
* 研究简报 *

关于结构奇异值的一个注记¹⁾

田 玉 平

(东南大学自动控制系 南京 210096)

关键词: 结构奇异值, 结构式不确定性, 鲁棒性.

1 引言

Doyle 在 1982 年提出的结构奇异值 (μ) 方法是分析和综合结构式不确定系统的有力工具^[1,2]. 基于结构奇异值分析的小 μ 定理^[2] 给出了具有多个摄动块的线性动态系统鲁棒稳定的充要条件. 而鲁棒性能定理^[2] 则进一步地将鲁棒稳定性问题和鲁棒性能问题统一成 μ 分析问题. 然而, 我们注意到, 在所有研究结构奇异值的文献中, 均要求块对角摄动矩阵中每个子摄动块是方的. 这一要求无疑大大限制了 μ 方法的应用, 因为非方摄动块在系统中是经常存在的. 此时对 Doyle 给出的结构奇异值的上界函数^[1] 必须进行修正.

2 非方摄动下的结构奇异值及其性质

为简便起见, 我们只考虑复矩阵摄动, 标量复摄动和实参数摄动对本文结论不起影响. 记复摄动块数为 f , 第 i 个摄动块 Δ_i 的重数为 k_i , $\Delta_i \in \mathbb{C}^{r_i \times l_i}$. 则我们可以定义块对角摄动矩阵 $\Delta \in \mathbb{C}^{n \times m}$:

$$\Delta = \{ \text{diag} [\underbrace{\Delta_1, \dots, \Delta_1}_{k_1 \text{ 个}}, \dots, \underbrace{\Delta_f, \dots, \Delta_f}_{k_f \text{ 个}}], \Delta_i \in \mathbb{C}^{r_i \times l_i} \}. \quad (1)$$

显然有 $m = \sum_{i=1}^f k_i l_i$, $n = \sum_{i=1}^f k_i r_i$.

定义 1. 设 $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 矩阵 M 相对不确定结构 Δ 的结构奇异值 $\mu_\Delta(M)$ 定义如下:

$$\mu_\Delta(M) = \begin{cases} (\min \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta, \det(I - M\Delta) = 0 \})^{-1}, \\ 0, \text{ 如果不存在 } \Delta \in \Delta, \text{ 使 } I - M\Delta \text{ 奇异.} \end{cases}$$

其中 $\bar{\sigma}(\cdot)$ 表示 (\cdot) 的最大奇异值.

当 $r_i = l_i$, 即 $m = n$ 时, 上述定义与 μ 的原始定义相同. μ 的大部分性质在有非方 Δ 存在时仍将保持. 为说明不同之处, 我们定义以下几个矩阵集合:

$$\mathbb{B}_\Delta := \{ \Delta \in \Delta : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1 \}, \quad (2)$$

1) 国家自然科学基金资助的课题.

本文于 1994 年 1 月 3 日收到

$$\mathbf{Q} := \{Q \in \Delta: QQ^* = I_n\}, \quad (3)$$

其中 Q^* 表示 Q 的复共轭转置.

$$\mathbf{D}_1 := \{\text{diag}[d_1 I_{r_1}, d_2 I_{r_2}, \dots, d_f I_{r_f}], d_i \in \mathbb{R}, d_i > 0\}, \quad (4)$$

$$\mathbf{D}_2 := \{\text{diag}[d_1 I_{l_1}, d_2 I_{l_2}, \dots, d_f I_{l_f}], d_i \in \mathbb{R}, d_i > 0\}. \quad (5)$$

注. \mathbf{D}_1 和 \mathbf{D}_2 中 $d_i (i=1, \dots, f)$ 取相同值.

$$\text{定理 1. } \max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QM) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D_1 \in \mathbf{D}_1} (D_1^{\frac{1}{2}} M D_2^{-\frac{1}{2}})$$

其中 $\rho(\cdot)$ 表示 (\cdot) 的谱半径.

证. 上述不等式的左边同文献 [1], 证明略. 右边的证明如下:

由 Δ 、 \mathbf{D}_1 和 \mathbf{D}_2 的定义知, $\forall \Delta \in \Delta, \forall D_1 \in \mathbf{D}_1, \forall D_2 \in \mathbf{D}_2$, 有 $D_2^{\frac{1}{2}} \Delta = \Delta D_1^{\frac{1}{2}}$. 因此

$$\begin{aligned} \det(I - M\Delta) &= \det(I - M D_2^{-\frac{1}{2}} D_1^{\frac{1}{2}} \Delta) \\ &= \det(I - M D_2^{-\frac{1}{2}} \Delta D_1^{\frac{1}{2}}) = \det(I - D_1^{\frac{1}{2}} M D_2^{-\frac{1}{2}} \Delta). \end{aligned}$$

故由定义 1 知, $\mu_{\Delta}(M) = \mu_{\Delta}(D_1^{\frac{1}{2}} M D_2^{-\frac{1}{2}})$. 再由结构奇异值的性质^[1] 知:

$$\mu_{\Delta}(D_1^{\frac{1}{2}} M D_2^{-\frac{1}{2}}) \leq \overline{\sigma}(D_1^{\frac{1}{2}} M D_2^{-\frac{1}{2}}).$$

故定理得证. 证毕.

注. 在定理 1 中我们只需对 $D_1 \in \mathbf{D}_1$ 寻优就可以了, 因为 D_1 一旦确定, D_2 也自动生成.

由于 μ 难以直接计算, 定理 1 所给的 μ 的上、下界函数成为计算 μ 的主要根据. 一般说来 $\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QM)$ 是一个非凸优化问题, 而优化过程 $\inf_{D \in \mathbf{Q}_1} \overline{\sigma}(D_1^{\frac{1}{2}} M D_2^{-\frac{1}{2}})$ 对尺度矩阵 D_1 是凸的.

定理 2. 设 $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 给定实数 $\beta > 0$, 则集合

$$\mathbf{D}_{\beta} := \{D_1 \in \mathbf{D}_1: \overline{\sigma}(D_1^{\frac{1}{2}} M D_2^{-\frac{1}{2}}) < \beta\}$$

是凸的.

证. 下面的一组等价关系是显然的:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(D_1^{\frac{1}{2}} M D_2^{-\frac{1}{2}}) &< \beta \\ \iff \lambda_{\max}(D_2^{-\frac{1}{2}} M^* D_1^{\frac{1}{2}} D_1^{\frac{1}{2}} M D_2^{-\frac{1}{2}}) &< \beta^2 \\ \iff D_2^{-\frac{1}{2}} M^* D_1^{\frac{1}{2}} D_1^{\frac{1}{2}} M D_2^{-\frac{1}{2}} - \beta^2 &< 0 \\ \iff M^* D_1 M - D_2 \beta^2 &< 0. \end{aligned}$$

显然, 最后一个不等式所定义的矩阵集合 D_{β} 是凸的. 证毕.

3 结论

本文说明了在 μ 分析中关于每个子摄动块均是方的这一要求实际上是不必要的。通过构造尺度矩阵集合 \mathcal{D}_1 和 \mathcal{D}_2 ，给出了在有非方摄动块存在时计算 μ 的上界的方法，并证明了这一计算问题对尺度矩阵 D_1 来说是凸的。

参 考 文 献

- [1] Doyle J. C. Analysis of feedback system with structured uncertainties. IEE Proc., Part D, 1982, 129 (6): 242 — 250.
- [2] Doyle J. C., Wall J. and Stein G. Performance and robustness analysis for structured uncertainty. IEEE Conf. on Decision and Control, 1982, 629 — 636.

A REMARK ON THE STRUCTURED SINGULAR VALUE

TIAN YUPING

(Department of Automatic Control, Southeast University Nanjing 210096)

Key words: Structured singular value, structured uncertainty, robustness.