第22卷 第1期 自动化学报 Vol. 22, No.1
1996年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1996

研究简报

Riccati代数方程中矩阵 P 与 R, Q 关系的研究[1)]

王庆林

(北京理工大学自控系 北京 100081)

关键词: Riccati方程, 稳定性, 李亚普诺夫方法, 最优控制, 鲁棒控制.

本文对Riccati代数方程中矩阵 P 与 R, Q 的关系进行了研究. 给出了当矩阵 R、Q 变化时方程解 P 的变化范围. 这对最优控制、鲁棒控制、容错控制及 H^∞ 控制等有着重要的意义.

1 预备知识

定义1.1. 对于给定的矩阵 $A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$, $R=R^{\mathrm{T}}>0\in R^{m\times m}$, $Q=Q^{\mathrm{T}}\geqslant 0\in R^{n\times n}$, 下式称为Riccati代数方程,

$$A^{\mathrm{T}}P+PA-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+Q=0, \tag{1}$$

式中 P 称为Riccati代数方程 (1) 的解.

引理1.1.[1] 若Riccati代数方程 (1) 有正定解 P, 则 P 唯一.

引理1.2.[2] 在方程 (1) 中, 若 $Q=M^{\mathrm{T}}M$, (A, B) 可控, (M, A) 可观测, 则方程有唯一正定解 $P>0$, 且有

$$\mathrm{Re}\lambda(A-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P)<0. \tag{2}$$

引理1.3.[3] 对李亚普诺夫方程

$$A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q, \tag{3}$$

其中 $A\in R^{n\times n}$. 若 $P=P^{\mathrm{T}}>0$, $Q=Q^{\mathrm{T}}\geqslant 0$, 则

$$\mathrm{Re}\lambda(A)\leqslant 0. \tag{4}$$

又若 $Q>0$, 则

$$\mathrm{Re}\lambda(A)<0. \tag{5}$$

引理1.4.[3] 对方程 (3), 若 $\mathrm{Re}\lambda(A)\leqslant 0$, $Q=Q^{\mathrm{T}}\geqslant 0$, 则存在半正定解 $P\geqslant 0$.

引理1.5. 设 $P>0$ 为Riccati代数方程 (1) 的解, 则对任意 $k\geqslant 0.5$, 有

$$\mathrm{Re}\lambda(A-kBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P)\leqslant 0. \tag{6a}$$

又若 $Q>0$, 则

$$\mathrm{Re}\lambda(A-kBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P)<0. \tag{6b}$$

---

1) 国家自然科学基金与博士点基金资助.

本文于1994年4月28日收到

证明. 在式(1)的两端加入 $(2kPBR^{-1}B^{T}P-2kPBR^{-1}B^{T}P)=0$，得

$$A^{T}P+PA+(2kPBR^{-1}B^{T}P-2kPBR^{-1}BP)-PBR^{-1}B^{T}P+Q=0 \tag{7}$$

整理后有

$$(A-kBR^{-1}B^{T}P)^{T}P+P(A-kBR^{-1}B^{T}P)+(2k-1)PBR^{-1}B^{T}P+Q=0 \tag{8}$$

令

$$\tilde{Q}=(2k-1)PBR^{-1}B^{T}P+Q \tag{9}$$

代入式(8)有

$$(A-kBR^{-1}B^{T}P)^{T}P+P(A-kBR^{-1}B^{T}P)+\tilde{Q}=0 \tag{10}$$

因为当 $k\geqslant 1/2$ 时，$(2k-1)PBR^{-1}B^{T}P\geqslant 0$，因而若 $Q\geqslant 0$，则 $\tilde{Q}\geqslant 0$；$Q>0$，则 $\tilde{Q}>0$. 又因为 $P>0$，由引理1.3可知

若 $Q\geqslant 0$，则 $\mathrm{Re}\lambda(A-kBR^{-1}B^{T}P)\leqslant 0$；若 $Q>0$，则 $\mathrm{Re}\lambda(A-kBR^{-1}B^{T}P)<0$. 证毕.

2 主要结论

定理2.1. 对 Riccati 代数方程(1)，设 R 不变. $P_2>0$，$P_1>0$ 分别为对应于 $Q_2\geqslant 0$，$Q_1\geqslant 0$ 的解. 若 $Q_2\geqslant Q_1$，则 $P_2\geqslant P_1$.

证明. 因为 R 不变，$P_2>0$，$P_1>0$ 分别为对应于 $Q_2\geqslant 0$，$Q_1\geqslant 0$ 的解，因此有

$$A^{T}P_1+P_1A-P_1BR^{-1}B^{T}P_1+Q_1=0, \tag{11}$$

$$A^{T}P_2+P_2A-P_2BR^{-1}B^{T}P_2+Q_2=0. \tag{12}$$

两式相减可得

$$A^{T}(P_2-P_1)+(P_2-P_1)A-P_2BR^{-1}B^{T}P_2+P_1BR^{-1}B^{T}P_1+Q_2-Q_1=0. \tag{13}$$

在式(13)的两端加入

$$-P_2BR^{-1}B^{T}P_2+P_2BR^{-1}B^{T}P_1+P_1BR^{-1}B^{T}P_2,$$

整理后有

$$\begin{aligned}&(A-BR^{-1}B^{T}P_2)^{T}(P_2-P_1)+(P_2-P_1)(A-BR^{-1}B^{T}P_2)\\&=-(P_2-P_1)BR^{-1}B^{T}(P_2-P_1)-(Q_2-Q_1).\end{aligned} \tag{14}$$

令

$$\tilde{Q}=(P_2-P_1)BR^{-1}B^{T}(P_2-P_1)+(Q_2-Q_1), \tag{15}$$

代入式(14)有

$$(A-BR^{-1}B^{T}P_2)^{T}(P_2-P_1)+(P_2-P_1)(A-BR^{-1}B^{T}P_2)=-\tilde{Q}. \tag{16}$$

因为 P_2 为 Riccati 方程(1)对应于 Q_2 的正定解，因此由引理1，引理2有

$$\mathrm{Re}\lambda(A-BR^{-1}B^{T}P_2)\leqslant 0,$$

又因为 $Q_2-Q_1\geqslant 0$，$(P_2-P_1)BR^{-1}B^{T}(P_2-P_1)\geqslant 0$，

因而 $\tilde{Q}\geqslant 0$.

由引理4可得 $P_2-P_1\geqslant 0$.

证毕.

定理2.2. 对 Riccati 代数方程(1)，设 Q 不变，$P_2>0$，$P_1>0$ 分别为对应于 $R_2>0$，

$R_1>0$ 的解，则若 $R_2\geqslant R_1$，则 $P_2\geqslant P_1$.

证明. 因为 Q 不变，$P_2>0$，$P_1>0$ 分别为对应于 $R_2>0$，$R_1>0$ 的解，因此有

$$A^{\mathrm{T}}P_1+P_1A-P_1BR_1^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1+Q=0, \tag{17}$$

$$A^{\mathrm{T}}P_2+P_2A-P_2BR_2^{-1}B^{\mathrm{T}}P_2+Q=0, \tag{18}$$

变化式 (18) 为

$$A^{\mathrm{T}}P_2+P_2A-P_2B[R_1^{-1}-(R_1^{-1}-R_2^{-1})]B^{\mathrm{T}}P_2+Q=0. \tag{19}$$

整理后有

$$A^{T}P_2+P_2A-P_2BR_1^{-1}B^{\mathrm{T}}P_2+P_2B(R_1^{-1}-R_2^{-1})B^{\mathrm{T}}P_2+Q=0. \tag{20}$$

令

$$\tilde{Q}=P_2B(R_1^{-1}-R_2^{-1})B^{\mathrm{T}}P_2+Q, \tag{21}$$

代入式 (20) 有

$$A^{\mathrm{T}}P_2+P_2A-P_2BR_1^{-1}B^{\mathrm{T}}P_2+\tilde{Q}=0. \tag{22}$$

考虑式 (21),

因为 $R_2>R_1$，所以 $R_1^{-1}>R_2^{-1}$，$P_2B(R_1^{-1}-R_2^{-1})B^{\mathrm{T}}P_2\geqslant 0$. 因此 $\tilde{Q}\geqslant Q$.

由定理 2.1 可知　$P_2\geqslant P_1$.

证毕.

定理 2.3. 对 Riccati 代数方程 (1)，设 $P_2>0$，$P_1>0$ 分别为对应于 $R_2=(1+\beta)R_1>0$，$Q_2=(1+\beta)Q_1\geqslant 0$，$\beta>-1$ 及 R_1，Q_1 的解，则有

$$P_2=(1+\beta)P_1 \tag{23}$$

证明. 因为 P_2，P_1 分别为对应于 (R_2, Q_2)，(R_1, Q_1) 的解，因此有

$$A^{\mathrm{T}}P_1+P_1A-P_1BR_1^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1+Q_1=0, \tag{24}$$

$$A^{\mathrm{T}}P_2+P_2A-P_2BR_2^{-1}B^{\mathrm{T}}P_2+Q_2=0, \tag{25}$$

式 (24) 两端乘以 $(1+\beta)$，整理后得

$$\begin{aligned}&A^{\mathrm{T}}[(1+\beta)P_1]+[(1+\beta)P_1]A\\&-[(1+\beta)P_1]B[(1+\beta)^{-1}R_1^{-1}]B^{\mathrm{T}}[(1+\beta)P_1]+(1+\beta)Q_1=0.\end{aligned} \tag{26}$$

考虑 $R_2^{-1}=(1+\beta)^{-1}R_1^{-1}$，$Q_2=(1+\beta)Q_1$，有

$$A^{\mathrm{T}}[(1+\beta)P_1]+[(1+\beta)P_1]A-[(1+\beta)P_1]BR_2^{-1}B^{\mathrm{T}}[(1+\beta)P_1]+Q_2=0. \tag{27}$$

即 $(1+\beta)P_1$ 亦为 Riccati 代数方程对应于 (R_2, Q_2) 的解.

因为 $(1+\beta)P_1>0$，由引理 1 可知 $(1+\beta)P_1$ 为 Riccati 代数方程对应于 (R_2, Q_2) 的唯一解，因而必有 $P_2=(1+\beta)P_1$.

证毕.

定理 2.4. 对 Riccati 代数方程 (1)，设 R 不变. $P>0$，$P_1>0$ 分别为对应于 $Q\geqslant 0$，$Q_1\geqslant 0$ 的解. 若 $(1+\beta)Q_1\geqslant Q\geqslant Q_1\geqslant 0$，$(\beta\geqslant 0)$，则有

$$(1+\beta)P_1\geqslant P\geqslant P_1$$

证明. 设 $P_2>0$，$P_1>0$ 分别为对应于 $R_2=(1+\beta)R_1$，$Q_2=(1+\beta)Q_1$，及 R_1，Q_1 的解，由定理2.3 有 $P_2=(1+\beta)P_1$.

因 $Q_2 \geqslant Q \geqslant Q_1$，考虑下列 Riccati 方程

$$A^{T}P_1 + P_1A - P_1BR_1^{-1}B^{T}P_1 + Q_1 = 0 \tag{28}$$

及

$$A^{T}P + PA - PBR_1^{-1}B^{T}P + Q = 0, \tag{29}$$

两式相比 R 相同，而 $Q \geqslant Q_1$，因而由定理 2.1 可知

$$P \geqslant P_1; \tag{30}$$

再考虑下列 Riccati 方程

$$A^{T}P + PA - PBR_1^{-1}B^{T}P + Q = 0 \tag{31}$$

及

$$A^{T}P_2 + P_2A - P_2BR_2^{-1}B^{T}P_2 + Q_2 = 0, \tag{32}$$

两式相比 $R_2 > R_1$，$Q_2 \geqslant Q$，因而由定理 2.1，定理 2.2 可知

$$P_2 = (1+\beta)P_1 \geqslant P. \tag{33}$$

综上所述，即得

$$(1+\beta)P_1 \geqslant P \geqslant P_1. \tag{34}$$

证毕.

定理 2.5. 对 Riccati 代数方程（1），设 Q 不变. $P>0$，$P_1>0$ 分别为对应于 $R \geqslant 0$，$R_1 \geqslant 0$ 的解. 若 $(1+\beta)R_1 \geqslant R \geqslant R_1 \geqslant 0$，$(\beta \geqslant 0)$，则有

$$(1+\beta)P_1 \geqslant P \geqslant P_1.$$

证明. 证法同定理 2.4 略.

定理 2.6. 对 Riccati 代数方程（1），设 $P>0$，$P_1>0$ 分别为对应于 R，Q 及 R_1，Q_1 的解. 若

$$R_2 = (1+\beta)R_1 \geqslant R \geqslant R_1, \quad Q_2 = (1+\beta)Q_1 \geqslant Q \geqslant Q_1,$$

则有

$$P_2 = (1+\beta)P_1 \geqslant P \geqslant P_1.$$

证明. 证法同定理 2.4. 略.

参 考 文 献

[1] 韩京清，何关钰，许可康. 线性系统理论代数基础. 北京：辽宁科学出版社，1987.

[2] 〔日〕须田信英等著. 自动控制中的矩阵理论. 北京：科学出版社，1979.

[3] 黄 琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京：科学出版社，1984.

THE STUDY OF THE RELATION BETWEEN MATRICES *P* AND *Q*, *R* IN RICCATI EQUATION

WANG QINGLIN

(*Dept. of Automatic Control, Beijing Institute of Technology Beijing* 100081)

Key words: Riccati equation, Stability, Lyapunov's method, optimal control, robust control.