

相关噪声下非线性系统状态 与偏差的分离估计算法¹⁾

周东华 王庆林

(北京理工大学自动控制系 北京 100081)

摘 要

将用于零均值、高斯白噪声干扰下的非线性时变随机系统的伪偏差分离估计算法推广到了系统及测量噪声为非零均值高斯白噪声、系统噪声及测量噪声为相关噪声的情形。通过引入“弱化因子”概念，使得状态和偏差估计更加平滑。最后通过数字仿真证实了该方法的有效性。同扩展卡尔曼滤波器相比，其计算量小，且可以准确估计出时变规律未知的随机时变偏差。

关键词：非线性系统，时变系统，随机系统，相关噪声，偏差分离估计，弱化因子。

1 引言

自从 Friedland [1] 提出了著名的用于线性系统的偏差分离估计算法之后，人们已经做了许多推广工作^[1-4]。文 [2] 将 Friedland 的最初结果推广到了一类具有零均值，高斯白噪声干扰下的非线性时变随机系统。本文进一步给出如下推广：(1) 系统中的偏差具有更一般性的表现形式；(2) 系统及测量噪声可以是非零均值的高斯白噪声；(3) 系统噪声与测量噪声是相关的；(4) 引入了弱化因子的新概念，以使得状态及偏差估计值更加平滑。

2 问题的引出

考虑非线性系统 I

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{b}(k), \mathbf{u}(k), k) + \Gamma(\mathbf{x}(k), k)\mathbf{v}(k), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{b}(k+1), \mathbf{u}(k+1), k+1) + \mathbf{e}(k+1). \quad (2)$$

其中状态 $\mathbf{x} \in R^n$ ；偏差 $\mathbf{b} \in R^p$ ；输入 $\mathbf{u} \in R^q$ ；输出 $\mathbf{y} \in R^m$ ； $\Gamma(\cdot) \in R^{n \times r}$ ； \mathbf{f}, \mathbf{h} 是非线性函数。过程噪声 $\mathbf{v} \in R^r$ 是高斯白噪声； $\mathbf{e} \in R^m$ 是测量白噪声； $\mathbf{v}(k)$ 和 $\mathbf{e}(k)$ 是相关

1) 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助项目。

本文于 1995 年 5 月 2 日收到

的,具有如下统计特性:

$$\begin{cases} E\mathbf{v}(k) = \mathbf{m}_v(k), \text{cov}\{\mathbf{v}(k), \mathbf{v}(j)\} = Q(k)\delta_{k,j}, \\ E\mathbf{e}(k) = \mathbf{m}_e(k), \text{cov}\{\mathbf{e}(k), \mathbf{e}(j)\} = R(k)\delta_{k,j}, \\ \text{cov}\{\mathbf{v}(k), \mathbf{e}(j)\} = S(k)\delta_{k,j}. \end{cases} \quad (3)$$

$\mathbf{x}(0)$ 是高斯白噪声,具有如下统计特性:

$$E\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \text{var}\{\mathbf{x}(0)\} = P_0.$$

$\mathbf{x}(0)$ 与 $\mathbf{v}(k)$ 和 $\mathbf{e}(k)$ 统计独立. 假定偏差 $\mathbf{b}(k)$ 是未知的,它可以是非线性的,随机的和时变的.

本文的目的是要得到系统 I 的偏差分离估计^[4].

3 主要结果

将 $f(\cdot)$ 在状态及偏差的估计值 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 和 $\hat{\mathbf{b}}(k)$ 上进行泰勒展开,并只保留其线性项. (1) 式可化为

$$\mathbf{x}(k+1) = A(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{b}(k) + \mathbf{t}(k) + \Gamma(k)\mathbf{v}(k). \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} A(k) &= \left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(k), \hat{\mathbf{b}}(k)}, \quad B(k) = \left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbf{b}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(k), \hat{\mathbf{b}}(k)}, \\ \mathbf{t}(k) &= f(\hat{\mathbf{x}}(k), \hat{\mathbf{b}}(k), \mathbf{u}(k), k) - A(k)\hat{\mathbf{x}}(k) - B(k)\hat{\mathbf{b}}(k), \\ \Gamma(k) &= \Gamma(\hat{\mathbf{x}}(k), k). \end{aligned}$$

相应的 (2) 式也可以化为

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+1) &= H(k+1)\mathbf{x}(k+1) + D(k+1)\mathbf{b}(k+1) \\ &+ \mathbf{z}(k+1) + \mathbf{e}(k+1). \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} H(k+1) &= \left. \frac{\partial h(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(k+1|k), \hat{\mathbf{b}}(k)}, \quad D(k+1) = \left. \frac{\partial h(\cdot)}{\partial \mathbf{b}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(k+1|k), \hat{\mathbf{b}}(k)}, \\ \mathbf{z}(k+1) &= h(\hat{\mathbf{x}}(k+1|k), \hat{\mathbf{b}}(k), \mathbf{u}(k+1), k+1) \\ &- H(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) - D(k+1)\hat{\mathbf{b}}(k). \end{aligned}$$

令 $J(k) \in R^{n \times m}$ 为一个待定的矩阵,那么利用 (3), (5) 式, (4) 式可以化为

$$\mathbf{x}(k+1) = A^*(k)\mathbf{x}(k) + B^*(k)\mathbf{b}(k) + \mathbf{t}^*(k) + \mathbf{v}^*(k). \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} A^*(k) &= A(k) - J(k)H(k), \quad B^*(k) = B(k) - J(k)D(k), \\ \mathbf{t}^*(k) &= \mathbf{t}(k) + \Gamma(k)\mathbf{m}_v(k) + J(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{z}(k) - \mathbf{m}_e(k)], \\ \mathbf{v}^*(k) &= \Gamma(k)[\mathbf{v}(k) - \mathbf{m}_v(k)] - J(k)[\mathbf{e}(k) - \mathbf{m}_e(k)]. \end{aligned}$$

相应地输出方程 (5) 又等价于

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+1) &= H(k+1)\mathbf{x}(k+1) + D(k+1)\mathbf{b}(k+1) + \mathbf{z}^*(k+1) \\ &+ \mathbf{e}^*(k+1). \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{z}^*(k+1) = \mathbf{z}(k+1) + \mathbf{m}_c(k+1), \quad \mathbf{e}^*(k+1) = \mathbf{e}(k+1) - \mathbf{m}_c(k+1).$$

因此得到

$$\begin{aligned} E\mathbf{v}^*(k) &= \mathbf{0}, \quad E\mathbf{e}^*(k) = \mathbf{0}, \\ \text{cov}\{\mathbf{v}^*(k), \mathbf{v}^*(j)\} &= Q^*(k)\delta_{k,j} \\ &= [\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) - J(k)R(k)J^T(k)]\delta_{k,j}, \\ \text{cov}\{\mathbf{e}^*(k), \mathbf{e}^*(j)\} &= R(k)\delta_{k,j}, \\ \text{cov}\{\mathbf{v}^*(k), \mathbf{e}^*(j)\} &= [\Gamma(k)S(k) - J(k)R(k)]\delta_{k,j}. \end{aligned} \quad (8)$$

从(8)式可知, 选择

$$J(k) = \Gamma(k)S(k)R^{-1}(k),$$

$\mathbf{v}^*(k)$ 和 $\mathbf{e}^*(k)$ 就成了互不相关的零均值高斯白噪声。

基于等价的系统(6), (7), 可以直接应用文[2]的用于随机时变偏差的伪偏差分离估计算法。再通过引入弱化因子, 并经过一个冗长的同类项化简过程, 最终得到相关噪声干扰下非线性系统的伪偏差分离估计算法。由下式给出:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= f(\hat{\mathbf{x}}(k), \hat{\mathbf{b}}(k), \mathbf{u}(k), k) + \Gamma(k)\mathbf{m}_v(k) \\ &\quad + J(k)[\mathbf{y}(k) - h(\hat{\mathbf{x}}(k), \hat{\mathbf{b}}(k), \mathbf{u}(k), k) - \mathbf{m}_c(k)] \\ &\quad + [K_o(k+1) + V(k+1)K_b(k+1)]\boldsymbol{\gamma}(k+1), \\ \hat{\mathbf{b}}(k+1) &= \hat{\mathbf{b}}(k) + K_b(k+1)\boldsymbol{\gamma}(k+1). \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} K_o(k+1) &= P_o(k+1|k)H^T(k+1)[H(k+1)P_o(k+1|k)H^T(k+1)R(k+1)]^{-1}, \\ P_o(k+1|k) &= A^*(k)P_o(k)(A^*(k))^T + Q^*(k), \\ P_o(k+1) &= [I - K_o(k+1)H(k+1)]P_o(k+1|k), \\ V(k+1) &= [I - K_o(k+1)H(k+1)]U(k) - K_o(k+1)D(k+1), \\ U(k) &= A^*(k)V(k) + B^*(k), \\ K_b(k+1) &= P_b(k+1)[H(k+1)V(k+1) + D(k+1)]^T R^{-1}(k+1), \\ P_b^{-1}(k+1) &= [\lambda(k+1)P_b(k)]^{-1} + C^T(k+1)[H^T(k+1)P_o(k+1|k)H(k+1) \\ &\quad + R(k+1)]^{-1}C(k+1), \\ C(k+1) &= H(k+1)U(k) + D(k+1), \\ \boldsymbol{\gamma}(k+1) &= \mathbf{y}(k+1) - h(\hat{\mathbf{x}}(k+1|k), \hat{\mathbf{b}}(k), \mathbf{u}(k+1), k+1) - \mathbf{m}_c(k+1), \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) &= A^*(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + B^*(k)\hat{\mathbf{b}}(k) + \mathbf{t}^*(k), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\lambda(k+1) = \begin{cases} \lambda_o, & \text{if } \lambda_o \geq 1, \\ 1, & \text{if } \lambda_o < 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\lambda_o = \frac{\text{tr}[N(k+1)]}{\text{tr}[M(k+1)]}, \quad (11)$$

$$N(k+1) = V_o(k+1) - \beta \cdot R(k+1), \quad (12)$$

$$M(k+1) = D(k+1)P_b(k)D^T(k+1), \quad (13)$$

$$V_o(k+1) = \begin{cases} \gamma(1)\gamma^T(1) & \text{when } k=0, \\ \frac{[\rho V_o(k) + \gamma(k+1)\gamma^T(k+1)]}{1+\rho} & \text{when } k \geq 1. \end{cases} \quad (14)$$

初始值

$$V(0) = 0.$$

在(9)式中, $\lambda(k+1) \geq 1$ 是一个次优渐消因子, 其值可以根据残差序列 $\boldsymbol{y}(k+1)$ 由(10)–(14)式自适应在线确定, 这也是本文算法可以估计随机时变偏差的根据所在, 参见文[2]. 在(12)式中 $\beta \geq 1$ 是一个弱化因子, 其值可以根据不同的对象通过计算机仿真确定. 在(14)式中, $0 < \rho < 1$ 是一个遗忘因子, 通常选择 $\rho = 0.95$.

注1. 若选择 1) $S(k) = 0$, $m_v(k) = 0$, $m_c(k) = 0$, 2) $\beta = 1$, 3) 偏差线性地进入系统 I , 则本文算法将退化为文[2]中的算法.

注2. 文[3]中的算法也是本文算法的一个特例. 这只需令 $S(k) = 0$, $m_v(k) = 0$, $m_c(k) = 0$, 并令 $\lambda(k+1) = 1$, 此时所退化了的算法就只能准确地估计定常偏差.

4 数值仿真

一个非线性系统由下式描述:

$$\begin{cases} x(k+1) = -0.058x^2(k) + x(k) + 0.02u(k) + 0.4b(k) + 0.1v(k), \\ y(k+1) = 0.5x^2(k+1) + 0.3b(k+1) + e(k+1). \end{cases}$$

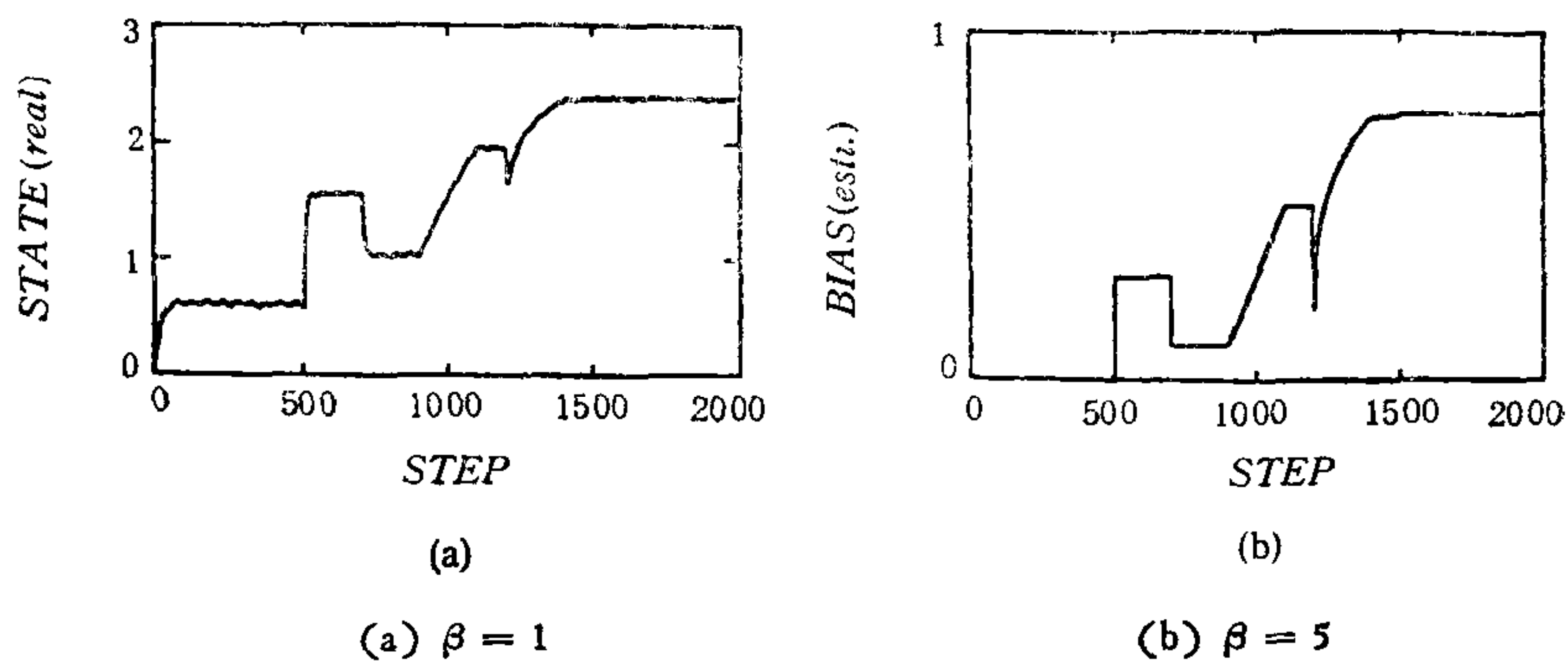


图1 系统的实际状态及偏差

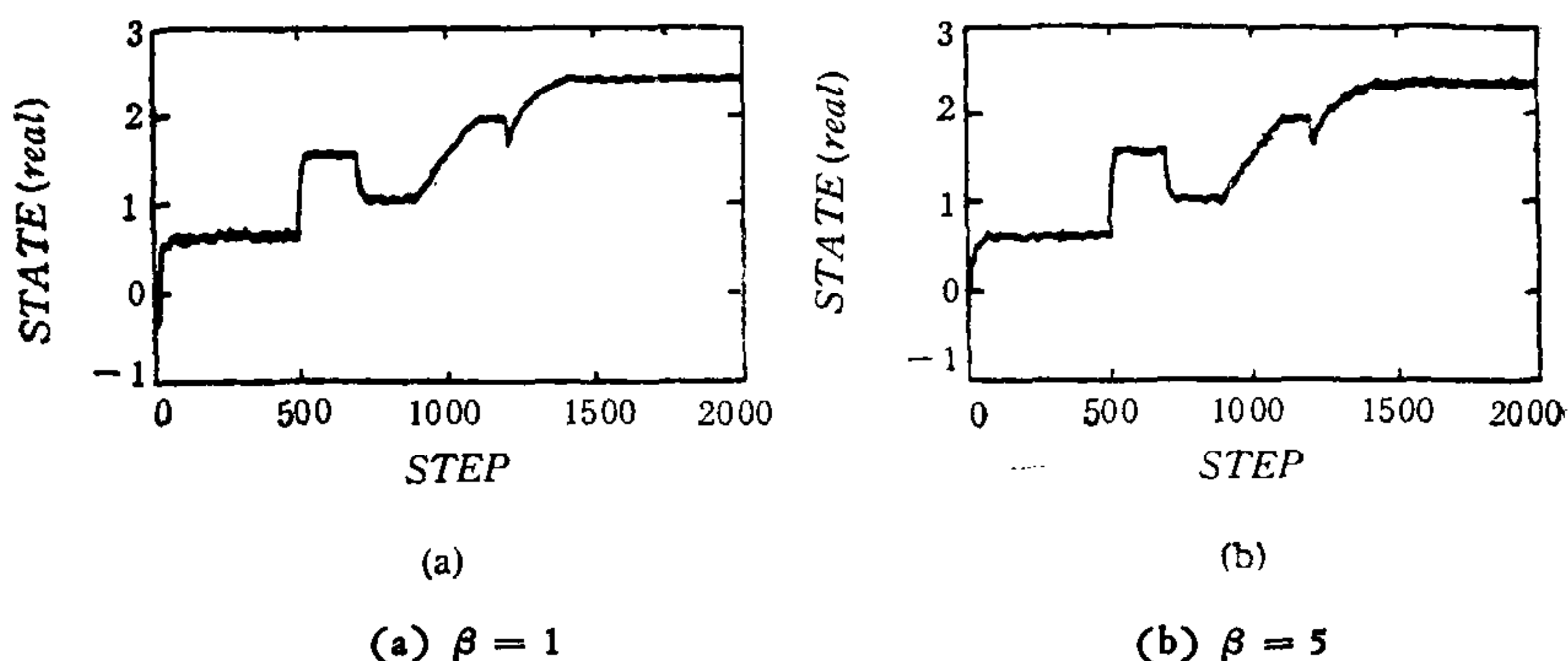


图2 状态估计值

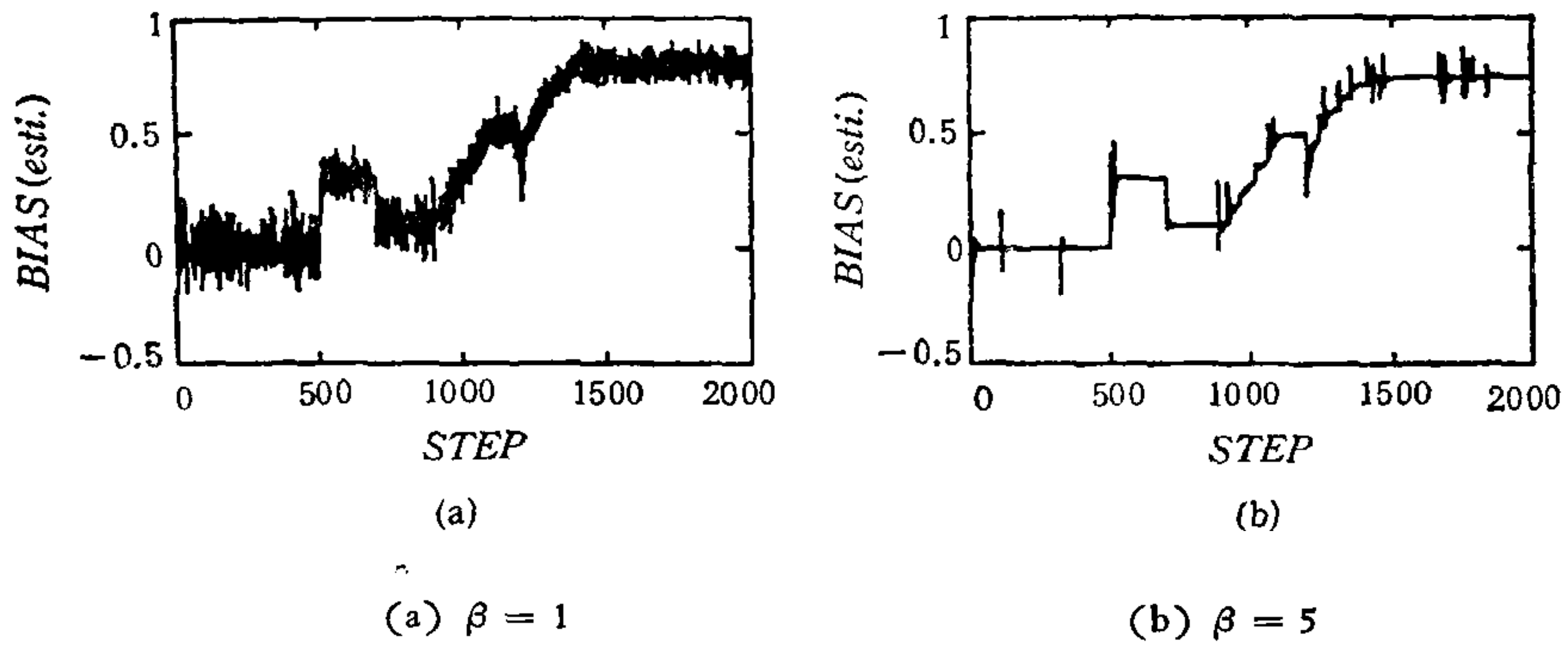


图3 偏差估计值

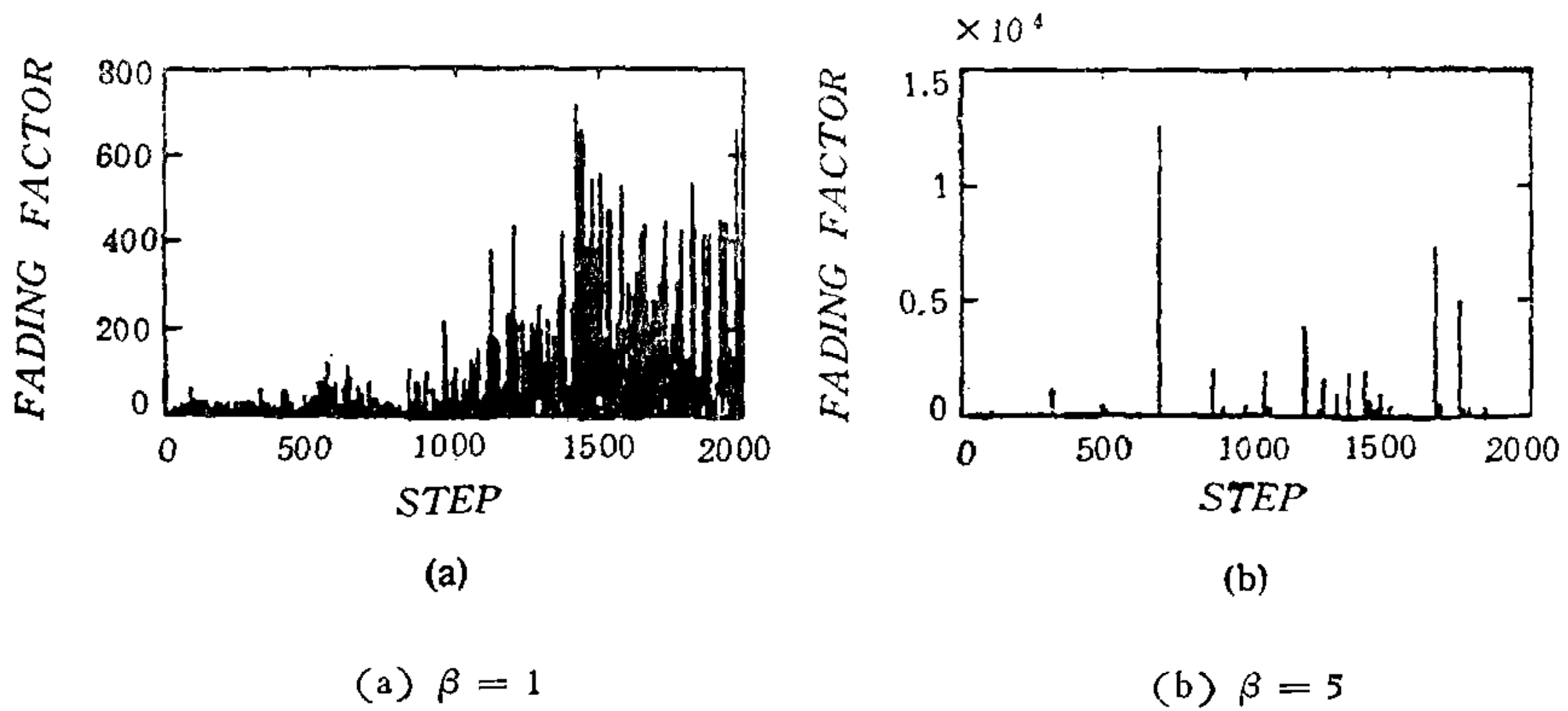


图4 渐消因子 $\lambda(k+1)$

其中 $Q = 0.0005, R = 0.001, m_v = 0.02, m_e = -0.06, S = 0.0032, x(0) = b(0) = 0$. 任意设置一个强非线性的、强时变的随机偏差如下:

$$b(k+1) = \begin{cases} b(k) + \zeta(k), & k = 0, 1, \dots, 498; \\ b(499) + 0.3 + \zeta(499), & k = 499; \\ b(k) + \zeta(k), & k = 500, 501, \dots, 698; \\ b(699) - 0.2 + \zeta(699), & k = 699; \\ b(k) + \zeta(k), & k = 700, 701, \dots, 899; \\ b(k) + 0.002 + \zeta(k), & k = 900, 901, \dots, 1099; \\ b(k) + \zeta(k), & k = 1100, 1101, \dots, 1199; \\ (b(1200) - 0.3) * (k - 1199)^{1/4} + \zeta(k), & k = 1200, 1201, \dots, 1399; \\ b(k) + \zeta(k), & k = 1400, 1401, \dots, 1999. \end{cases}$$

其中 $\zeta(k)$ 是一个零均值的高斯白噪声,其方差为 0.0002^2 .

仿真中未利用偏差 b 的任何先验知识,初始值设置为: $\hat{x}(0) = -0.05, \hat{b}(0) = 0.01, P_o(0) = 1, P_b(0) = 0.1, \rho = 0.95$, 仿真结果由图 1—4 所示,其中已经对不同的弱化因子进行了仿真比较. 仿真结果表明了在一定的范围内,选择一个较大的弱化因子将使得偏差估计值更加平滑,图 3、图 4 揭示了次优渐消因子的自动调节机理.

5 结论

本文给出了一个相关噪声干扰下非线性时变随机系统的伪偏差分离估计算法,与采用扩充状态变量方法的扩展卡尔曼滤波器(EKF)相比较,它有如下的优点:1)计算量大大下降^[2];2)可以准确的估计出时变规律未知的随机时变偏差,而EKF只能用于定常偏差;3)改进了算法的数值稳定性。通过将过程参数转化成偏差量来进行估计的方法,本文算法有可能直接应用于控制系统的故障检测与诊断^[4]。

参 考 文 献

- [1] Friedland B. Treatment of bias in recursive filtering. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1969, **AC-14**: 359—367.
- [2] Zhou D H, Sun Y X, Xi Y G and Zhang Z J. Extension of Friedland's separate-bias estimation to randomly time-varying bias for nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*; 1993, **AC-38**:1270-1273.
- [3] Caglayan A K and Lancraft R Y. A separated bias identification and state estimation algorithm for nonlinear systems. *Automatica*, 1983, **19**: 561—570.
- [4] Zhou D H, Sun Y X, Xi Y G and Zhang Z J. Sensor fault detection and diagnostics of nonlinear systems with application to paper machines. Proc. of 12th IFAC World Congress 1, 1993, 497—500.

A SEPARATE BIAS AND STATE ESTIMATION ALGORITHM FOR NONLINEAR SYSTEM WITH CORRELATED NOISE

ZHOU DONGHUA WANG QINGLIN

(Dept. of Automatic Control, Beijing Institute of Technology Beijing 100081)

ABSTRACT

The estimation algorithm of pseudo-separate bias and state for nonlinear time-varying stochastic system with zero mean, Gaussian white noise disturbance is extended to the case of the system with nonzero mean and correlated noise disturbance. By using "weakening factor", smoother estimation value curve of the states and the bias can be gotten. Finally, simulation result is presented to verify the effectiveness of the new approach. It shows that, compared with Extended Kalman Filter, the computation amount of the new algorithm is much less, and the stochastic time-varying bias of the system can be estimated exactly.

Key words: Nonlinear system, time-varying system, stochastic system, correlated noise, separate-bias estimation, weakening factor.

周东华 照片、简历见本刊第 19 卷第 2 期。现为北京理工大学副教授。德国洪堡基金获得者。已发表论文 50 余篇。



王庆林 1963 年生于四川省重庆市。分别于 1983 年及 1990 年在北京理工大学获工学学士及工学硕士学位。现为北京理工大学讲师,中科院自动化所博士研究生。已发表论文 20 余篇。目前感兴趣的领域为: 复杂系统建模、故障诊断、模糊控制及文献计量学。