[0,t_r+r]$ 内有界. 证毕.

注 3. 当系统(1)的状态变量无时滞时,即对如下系统

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \int_{-r}^0\mathrm{d}\beta(\tau)u(t+\tau) \tag{26}$$

的特征矩阵总是存在, 并且矩阵 A_0 本身就是其特征矩阵之一, 因此系统(26)的变结构控制的设计问题,完全可以利用本节的理论来解决.

注 4. 前面的结果自然适用于点时滞系统:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{p_1}A_ix(t-r_i) + \sum_{j=0}^{p_2}B_ju(t-h_j).$$

其中 $A_i\in R^{n\times n}, B_j\in R^{n\times m}, 0 = r_0<r_1<\cdots<r_{p_1}\leqslant r<\infty$, $0 = h_0<h_1<\cdots<h_{p_2}\leqslant r$, 这只需把方程(1)中

的有界变差函数阵 $\alpha(\theta),\beta(\theta)$ 具体地取为如下形式即可：

$$\alpha(\theta)=\sum_{i=0}^{p_1}A_i\xi(t+r_i),\ \beta(\theta)=\sum_{i=0}^{p_2}B_i\xi(t+h_i).$$

其中 $\xi(t)$ 为单位阶跃函数：

$$\xi(t)=\begin{cases}1 & 当\ t\geqslant 0,\\ 0 & 当\ t<0.\end{cases}$$

3 时滞系统的特征矩阵

由上述结果可以看出，求解特征矩阵是设计时滞变结构控制系统的关键，本节讨论特征矩阵的解法.

一般地说，方程(4)的解不唯一，称 $\Gamma=\left\{A\in\mathscr{C}^{n\times n}:A=\int_{-r}^{0}e^{A\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta)\right\}$ 为系统(1)的特征矩阵集.

定义 2. n 维非零行向量 $\boldsymbol{v}$ 如果满足 $\boldsymbol{v}\Delta(s)=0,\ s\in\sigma(S_d)$，则称 $\boldsymbol{v}$ 为系统 S_d 的对应于特征值 s 的左特征向量.

由文献[6]中命题 2.2 可知，$\forall s_k\in\sigma(A)$，s_k 在矩阵 A 中的几何重复度与它在矩阵 $A_{s_k}\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\int_{-r}^{0}e^{s_k\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta)$ 中的几何重复度相同.

设 $\Lambda=\{s_k:k=1,2,\cdots,l\}\subset\sigma(S_d)$ 为复平面上的对称集，s_k 在 $\sigma(S_d)$ 中的代数重复度为 n_k，对矩阵 A_{s_k} 的几何重复度为 p_k. 设矩阵 A_{s_k} 对应于特征值 s_k 的 p_k 个独立左特征向量为 $\boldsymbol{v}_j^k,j=1,2,\cdots,p_k$. 显然它们也是系统(1)的对应于 s_k 的左特征向量. 设阵 A_{s_k} 关于特征值 s_k 的链头为 $\boldsymbol{v}_j^k$ 的根向量链的链长为 q_{kj}. 由文献[9]知 $\sum_{j=1}^{p_k}q_{kj}=n_k$. 这里进一步假定 $\sum_{k=1}^{l}n_k=n$. 对于 $\sum_{k=1}^{l}n_k\neq n$ 的情形，可用文献[6]中的扩维变换法结合这里的结果来处理. 定义矩阵：

$$\Delta^{(s_k)}=\int_{-r}^{0}e^{s_k\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta)-s_kI,k=1,2,\cdots,l,$$

$$\Delta_j^{(s_k)}=\frac{1}{j!}\int_{-r}^{0}\theta^je^{s_k\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta),k=1,2,\cdots,l;j\geqslant 1.$$

定理 2. 假设 $\sum_{k=1}^{l}n_k=n$. 如果下述关于 $\boldsymbol{v}_{j,i}^k$ $(k=1,2,\cdots,l;\ j=1,2,\cdots,p_k;\ i=1,2,\cdots,q_{kj})$ 的代数方程

$$\boldsymbol{v}_{j,1}^k\Delta^{(s_k)}=0, \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{v}_{j,2}^k\Delta^{(s_k)}=\boldsymbol{v}_{j,1}^k[I-\Delta_1^{(s_k)}],\\&\boldsymbol{v}_{j,3}^k\Delta^{(s_k)}=\boldsymbol{v}_{j,2}^k[I-\Delta_1^{(s_k)}]-\boldsymbol{v}_{j,1}^k\Delta_2^{(s_k)},\\&\qquad\vdots\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_{j,q_{kj}}^{k}\Delta^{(s_k)} = v_{j,q_{kj}-1}^{k}[I - \Delta_1^{(s_k)}] - \sum\limits_{i=2}^{q_{kj}-1} v_{j,q_{kj}-i}^{k}\Delta_i^{(s_k)}, \\ k = 1,2,\cdots,l; j = 1,2,\cdots,p_k \end{array}\right|$$

有解,且向量组 $\{v_{j,i}^k: k = 1,2,\cdots,l; j = 1,2,\cdots,p_k; i = 1,2,\cdots,q_{kj}\}$ 线性独立,则必有 $A \in \Gamma$,使得 $\sigma(A) = \Lambda$.

证明. 为节省篇幅,这里只给出 A 的解法. 令

$$Q_j^k \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{bmatrix} v_{j,1}^k \\ v_{j,2}^k \\ \vdots \\ v_{j,q_{kj}}^k \end{bmatrix} \in \mathscr{C}^{q_{kj}\times n}, \quad J_j^k \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{bmatrix} s_k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & s_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & s_k \end{bmatrix} \in \mathscr{C}^{q_{kj}\times q_{kj}},$$

$$Q^k = [(Q_1^k)^T, (Q_2^k)^T, \cdots, (Q_{p_k}^k)^T]^T, k = 1,2,\cdots,l,$$

$$J^k = \text{Block diag}\{J_1^k, J_2^k, \cdots, J_{p_k}^k\}, k = 1,2,\cdots,l,$$

$$Q = [(Q^1)^T, (Q^2)^T, \cdots, (Q^l)^T]^T, J = \text{Block diag}\{J^1, J^2, \cdots, J^l\}.$$

则 $A = Q^{-1}JQ$ 即为所求.

注 5. 据对阵 A_{s_k} 的假定,方程(27)总是有解,并且不妨可取 $v_{j,1}^k = v_j^k$, $k = 1, 2, \cdots, l; j = 1, 2, \cdots, p_k$. 因而向量组 $\{v_{j,1}^k: j = 1,2,\cdots,p_k\}$ 总是线性独立. 但方程(28)未必总是有解.

注 6. 定理 2 中的条件 $\{v_{j,i}^k: k = 1,2,\cdots,l; j = 1,2,\cdots,p_k; i = 1,2,\cdots,q_{kj}\}$ 线性独立不能省略,因为系统(1)的对应于不同特征值的左特征向量可能线性相关.

定理 2 表明,求解系统(1)的特征矩阵的问题主要归结为研究方程(27)和(28)是否有解及解的性质的问题. 下面的两个定理可回答这两个问题.

定理 3. 设

$$\int_{-r}^{0} \mathrm{d}\alpha(\theta)x(t+\theta) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^{\rho} A_ix(t-r_i) + \int_{-r}^{0} L(\theta)x(t+\theta)\mathrm{d}\theta.$$

其中 $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_\rho \leqslant r, L \in L_1([-r,0], R^{n\times n})$, $A_i \in R^{n\times n}$, $i = 0,1,2,\cdots,\rho$. 若关于矩阵 A_i 及 $L(\cdot)$ 的可交换性成立:

$$\left.\begin{array}{l} A_iA_j = A_jA_i, \ \forall i,j \in \{0,1,2,\cdots,\rho\}, \\ A_iL(\theta) = L(\theta)A_i, \ \forall i \in \{0,1,2,\cdots,\rho\}, \ \forall \theta \in [-r,0], \\ L(\theta_1)L(\theta_2) = L(\theta_2)L(\theta_1), \ \forall \theta_1,\theta_2 \in [-r,0], \end{array}\right\} \tag{29}$$

则方程(27)和(28)必定有解,且 $v_{j,1}^k \neq 0, k = 1,2,\cdots,l; j = 1,2,\cdots,p_k$.

定理 4. 如果条件(29)成立,对给定的 $k \in \{1,2,\cdots,l\}$, 矩阵 $I - \Delta_1^{(s_k)}$ 非奇异,则向量组 $\{v_{j,i}^k: j = 1,2,\cdots,p_k; i = 1,2,\cdots,q_{kj}\}$ 线性独立.

限于篇幅,上述两个定理的证明从略.

参 考 文 献

[1] Jafarov E M. Analysis and synthesis of multidimensional SVS with delays in sliding-modes. in *Proc. 11th IFAC World Congress*, 1990, **6**: 46—49.
[2] 胡跃明,周其节. 带有滞后影响的控制系统的变结构控制. 自动化学报,1991,**17**(5): 587—591.
[3] 郑锋,程勉,高为炳. 控制存在时滞的系统的变结构控制. 控制与决策,1993,**8**: 95—100.
[4] 郑锋,程勉,高为炳. 一类时滞线性系统的变结构控制. 自动化学报,1995,**21**(2): 221—225.
[5] Hale J K. *Theory of functional differential equation*. New York: Springer-Verlag, 1977.
[6] Fiagbedzi Y A, Pearson A E. A multistage reduction technique for feedback stabilizing distributed time-lag systems. *Automatica*, 1987, **23**: 311—326.
[7] 高为炳. 变结构控制理论基础,北京: 中国科技出版社,1990.
[8] 高为炳,程勉. 变结构控制的品质控制. 控制与决策,1989,**4**: 1—6.
[9] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数,北京: 科学出版社,1984.

THEORY OF VARIABLE STRUCTURE CONTROL OF TIME-LAG SYSTEMS AND ITS APPLICATION TO THE STABILIZATION OF COMBUSTION IN ROCKET ENGINES

ZHENG FENG
(*Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing* 100084)

CHENG MIAN GAO WEIBING
(*The 7th Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics Beijing* 100083)

ABSTRACT

In this paper, the problem of variable structure control of time-lag systems and its application is studied. In the first part, the concept of switching functional is introduced and hence a systematic design method is established for the variable structure control of general time-delay systems. Furthermore, the solutions of the so-called characteristic matrix equation for retarded systems are given under general conditions.

Key words: Time-lag systems, variable structure control, switching functional, characteristic matrices, stabilization.

郑 锋 简介及照片见本刊第 21 卷第 3 期.
程 勉, 高为炳 简介及照片见本刊第 17 卷第 6 期.