

# Euler-Bernoulli 梁的反馈镇定<sup>1)</sup>

冯德兴 张维骏

(中国科学院系统科学所 北京 100080)

## 摘 要

讨论端点带负荷的 Bernoulli 梁的横向振动的控制问题。分析了系统的谱结构, 提出一种非线性边界反馈来镇定梁的横向振动, 并证明了相应的闭环系统的渐近稳定性, 最后给出了一些数值模拟结果。

**关键词:** Euler-Bernoulli 梁, 谱结构, 非线性边界控制, 反馈镇定, 渐近稳定性。

## 1 问题的提出

考虑如下 Euler-Bernoulli 梁的横向振动模型<sup>[1,2]</sup>:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) (x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

其中  $l$  为梁的长度,  $\rho$  为梁的单位长度质量,  $EI$  是刚度系数,  $y(x, t)$  表示位于梁  $x$  处  $t$  时刻的横向位移。假定梁在  $x = 0$  处简支, 而在端点  $x = l$  有一质量为  $M$  的重物, 围绕其质心的惯量矩为  $J$ 。于是边界条件如下:

$$\begin{cases} y(0, t) = y'(0, t) = 0, \\ M \ddot{y}(l, t) - (EI y'')'(l, t) = u_1(t), \\ J \dot{y}'(l, t) + EI y''(l, t) = u_2(t), \end{cases} \quad (1.2)$$

其中  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  分别为作用于端点的控制力和力矩, 而点和撇分别表示对时间  $t$  和位置  $x$  的偏微商。

关于函数  $\rho(x)$  和  $p(x) \triangleq EI(x)$ , 假定存在常数  $\rho_0, \rho_1, p_0, p_1$  使得

$$H1) \quad \rho(\cdot) \in C[0, l], \quad \rho_1 \geq \rho(x) \geq \rho_0 > 0, \quad \forall x \in [0, l];$$

$$H2) \quad p(\cdot) \in C^2[0, l], \quad p_1 \geq p(x) \geq p_0 > 0, \quad \forall x \in [0, l].$$

为了把问题 (1.1), (1.2) 表述成抽象形式, 定义乘积 Hilbert 空间  $H = \mathbb{R}^2 \times L^2_p(0, l)$ , 赋以内积

$$(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)_H = M \xi_1 \xi_2 + J \eta_1 \eta_2 + \int_0^l \rho(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx,$$

1) 国家自然科学基金资助项目。  
本文于 1993 年 11 月 11 日收到

其中  $\hat{\varphi}_i = [\xi_i, \eta_i, \varphi_i]^T \in H, i = 1, 2$ . 在  $H$  中定义线性算子  $A$  为

$$A\tilde{\varphi} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{M} (p\varphi'')'(l) \\ \frac{1}{J} (p\varphi'')(l) \\ \frac{1}{p} (p\varphi'')''(\cdot) \end{bmatrix}, \tilde{\varphi} \in D(A),$$

$$D(A) = \{\tilde{\varphi} = [\varphi(l), \varphi'(l), \varphi]^T | (P\varphi'')'' \in L_p^2(0, l), \varphi(0) = \varphi'(0) = 0\}.$$

于是由 (1.1), (1.2) 式描述的梁振动模型可以写成  $H$  中如下的二阶发展方程:

$$\frac{d^2 \tilde{y}(t)}{dt^2} + A\tilde{y}(t) = b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t), \quad (1.3)$$

其中

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} y(l, t) \\ y'(l, t) \\ y(\cdot, t) \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1/M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \\ 0 \end{bmatrix}.$$

近年来, 许多学者研究了弹性系统的边界反馈镇定问题<sup>[3,4]</sup>. 文<sup>[3]</sup>研究了相互联接的多根梁的边界反馈控制, 得到了指数镇定结果. 本文的研究结论是端点负载情况下梁振动可以通过某种非线性边界反馈达到渐近稳定.

## 2 $A$ 的谱结构

对于  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in D(A)$ , 通过分部积分得到

$$\begin{aligned} (A\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})_H &= -\int_0^l (p(x)\varphi''(x))''\psi(x)dx - (p\varphi'')'(l)\psi(l) + p\varphi''(l)\psi'(l) \\ &= \int_0^l p(x)\varphi''(x)\psi''(x)dx = (\tilde{\varphi}, A\tilde{\psi})_H. \end{aligned} \quad (2.1)$$

**定理 2.1.** 假定条件  $H1), H2)$  成立, 则  $A$  是  $H$  中自伴正定算子, 并且具有紧豫解式.

证明. 从 (2.1) 式容易看出  $A$  是自伴正算子. 因此只须证明  $A$  的豫解式  $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$  的紧性. 下面用  $H^m(0, l)$  表示通常的  $m$  阶 Sobolev 空间. (关于 Sobolev 空间见文<sup>[5]</sup>). 依 Sobolev 嵌入定理,  $H^1(0, l)$  紧嵌入到  $C[0, l]$ .

对于  $\lambda < 0$ , 显然  $\lambda \in \rho(A)$ ,  $p(A)$  为  $A$  的豫解集. 设  $\hat{f} = [\xi, \eta, f]^T \in H$ , 记  $\tilde{\varphi} = R(\lambda; A)\hat{f}$ , 即  $\tilde{\varphi} \in D(A)$  满足

$$\lambda\tilde{\varphi} - A\tilde{\varphi} = \hat{f}.$$

于是

$$\lambda\|\tilde{\varphi}\|_H^2 - \int_0^l p(x)|\varphi''(x)|^2 dx = (\hat{f}, \tilde{\varphi})_H. \quad (2.2)$$

根据延拓定理<sup>[5]</sup>和 Fourier 变换, 存在两个正常数  $C_1$  和  $C_2$  使得

$$C_1\|v\|_{H^2(0, l)} \leq \left( \int_0^l [ |v(x)|^2 + |v''(x)|^2 ] dx \right)^{1/2} \leq C_2\|v\|_{H^2(0, l)}, \forall v \in H^2(0, l). \quad (2.3)$$

$C_i$  总表示某些估计常数。从 (2.2) 式得

$$\|\varphi\|_{H^2(0,l)} + |\varphi(l)| + |\varphi'(l)| \leq C_3 \|\hat{f}\|_H. \quad (2.4)$$

又依 Sobolev 嵌入定理, 当  $s > 1/2$  时有

$$\begin{cases} \|v\|_{C[0,l]} \leq C_4 \|v\|_{H^s(0,l)}, & \forall v \in H^s(0,l), \\ \|v'\|_{C[0,l]} \leq C_5 \|v\|_{H^{s+1}(0,l)}, & \forall v \in H^{s+1}(0,l). \end{cases} \quad (2.5)$$

设  $\{f_n\}$  是  $H$  中有界序列, 并记  $\tilde{\varphi}_n = R(\lambda; A)f_n$ ,  $n \geq 1$ . 由 (2.4) 式可知存在子序列  $\{\varphi_{n'}\} \subset \{\varphi_n\}$  使得

$$\begin{cases} w - \lim_{n' \rightarrow \infty} \varphi_{n'} = \varphi, & \text{在 } H^2(0,l) \text{ 中,} \\ s - \lim_{n' \rightarrow \infty} \varphi_{n'} = \varphi, & \text{在 } H^{2-\varepsilon}(0,l) \text{ 中,} \end{cases} \quad (2.6)$$

其中  $\varepsilon > 0$ . 于是在 (2.6) 式中取  $\varepsilon$  使得  $0 < \varepsilon < 1/2$ , 并利用 (2.4) 式得到

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \varphi_{n'}(l) = \varphi(l), \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} \varphi_{n'}'(l) = \varphi'(l).$$

类似地在 (2.6) 式中取  $\varepsilon = 2$ , 得到

$$s - \lim_{n' \rightarrow \infty} \varphi_{n'}'(\cdot) = \varphi', \quad \text{在 } L^2_\rho(0,l) \text{ 中.}$$

因此, 得到

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \|\tilde{\varphi}_{n'} - \tilde{\varphi}\|_H = 0,$$

即  $R(\lambda; A)f_n$  含有收敛子列, 从而得证  $R(\lambda; A)$  的紧性.

这样, 依定理 2.1,  $A$  有纯点谱  $\sigma(A) = \{\lambda_k | k \geq 1\}$ ,  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ . 现在证明每一个  $\lambda_n$  都是单的. 为此先证明一个引理.

**引理 2.2.** 设条件 H1), H2) 成立. 如果  $[0, l]$  上的函数  $\varphi$  满足

$$(p\varphi'')''(x) = \lambda\rho(x)\varphi(x), \quad x \in (0, l), \quad (2.7)$$

$$\varphi'(l) = \varphi''(l) = 0, \quad \varphi(l) > 0, \quad (p\varphi'')'(l) < 0, \quad (2.8)$$

其中  $\lambda > 0$ , 那么  $\varphi(0) > 0$ .

证明. 在区间  $[x, l]$  上积分 (2.7) 式两端得到

$$(p\varphi'')'(l) - (p\varphi'')'(x) = \lambda \int_x^l \rho(s)\varphi(s)ds. \quad (2.9)$$

记  $d \triangleq \max\{|\varphi(x)| | 0 \leq x \leq l\} < \infty$ . 取一正数  $\xi$  使得  $0 < l - \xi < |(p\varphi'')'(l)| / \lambda\rho_1 d$ , 从 (2.9) 式可得

$$(p\varphi'')'(x) < 0, \quad x \in [\xi, l]. \quad (2.10)$$

在区间  $[x, l]$  上积分 (2.9) 式两端, 并使用边条件  $\varphi''(l) = 0$  得到

$$\frac{(l-x)}{p(x)} (p\varphi'')'(l) + \varphi''(x) = \frac{\lambda}{p(x)} \int_x^l (s-x)p(s)\varphi(s)ds. \quad (2.11)$$

由此, 从假设  $(p\varphi'')'(l) < 0$  和 (2.10) 式可知

$$\varphi''(x) > 0, \quad \forall x \in [\xi, l]. \quad (2.12)$$

然后再在  $[x, l]$  上积分 (2.11) 式两端, 得到

$$(p\varphi'')'(l) \int_x^l \frac{(l-s)}{p(s)} ds - \varphi'(x) = \int_x^l \frac{\lambda d\tau}{p(\tau)} \int_\tau^l (s-\tau)p(s)\varphi(s)ds, \quad (2.13)$$

这里,使用了条件  $\varphi'(l) = 0$ . 类似地,从 (2.13) 式可得

$$\varphi'(x) < 0, \forall x \in [\xi, l]. \quad (2.14)$$

最后积分 (2.13) 式两端得

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \varphi(l) - (p\varphi'')'(l) \int_x^l \frac{(l-s)(s-x)}{p(s)} ds \\ & + \lambda \int_x^l \frac{(\tau-x)}{p(\tau)} d\tau \int_\tau^l (s-\tau)\rho(s)\varphi(s) ds. \end{aligned} \quad (2.15)$$

同样,有

$$\varphi(x) > 0, \forall x \in [\xi, l]. \quad (2.16)$$

注意到在  $[\xi, l]$  上  $(p\varphi'')'' = \lambda\rho\varphi \geq 0$ , 可知  $(p\varphi'')'(\xi) < (p\varphi'')'(l) < 0$ . 使用上面相同的讨论可以得到

$$(p\varphi'')'(x) < 0, \varphi''(x) > 0, \varphi'(x) < 0, \varphi(x) > 0, \forall x \in [2\xi - l, l]. \quad (2.17)$$

反复进行上述过程可以得出结论: (2.17) 式对于一切  $x \in [0, l]$  成立, 特别有  $\varphi(0) > 0$ . 证毕.

**定理 2.3.** 设  $\tilde{\varphi}$  是  $A$  的本征元, 则  $\varphi'(l) \neq 0$ .

证明. 由于  $\tilde{\varphi}$  是  $A$  的本征元, 必有正数  $\lambda > 0$  使得

$$\begin{cases} (p\varphi'')''(x) = \lambda p(x)\varphi(x), & x \in (0, l), \\ \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, & p\varphi''(l) - \lambda J\varphi'(l) = 0, (p\varphi'')'(l) + \lambda M\varphi(l) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

如果  $\varphi'(l) = 0$ , 则依 (2.18) 式的边界条件有  $\varphi''(l) = 0$ . 显然  $\varphi(l) \neq 0$ , 因为否则的话,  $\varphi(l) = 0$  推出  $\varphi'''(l) = 0$ , 从而由常微分方程理论可知  $\varphi \equiv 0$ . 这样不失一般性可以假定  $\varphi(l) > 0$ , 因此  $(p\varphi'')'(l) < 0$ . 由此从引理 2.2 得到  $\varphi(0) > 0$ , 这与定理的假设相矛盾. 因此  $\varphi'(l) \neq 0$ , 证毕.

**定理 2.4.** 在假设  $H1), H2)$  下,  $A$  的每个本征值都是单的.

证明. 设  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$  是  $A$  的属于同一本征值  $\lambda$  的两个本征元. 记

$$\varphi(x) = \varphi_1'(l)\varphi_2(x) - \varphi_2'(l)\varphi_1(x).$$

显然  $\tilde{\varphi}$  满足 (2.18) 式, 但  $\varphi'(l) = 0$ , 因此由定理 2.3,  $\varphi \equiv 0$ . 这表明  $\tilde{\varphi}_1$  和  $\tilde{\varphi}_2$  线性相关. 证毕.

### 3 非线性边界反馈

下面讨论系统 (1.3) 的振动控制问题. 假定能量测到梁端点的横向位移的速度和角速度, 即  $\dot{y}(l, t)$  和  $\dot{y}'(l, t)$ . 于是为了镇定横向振动, 可以在梁端点施加如下形式的非线性反馈控制:

$$\begin{cases} u_1(t) \in -\frac{1}{M} \partial g_1(\dot{y}(l, t)), \\ u_2(t) \in -\frac{1}{J} \partial g_2(\dot{y}'(l, t)), \end{cases} \quad (3.1)$$

其中  $g_1, g_2: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  为两个下半连续真凸函数, 而  $\partial g_i$  表示  $g_i$  的次微分,  $i = 1, 2$  (关于

凸函数次微分见文[6]). 对于  $g_1$  和  $g_2$  作如下假设:

$$H3) \partial g_j(0) = \{0\}, 0 \notin \partial g_j(r), \forall r \neq 0, j = 1, 2.$$

定义 Hilbert 空间  $V = D(A^{\frac{1}{2}})$ , 内积为

$$(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})_V = \int_0^l p(x) \varphi''(x) \psi''(x) dx, \forall \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in V.$$

设  $V'$  表示  $V$  的对偶, 可以把算子  $A$  看作  $V$  到  $V'$  的有界算子:

$$\langle A\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \rangle_{VV'} = \int_0^l p(x) \varphi''(x) \psi''(x) dx, \forall \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in V.$$

定义下半连续凸函数  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  如下:

$$g(\xi) = \frac{1}{M} g_1(\xi_1) + \frac{1}{J} g_2(\xi_2), \forall \xi = [\xi_1, \xi_2]^T \in \mathbb{R}^2.$$

由文[6],

$$\partial g(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \partial g_1(\xi_1) \\ \frac{1}{J} \partial g_2(\xi_2) \end{bmatrix}, \xi \in \mathbb{R}^2$$

得知  $\partial g$  是  $\mathbb{R}^2$  中的极大单调映射.

控制系统 (1.3) 在非线形反馈 (3.1) 作用下变成

$$\frac{d^2 \tilde{y}(t)}{dt^2} + A\tilde{y}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \partial g_1(\dot{y}(l, t)) \\ \frac{1}{J} \partial g_2(\dot{y}'(l, t)) \\ 0 \end{bmatrix} \ni 0. \quad (3.2)$$

定义有界线性算子  $B: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$B\tilde{\varphi} = [\varphi(l), \varphi'(l)]^T, \forall \tilde{\varphi} \in V.$$

不难看出  $B$  的伴随  $B^*$  由下式定义:

$$\langle \tilde{\varphi}, B^* \xi \rangle_{VV'} = \xi_1 \varphi(l) + \xi_2 \varphi'(l), \forall \tilde{\varphi} \in V, \xi \in \mathbb{R}^2.$$

因此 (3.2) 式可以写成

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{y}(t)}{dt^2} + A\tilde{y}(t) + B^* \partial g(B\dot{\tilde{y}}(t)) \ni 0, \text{ 在 } V' \text{ 上,} \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \in V, \dot{\tilde{y}}(0) = \tilde{y}_1 \in H. \end{cases} \quad (3.3)$$

这样可以使使用文 [7] 中的框架来研究系统 (3.3) 的稳定性.

**定理 3.1.** 在假设  $H1), H2)$  之下,  $A + B^*(\partial g)B$  是  $V$  到  $V'$  的极大单调映象.

证明. 只需注意  $B$  是  $V$  到  $\mathbb{R}^2$  的满射映射, 所需要的结论从文 [7] 的定理 2.1 直接推出.

定义乘积 Hilbert 空间  $\mathcal{H} = V \times H$ , 并定义多值算子  $\mathcal{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  如下:

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\psi} \\ A\tilde{\varphi} + B^*(\partial g)B\tilde{\psi} \end{bmatrix},$$

$$D(\mathcal{A}) = \{[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}]^T \in \mathcal{H} \mid A\tilde{\varphi} + B^*(\partial g)B\tilde{\psi} \in H, \tilde{\psi} \in V\}.$$

注意在目前情况下  $B^*(\partial g)B$  的值域在  $H$  中,故

$$D(\mathcal{A}) = D(A) \times V.$$

根据文 [7] 有

**定理 3.2.** 在假设  $H1)$ — $H3)$  之下,  $\mathcal{A}$  在  $\mathcal{H}$  上是极大单调的.

利用算子  $\mathcal{A}$ , (3.3) 式可以写成  $\mathcal{H}$  中的一阶非线性发展方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{y}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \mathcal{A} \begin{bmatrix} \tilde{y}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \ni 0, \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0, \dot{y}(0) = \tilde{y}_1. \end{cases} \quad (3.4)$$

由于  $\mathcal{A}$  是  $\mathcal{H}$  上极大单调的,  $-\mathcal{A}$  生成  $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$  上的非线性压缩半群  $S(t)$ . 因此根据非线性半群理论<sup>[6]</sup>, 对于任意  $\tilde{y}_0 \in V, \tilde{y}_1 \in H$ , (3.4) 式有唯一弱解

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = S(t) \begin{bmatrix} \tilde{y}_0 \\ \tilde{y}_1 \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

此外, 若  $\tilde{y}_0 \in D(A), \tilde{y}_1 \in V$ , 则上述弱解成为强解, 并且  $[\tilde{y}(t), \dot{y}(t)]^r \in D(A) \times V, \forall t \geq 0$ .

利用 Lasalle 不变原理<sup>[7]</sup>来证明闭环系统 (3.4) 的渐近稳定性.

总是假定  $H1)$ — $H3)$  成立, 设  $[\tilde{y}(t), \dot{y}(t)]^r$  是 (3.4) 式的解. 与该解有关的能量是

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \|[\tilde{y}(t), \dot{y}(t)]^r\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} (\|\tilde{y}(t)\|_V^2 + \|\dot{y}(t)\|_H^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l [p(x) |y''(x, t)|^2 + \rho(x) |\dot{y}(x, t)|^2] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} [M |\dot{y}(l, t)|^2 + J |y'(l, t)|^2]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**引理 3.3.** 1)  $E(t)$  是  $t \geq 0$  的非增函数; 2) 若初始数据  $[\tilde{y}_0, \tilde{y}_1]^r \in D(\mathcal{A})$ , 则

$$\frac{dE(t)}{dt} \in -\dot{y}(l, t) \partial g_1(\dot{y}(l, t)) - \dot{y}'(l, t) \partial g_2(y'(l, t)), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.6)$$

证明. 先证 2). 设  $[\tilde{y}_0, \tilde{y}_1]^r \in D(\mathcal{A})$ , 于是  $[\tilde{y}(t), \dot{y}(t)]^r = S(t)[\tilde{y}_0, \tilde{y}_1]^r$  是 (3.4) 式的强解. 利用边条件 (1.2) 和反馈控制律 (3.1), 有

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \dot{y}(l, t) [M \dot{y}(l, t) - (py'')'(l, t)] + \dot{y}'(l, t) [J \dot{y}'(l, t) + py''(l, t)] \\ &\in -\dot{y}(l, t) \partial g_1(\dot{y}(l, t)) - \dot{y}'(l, t) \partial g_2(y'(l, t)), \end{aligned}$$

这正是 2). 但由假设  $H3)$ ,  $\partial g_1$  和  $\partial g_2$  是单调的, 故 1) 可从 2) 和  $D(\mathcal{A})$  在  $\mathcal{H}$  中的稠密性得出.

下面对  $g_1$  和  $g_2$  作进一步的假设:

$H4)$   $\partial g_1$  和  $\partial g_2$  把  $\mathbb{R}$  中的每一有界集映成  $\mathbb{R}$  中的有界集.

根据文 [7] 有

**引理 3.4.** 在假设  $H1)$ — $H4)$  之下, 豫解式  $(I + \lambda \mathcal{A})^{-1}$  对于  $\lambda > 0$  是  $\mathcal{H}$  到  $\mathcal{H}$  的紧映射.

一般地, 对于 Hilbert 空间  $H$  的闭子集  $C$  上的非线性强连续半群  $T(t)$ , 集合

$$\gamma(x) \triangleq \{S(t)x | t \geq 0\}, \quad x \in C,$$

叫做通过  $x$  的轨线, 而

$$\omega(x) \triangleq \{y \in C \mid \exists t_k \rightarrow \infty \text{ 使 } y = \lim_{k \rightarrow \infty} S(t_k)x\}$$

叫做  $x$  的  $\omega$ -极限集(可能是空集).

对于由  $-\mathcal{A}$  生成的非线性压缩半群  $S(t)$ , 其  $\omega$ -极限集的结构刻划了发展方程

$$\dot{u}(t) + \mathcal{A}u(t) \ni 0$$

的弱解的渐近行为.

**定理 3.5.** 设  $S(t)$  为由  $-\mathcal{A}$  在  $\mathcal{H} = V \times H$  中生成的非线性半群. 假定  $[\tilde{y}_0, \tilde{y}_1]^r \in \mathcal{H} = V \times H$ , 则通过  $[\tilde{y}_0, \tilde{y}_1]^r$  的轨线  $\gamma(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)$  在  $\mathcal{H}$  中是相对紧的, 并且相应的  $\omega$ -极限集  $\omega(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)$  非空.

证明. 根据引理 3.4,  $(I + \lambda\mathcal{A})^{-1}$  在  $\mathcal{H}$  中是紧的. 此外由假设 H3) 可知  $0 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  ( $\mathcal{A}$  的值域). 因此由文 [8] 可得  $\gamma(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)$  的紧性, 而  $\omega(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)$  的非空则是  $\gamma(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)$  相对紧性的结果.

**定理 3.6.** 设 H1)—H4) 成立. 那么对于任意  $[\tilde{y}_0, \tilde{y}_1]^r \in \mathcal{H}$ , 有如下的渐近性质:

$$\|[\tilde{y}(t), \hat{y}(t)]^r\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \quad (3.7)$$

其中  $[\tilde{y}(t), \hat{y}(t)]^r = S(t)[\tilde{y}_0, \tilde{y}_1]^r$ .

证明. 由  $\omega$ -极限集  $\omega(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)$  的定义, 为证 (3.7) 式成立, 只须证明  $\omega(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1) = \{0\}$ . 为此又只须对  $[\tilde{y}_0, \tilde{y}_1]^r \in D(\mathcal{A})$  证明  $\omega(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1) = \{0\}$ . 假定  $[\tilde{y}_0, \tilde{y}_1]^r \in D(\mathcal{A})$ , 并任取  $Z_0 \in \omega(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)$ . 记

$$Z(t) \triangleq [\tilde{z}(t), \hat{z}(t)]^r = S(t)Z_0. \quad (3.8)$$

显然  $z(t) \in \omega(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)$ . 由文 [8],  $S(t)$  在  $\omega(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)$  上是等距的, 因此

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

其中  $E(t) = \frac{1}{2} \|[\tilde{z}(t), \hat{z}(t)]^r\|_{\mathcal{H}}^2$ . 于是由 (3.6) 式得到

$$0 \in \dot{z}(l, t) \partial g_1(\dot{z}(l, t)) + \dot{z}'(l, t) \partial g_2(\dot{z}'(l, t)), \quad t \geq 0.$$

由假设 H3) 可知

$$\dot{z}(l, t) = \dot{z}'(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

再利用 (3.2) 式得到

$$\begin{cases} M\ddot{z}(l, t) - (pz'')'(l, t) = 0, \\ J\ddot{z}'(l, t) + pz''(l, t) = 0. \end{cases}$$

这样, 为了完成定理的证明只须证明, 若  $\tilde{z}(t), \hat{z}(t)$  满足

$$\begin{cases} p(x)\ddot{z}(x, t) + (pz'')''(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ z(0, t) = z'(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ M\ddot{z}(l, t) - (pz'')'(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ J\ddot{z}'(l, t) + pz''(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ \dot{z}(l, t) = 0, \quad \dot{z}'(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ [\tilde{z}(0), \hat{z}(0)]^r \in \omega(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1), \quad [\tilde{y}_0, \tilde{y}_1]^r \in D(\mathcal{A}), \end{cases} \quad (3.9)$$

则

$$[\tilde{z}(t), \dot{\tilde{z}}(t)]^r \equiv 0, \forall t \geq 0. \quad (3.10)$$

上节已经指出  $\sigma(A) = \{\lambda_n | n \geq 1\}$ . 设  $\{\tilde{\varphi}_n | n \geq 1\}$  是  $A$  的相应的规格本征元列, 它构成  $H$  的一个直交规格化基. 定义  $\mathcal{H}$  上的线性算子  $\mathcal{A}_0$ ,

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & 0 \end{bmatrix},$$

则  $-\mathcal{A}_0$  生成的  $\mathcal{H}$  上的  $C_0$  半群  $T(t)$  为

$$T(t) \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \left( \alpha_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{\beta_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t \right) \tilde{\varphi}_n \\ \left( \beta_n \cos \sqrt{\lambda_n} t - \sqrt{\lambda_n} \alpha_n \sin \sqrt{\lambda_n} t \right) \tilde{\varphi}_n \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

其中  $\alpha_n = (\tilde{\xi}, \tilde{\varphi}_n)_H$ ,  $\beta_n = (\tilde{\eta}, \tilde{\varphi}_n)_H$ . 但由 (3.9) 式有

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}(t) \\ \dot{\tilde{z}}(t) \end{bmatrix} = T(t) \begin{bmatrix} \tilde{z}_0 \\ \tilde{z}_1 \end{bmatrix}, \quad t \geq 0,$$

所以

$$\tilde{z}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{\beta_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t \right) \tilde{\varphi}'_n, \quad (3.12)$$

$$\dot{\tilde{z}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \beta_n \cos \sqrt{\lambda_n} t - \sqrt{\lambda_n} \alpha_n \sin \sqrt{\lambda_n} t \right) \tilde{\varphi}_n. \quad (3.13)$$

(3.12), (3.13) 式中的级数分别在  $V$  和  $H$  中收敛, 并且收敛相对  $t \in \mathbb{R}$  是一致的. 因此由 (3.9), (3.13) 式得

$$\dot{\tilde{z}}'(l, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \beta_n \cos \sqrt{\lambda_n} t - \alpha_n \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} t \right) \varphi'_n(l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.14)$$

这意味着  $\beta_n \varphi'_n(l)$  和  $-\alpha_n \sqrt{\lambda_n} \varphi'_n(l)$  是一致概周期函数 0 的 Fourier 系数. 因此

$$\beta_n \varphi'_n(l) = 0, \quad \alpha_n \varphi'_n(l) = 0, \quad n \geq 1.$$

但由定理 2.3,  $\varphi'_n(l) \neq 0, \forall n \geq 1$ , 故有  $\alpha_n = \beta_n = 0, \forall n \geq 1$ . 这表明  $\tilde{z}(t) = 0, \dot{\tilde{z}}(t) = 0, \forall t \geq 0$ . 证毕.

特别若  $g_1(\xi)$  和  $g_2(\xi)$  是线性函数, 则假设 H3), H4) 自然满足, 因此有

**定理 3.7.** 设 H1), H2) 成立,  $K_1, K_2$  为正常数. 那么线性边界反馈控制系统

$$\begin{cases} p(x)y(x, t) + (py'')''(x, t) = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ y(0, t) = y'(0, t) = 0, & t > 0, \\ My(l, t) - (py'')'(l, t) = -K_1 y(l, t), & t \geq 0, \\ Jy(l, t) + py''(l, t) = -K_2 y'(l, t), & t \geq 0, \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x), \end{cases} \quad (3.15)$$

是渐近稳定的, 即 (3.7) 式成立.

注. Gibson 指出<sup>[9]</sup>, 无穷维 Hilbert 空间中的一个非指数稳定的线性振子不可能通过紧线性反馈达到指数稳定. 因此在目前情况下指数稳定的结果是得不到的. 从这个意义上可以说, 本文得到的结论已不能再改进.



## 4 数值模拟结果

这里给出线性边界反馈控制系统 (3.15) 的数值仿真结果。使用振型分析逼近闭环系统,假定梁是均匀的,  $EI = 900\text{N} \cdot \text{m}^2$ ,  $M = 0.5\text{kg}$ ,  $J = 1\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $l = 3\text{m}$ ,  $\rho = 0.9\text{kg}/\text{m}$ , 增益常数  $K_1 = 4$ ,  $K_2 = 6$ , 梁在端点的初始振幅为  $m/20\pi$ 。振型的振幅随着振型数的增长而快速递减。因此在计算中仅取前三个振型。模拟结果如图 1, 图 2 所示, 结果表明理论分析的结论与仿真结果吻合。

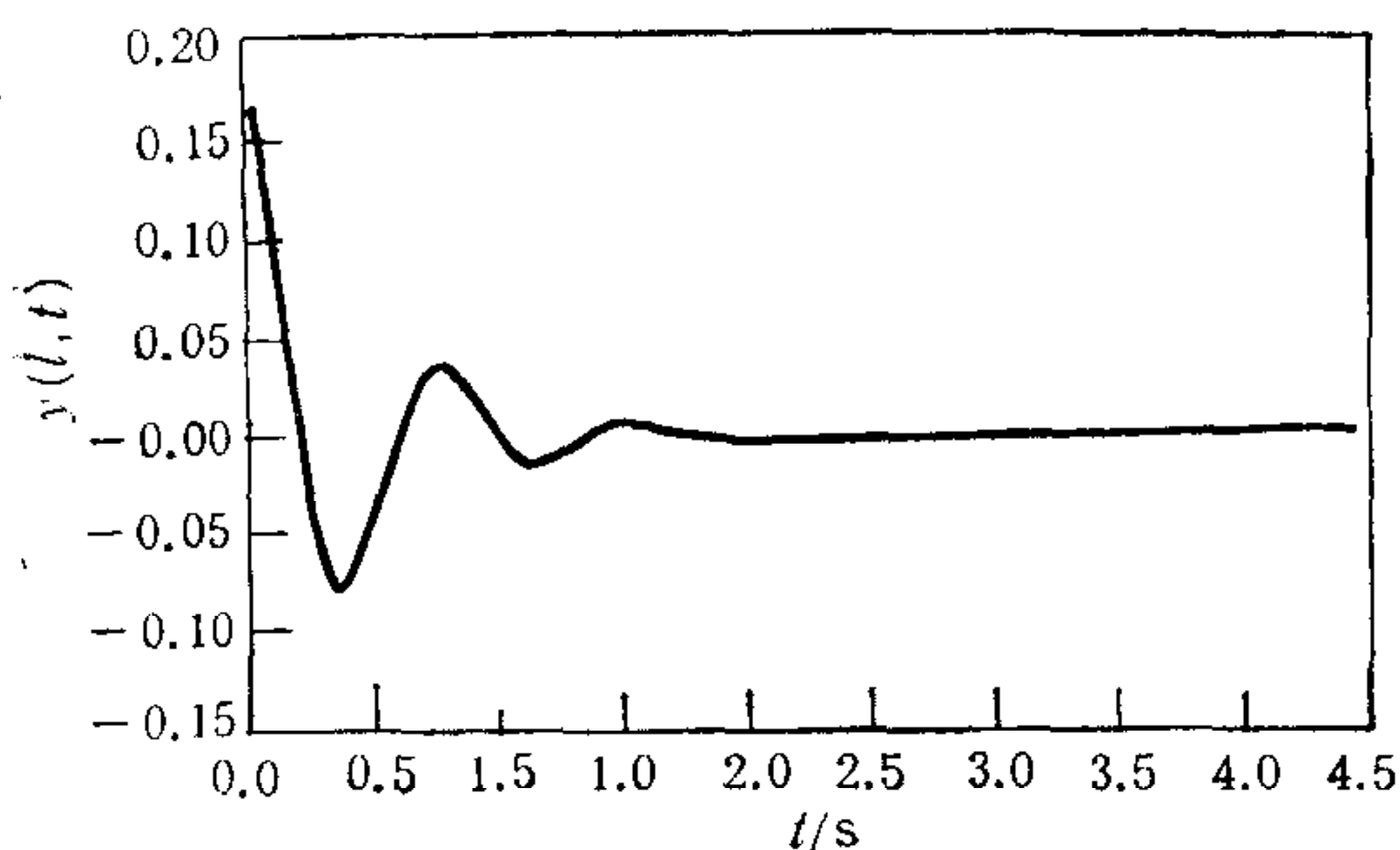


图 1 梁端点位移

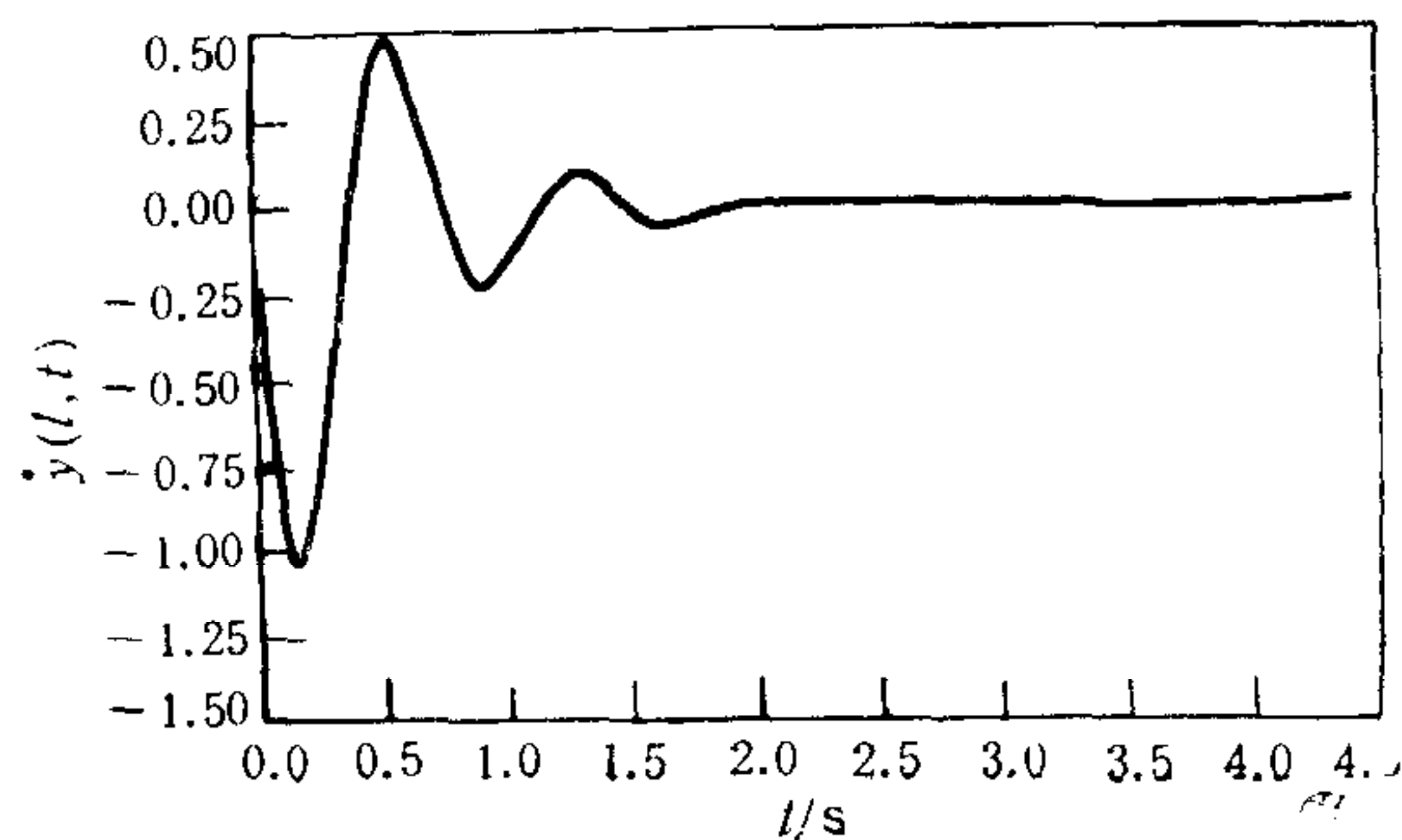


图 2 梁端点速度

## 参 考 文 献

- [1] Chassiakos A G & Bekey G A. Pointwise control of a flexible manipulator arm. Proc. of the IFAC Symposium on Robotics and Automation, Barcelona, Spain, 1985, 181—185.
- [2] Joshi S M. Control of Large Flexible Space Structures. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 1989, New York, Springer-Verlag, Vol. 131.
- [3] Chen G, Delfour M, Krall A M & Payre G. Modeling, stabilization and control of serially connected beams, *SIAM J. Control & Optimization*, 1987, 25(3): 526—546.
- [4] Conrod F & Pierre M. Stabilization of Euler-Bernoulli beam by nonlinear boundary feedback. INRIA, 1990, RR No. 1235.
- [5] Lions J L & Magenes E. Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications. Dunod, Paris. 1968, Vol. 1 et 2.
- [6] Brézis H. Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contraction dans les Espaces de Hilbert. North Holland, 1973.
- [7] Lasiecka I. Stabilization of wave and plate-like equations with nonlinear dissipation on the boundary. *Journal of Differential Equations*. 1989, 79: 340—381.
- [8] Dafermos C M & Slemrod M. Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups. *J. Funct. Anal.*, 1973, 13: 97—106.
- [9] Gibson J S. A note of stabilization of infinite dimensional linear oscillators by compact linear feedback. *SIAM J. Control & Optimization*. 1980, 18(3): 311—316.

## FEEDBACK STABILIZATION OF EULER-BERNOULLI BEAM

FENG DEXING      ZHANG WEITAO

*(Institute of Systems Science, Academia Sinica Beijing 100080)*

### ABSTRACT

This paper deals with the control problem of the bending vibration for an Euler-Bernoulli beam with massive end-point by nonlinear boundary feedback. At first, the spectral structure of the system is analyzed. Then, a nonlinear feedback control on the boundary is proposed to stabilize the transverse vibration of the beam, and the asymptotic stability is proved for the corresponding closed loop system. Finally, some simulation results are presented.

**Key words:** Euler-Bernoulli beam, spectral structure, nonlinear boundary control, feedback stabilization, asymptotic stability.

冯德兴 照片、简介见本刊第 20 卷第 5 期。

张维孜 照片、简介见本刊第 20 卷第 5 期。