

\*\*\*\*\*  
\* 研究简报 \*  
\*\*\*\*\*

# 弹性机械手臂的建模与控制

王国利

卢桂章

(汕头大学计算机系 广东 515063)

(南开大学机器人研究室 天津 300071)

**关键词:** 弹性机械手臂, 建模与控制.

## 1 引言

目前工业机器人的负载与自重比一般在 1:10 到 1:30 之间或更小, 而人类的负载与自重比通常可以达到 1:3, 本体过重是实现机械臂高速运动控制的一个障碍. 一方面, 提高负载与自重比可以满足高速低能耗的需求, 同时, 也势必会导致本体刚度的下降, 从而使机械臂成为具有弹性的结构. 机械手臂的高速运动往往会激励起弹性结构的振动, 给运动控制带来许多挑战性的困难. 基于刚性动力学的控制策略已无法用于高速高精度的运动控制, 需要基于弹性机械臂的动力学设计更为有效的控制算法, 这就是弹性臂建模与控制的研究内容. 本文中弹性臂均指连杆为分布式弹性结构的柔性臂.

本文从建模与控制的角度对已有的方法进行了总结. 在此基础上, 着重评述了弹性机械臂动力学建模中连杆细度比对动力学特性的影响和运动控制中输出变量对控制器设计的影响等新问题.

## 2 动力学建模

由于线性弹性变形与非线性刚体运动的高度耦合使弹性机械手臂的运动学及动力学描述变得极为复杂. 动力学建模的机理主要有: 1) Lagrange 方法; 2) Newton-Euler 方法; 3) Hamilton 原理. 尽管弹性机械臂的动力学系统本质上是无穷维的, 但运动控制最终是通过有限的关节驱动装置来实现的. 因此建立有效的低阶有限维近似动力学模型是必要的. 目前, 对连杆弹性变形进行空间离散化有如下的标准方法: A) 有限元方法, B) 有限模态展开方法, C) 前两者混合使用的方法. 以上建立动力学的机理方法 1)、2)、3) 同空间离散化方法 A)、B)、C) 的组合都是建立弹性机械手臂有限维近似动力学方程的有效手段. 文 [1] 对以上建模方法的优劣进行了系统的比较和研究, 在此不再赘述.

连杆结构设计的多种因素都会影响到弹性手臂的动力学建模. 限于篇幅, 以下仅考虑连杆细度比对连杆动力学特性及建模的影响. 考虑图 1 所示的平面单连杆弹性手臂, 连杆长为  $l$ , 弹性模量为  $EI$ , 剪切模量为  $Gak$ , 法蓝盘的旋转惯量为  $J_h$ , 驱动力矩为  $\tau$ , 负载质量为  $M_l$ . 假设以下连杆的材料力学特性和截面几何特性以连杆弯曲中心轴对称,

弹性变形仅限于平面内. 在惯性参考坐标系  $OXY$  中的位置向量为

$$\mathbf{R} = [x \cos(\theta(t)) - w(t, x) \sin(\theta(t)) \quad x \sin(\theta(t)) + w(t, x) \cos(\theta(t))]^T. \quad (1)$$

通常采用连杆的纯位移来描述连杆的刚性运动与弹性变形的复合结果, 即

$$v(t, x) = \int_0^t (\dot{R}_x^2 + \dot{R}_y^2)^{\frac{1}{2}} ds = \int_0^t ((x\dot{\theta} + \dot{w})^2 + \dot{\theta}^2 w^2)^{\frac{1}{2}} ds. \quad (2)$$

忽略弹性变形与刚性运动的高阶非线性耦合项  $\dot{\theta}w$ , 得到

$$v(t, x) \approx x\theta(t) + w(t, x). \quad (3)$$

如图 2 所示, 若在动力学的建模中将剪切弹性和旋转惯性对弹性变形的影响考虑在内, 还需定义另一运动学变量

$$\zeta(t, x) = \theta(t) + \zeta(t, x), \quad (4)$$

其中  $\zeta(t, x)$  为仅由弯矩引起的变形角度. 根据 Timoshenko 梁理论, 可得到:

$$\rho \ddot{v} + (GAk)(D\zeta - D^2v) = 0, \quad \rho r \ddot{\zeta} + (GAk)(\zeta - Dv) - EID^2\zeta = 0, \quad (5a)$$

$$J_h \ddot{\theta} - EID\zeta(0) = \tau. \quad (5b)$$

边界条件为

$$v(t, 0) = 0, \quad \zeta(t, 0) = \theta(t), \quad (5c)$$

$$M_t \ddot{v}(t, l) = (GAk)(\zeta(t, l) - Dv(t, l)), \quad M_t r \ddot{\zeta}(t, l) = -EID\zeta(t, l). \quad (5d)$$

其中  $\sqrt{r}$  为连杆截面的回转半径.

考虑以一均匀梁作为连杆的原型, 其连杆细度定义为  $\delta = l/r$ . 如图 2 所示, 随着  $\delta$  的增大, 剪切弹性和旋转惯性对弹性变形的影响变得越来越小, 以至可以忽略不计. 利用 Bernoulli-Euler 梁理论, 得到如下的运动方程

$$\rho \ddot{v} + D^2(EID^2v) = 0, \quad J_h \ddot{\theta} + \int_0^l \rho x \ddot{v} dx = \tau \quad (6a)$$

边界条件为:

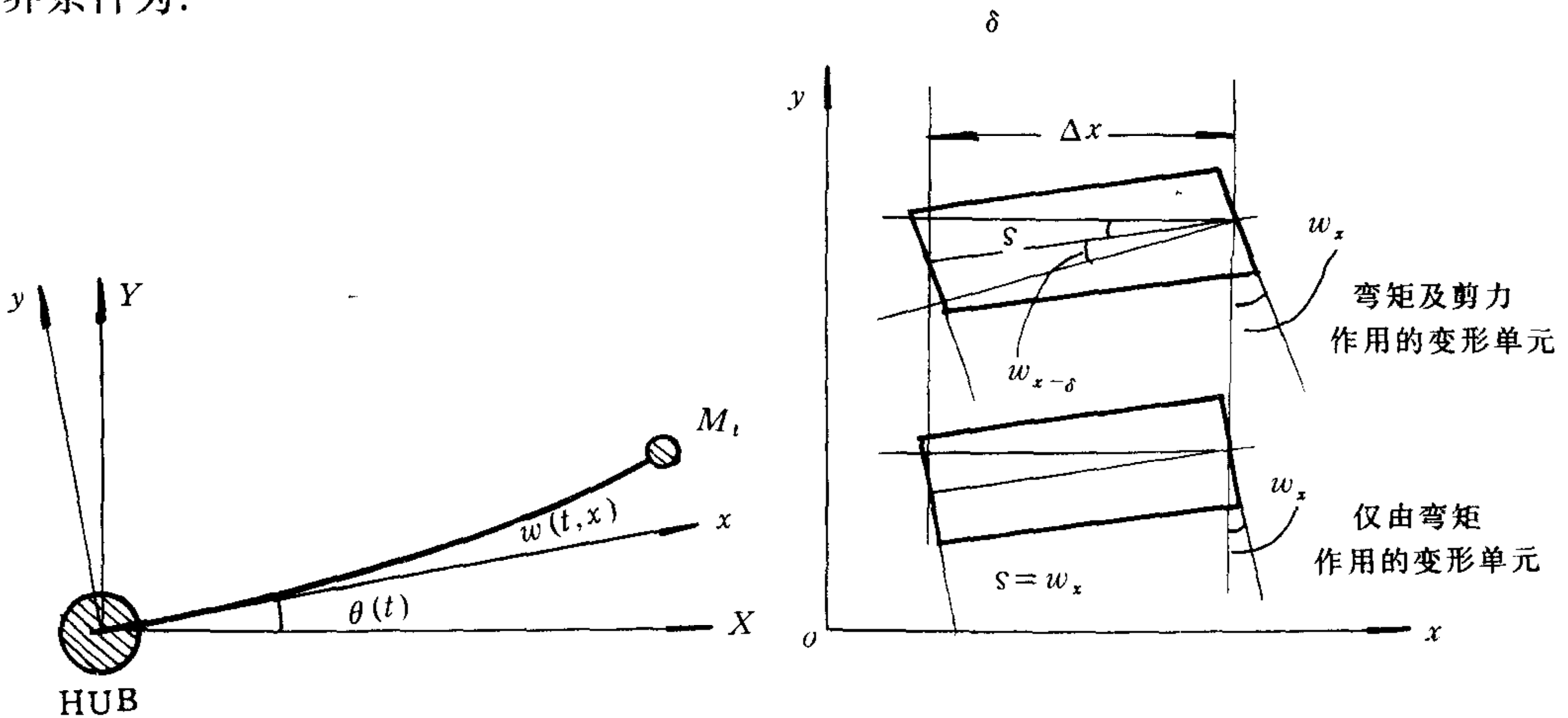


图1 平面单连杆弹性手臂

图2 弹性结构变形单元

$$v(t, 0) = 0, Dv(t, 0) = \theta(t), \quad (6b)$$

$$M_t \ddot{v}(t, l) = D(EID^2v(t, l)), EID^2v(t, l) = 0. \quad (6c)$$

不妨将方程(5a—d)称为非细长连杆的动力学模型, (6a—c)为细长连杆的动力学模型. 前者利用两个变量耦合的偏微分方程来描述弹性结构的变形, 较后者在形式上要复杂得多. 事实上, 无论采用哪一种空间离散化方法, 非细长连杆的动力学的计算量都大大高于细长连杆动力学的计算量. 因此, 在保证系统动力学特性描述精度有效的前提下, 应尽可能采用细长连杆的动力学模型. 为了合理的选择动力学模型, 有必要分析和研究剪切弹性和旋转惯性对弹性臂动力学特性, 包括连杆振动频率和模态函数等的影响. 理论分析和实验结果表明<sup>[2-5]</sup>, 当  $\delta$  大于 40 时, 剪切弹性和旋转惯性对弹性变形的影响可以忽略不计; 当  $\delta$  小于 20 时, 可以忽略弹性结构变形, 将连杆视刚体处理; 当介于二者之间时, 在连杆的动力学建模中应包含剪切弹性和旋转惯性对弹性变形的影响. 对非细长连杆动力学模型的谱分析结果表明, 由于剪切力和旋转惯性的相互作用导致了一个新谱的出现, 与细长连杆动力学模型相比连杆振动频率和模态函数的渐近特性有本质的不同. 与剪切弹性相比, 旋转惯性对弹性手臂动力学特性的影响要小得多. 对于简单实截面的连杆, 二者之间有着固定的比例关系, 但对框型截面的连杆, 将不在保持这种固定的比例关系.

### 3 运动控制

传感器/执行器的定位方式决定弹性机械手臂的运动控制方式. 常用的控制方式主要有: 1) 关节并置控制方式, 2) 末端非并置控制方式, 3) 末端并置控制方式. 无论采用何种方式, 连杆的刚性运动和弹性变形的控制最终都是由驱动力矩同时完成的. 根据对弹性变形采取的抑制方法, 控制器的设计可分成两类: A) 反馈镇定类, B) 前馈输入整形类. 通过比较研究, 作者论文<sup>1)</sup>系统地论述了以上几种控制方式及控制器设计方法的特点和适用范围, 在此不再详述.

传感器/控制器的定位及传感信息的选择都影响到运动控制的实现. 限于篇幅, 以下仅考虑在末端非并置控制方式下, 将连杆末端纯位移  $y_{ip}(t) = v(t, l)$  作为输出变量时, 非细长弹性连杆控制模型的适用性. 设  $H = L^2(0, l) \times L^2(0, l) \times R^3$ , 内积为

$$\langle u, v \rangle_H = \int_0^l \rho u_1 v_1 dx + \int_0^l \rho r u_2 v_2 + M_t u_3 v_3 + M_t r u_4 v_4 + J_h u_5 v_5.$$

可将方程(5a—d)写成 Hilbert 空间  $H$  上的抽象发展方程形式

$$\ddot{u}(t) + Au(t) = \Omega\tau(t), \quad t > 0, \quad (7)$$

其中  $u(t) = [v(t, x) \quad \zeta(t, x) \quad v(t, l) \quad \zeta(t, l) \quad \theta(t)]^T$ ,  $\Omega = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ J_h^{-1}]^T$ , 且  $A$  为弹性算子, 定义为

$$Au = \begin{bmatrix} \frac{GAk}{\rho} (Du_2 - D^2u_1) & \frac{GAk}{\rho r} (u_2 - Du_1) & -\frac{EI}{\rho r} D^2u_2 \end{bmatrix}$$

1) 王国利. 弹性手臂的建模与控制: 结构/控制综合设计方法, 南开大学博士学位论文, 1992.

$$\left. - \frac{GAk}{M_l} (u_4 - Du_3) - \frac{EI}{M_l r} Du_4 - \frac{EI}{J_h} Du_2(0) \right]^T. \quad (8)$$

定义域为  $D(A) = \left\{ u \in H \mid \begin{array}{l} Du_1 \in H^1(0, l), Du_2 \in H^2(0, l), u_1(0) = 0, \\ u_2(0) = u_5, u_1(l) = u_3, u_2(l) = u_4 \end{array} \right\}$ , 其中  $H^m(0, l)$ , ( $m=0, 2$ ) 为  $(0, l)$  上的  $m$  阶 Sobolev 空间. 可以验证  $A$  为  $H$  上的具有纯点谱的闭算子. 设  $A$  的本征值为  $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ , 规范正交本征向量为  $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ , 其中  $\Phi_n(x) = [\varphi_n(x) \quad \varphi_n \quad \chi_n \quad \psi_n]^T$ .  $u(t)$  按模态展成  $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \Phi_n$ , 对于每个  $n \geq 0$ ,  $u_n$  为如下方程的解

$$\ddot{u}_n + \lambda_n u_n = \psi_n \tau. \quad (9)$$

应用 Laplace 变换, 即可得到  $N$  模态有限维近似系统从  $\tau$  到  $y_{tip}$  的传递函数

$$G^N(s) = \sum_{n=0}^N \frac{\varphi_n(l) \psi_n}{s^2 + \lambda_n} \quad (10)$$

$G^N(s)$  的相对阶数 (Relative Degree) 定义为

$$\alpha = \min_i \{i \in I = [0, 1, 2, \dots] \mid \lim_{|s| \rightarrow \infty} s^i G^N(s) \neq 0\} \quad (11)$$

不难验证  $G^N(s)$  的逆系统具有形式  $H^N(s) = (s^\alpha G^N(s))^{-1}$ . 经过简单地计算得到

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} s^i G^N(s) = \begin{cases} 0 & i=0, 1, \\ (q^N)^{-1} & i=2. \end{cases} \quad (12)$$

其中  $q^N$  为  $H^N(s)$  的增益值, 且进一步可以证明  $q^N = \left( \sum_{n=0}^N \varphi_n(l) \psi_n \right)^{-1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$ . 综合上述结果知道,  $N$  模态有限维近似系统的相对阶数  $\alpha=2$  是病态的, 逆系统的增益随  $N$  值的递增而趋向于无穷. 文 [6] 的研究结果表明, 基于以  $y_{tip}$  作为输出变量的控制模型, 利用  $H_2$ -最优控制器产生的驱动力矩幅值将随模型精度的提高而增加, 进而超出驱动电机的工作极限. 文 [7] 的研究结果表明,  $G^N(s)$  相对阶数的病态将导致弹性臂系统的物理不可逆, 即由轨迹规划给定的末端物理量无法得到轨迹跟踪所需的稳定驱动力矩. 这里出现控制模型不适用的根源在于输出变量的选取, 因而直接的处理方法就是重新设计输出变量. 文 [6] 中定义末端纯位移相对旋转坐标轴  $ox$  镜像的近似形式  $y_{ref}(t) = l\theta(t) - w(t, l)$  作为输出变量, 保证了新控制模型相对阶数的适定性. 不难证明, 基于新控制模型设计的控制器使得  $y_{ref}(t) \rightarrow y^d$ ,  $w(t, l) \rightarrow 0$ , 这一控制目标等价于  $y_{tip}(t) \rightarrow y^d$ ,  $w(t, l) \rightarrow 0$ . 文 [7] 引入参量化的伪末端纯位移作为输出变量, 在保证控制模型具有合理增益的约束下, 优化设计输出变量. 研究结果表明新控制模型可以有效克服原控制模型引起的逆动力学不适定性.

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Desoyer K, et al. Flexible Robot-Survey, Proc. of IFAC Symp. on Control, Vienna, 1986, 23 — 34.
- [ 2 ] Bayo E, Timoshenko Versus Bemoulli-Euler Beam Theories for The Inverse Dynamics of Flexible Robots. Int. J. of Robotics and Automation, 1989, 4(1): 53 — 56.
- [ 3 ] Wang F and Guan G. Influences of Rotatory Inertia, Shear and Loading on Vibrations of Flexible Manipulators, J. of Sound and Vibration, 1994, 171(4): 433 — 452.
- [ 4 ] Wang G and Lu G. Modelling and Control of Non-Slender Flexible Robot Link. Int. J. System Sci., 1992, 23(10): 1571 — 1601.
- [ 5 ] Wang G et al. Slenderness of Flexible Robot Links: Dynamic Model Selection. Proc. of IFAC Symp. on Robot Control, Vienna, 1991, 411 — 416.
- [ 6 ] Wang D and Vidyasagar M. Transfer Function for a Single Flexible Link. Int. J. of Robotics Research, 1991, 10(5): 540 — 549.
- [ 7 ] Wang G and Lu G. Well-posedness of Inverse Dynamics of Flexible Arms. Int. J. of Robotics and Automation, 1995, In press.

## MODELING AND CONTROL OF FLEXIBLE ROBOT ARMS

WANG GUOLI

*(Dept. of Computer Science, Shantou University, Guangdong 515063)*

LU GUIZHANG

*(Robotics Resaerch Lab., Nankai University, Tianjin 300071)*

**Key words:** flexible robot arm, modeling and control