第22卷 第1期 自动化学报 Vol. 22, No.1
1996 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1996

短文

误差方差及圆形区域极点约束下状态估计问题的研究：连续时间情形[1)]

王子栋　郭　治

（南京理工大学自动控制系　南京　210094）

摘　　要

提出并讨论了线性连续随机系统在稳态估计误差方差及圆形区域极点约束下的状态估计问题，即希望设计滤波增益，使得每个状态分量的估计误差方差稳态值不大于各自预先给定值，同时滤波矩阵的极点位于给定圆形区域内，从而使滤波过程具有良好的稳、暂态特性．文中利用一修正的代数 Riccati 方程，给出了期望滤波增益的存在条件及解析表达式．数值例子说明了文中设计方法的直接性和有效性．

关键词：线性连续随机系统，约束方差估计，区域极点配置．

1　引言

在工程应用（如机动目标跟踪、多源航迹识别）中，状态估计的指标要求常常以状态分量估计误差方差的上限形式给出．对这类理论及应用均有价值的状态估计问题，传统的状态估计方法往往很难应用，因为它们不能保证各状态分量的估计误差方差的稳态约束均得到满足．为此，文献[1]提出了基于误差协方差配置的状态估计理论，但遗憾的是，文献[1]只考虑了系统的稳态特性，而在实际应用中暂态特性也同样重要，如若误差协方差达到稳态的过渡过程品质较差，将会严重影响状态估计的实际效果．因此，本文将研究稳态估计误差方差及区域极点约束下的状态估计问题．

2　问题的描述

考虑如下线性时不变连续随机系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+v(t), \tag{1a}$$

$$y(t)=Cx(t)+w(t). \tag{1b}$$

其中状态 $x\in R^n$，确定性输入 $u\in R^m$，测量输出 $y\in R^p$，$v(t)$ 和 $w(t)$ 是强度分别为

1）国家自然科学基金及高校博士学科点专项科研基金资助课题．

本文于 1993 年 10 月 18 日收到

$V>0$ 和 $W>0$ 的不相关高斯白噪声过程, 初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 有均值 $\overline{\boldsymbol{x}}(0)$ 和协方差 $p(0)$, 且与 $\boldsymbol{v}(t)$ 及 $\boldsymbol{w}(t)$ 不相关.

状态估计向量 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 及估计误差稳态协方差 p 分别满足

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=A\hat{\boldsymbol{x}}(t)+B\boldsymbol{u}(t)+K(\boldsymbol{y}(t)-C\hat{\boldsymbol{x}}(t)), \tag{2}$$

$$P=\lim_{t\to\infty}P(t)=\lim_{t\to\infty}E\{[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t)][\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t)]^{\mathrm{T}}\}. \tag{3}$$

由 (2)(3) 可得

$$\dot{P}(t)=(A-KC)P(t)+P(t)(A-KC)^{\mathrm{T}}+KWK^{\mathrm{T}}+V. \tag{4}$$

若滤波矩阵 $A_0\triangleq A-KC$ 稳定 (其极点均有负实部), 则在稳态时, (4) 式成为

$$A_0P+PA_0^{\mathrm{T}}+KWK^{\mathrm{T}}+V=0. \tag{5}$$

考虑左半复平面上圆心位于 $-q+jo$ 点 $(q>0)$、半径为 r $(r<q)$ 的圆形区域 $\Omega(q,r)$, 并假定 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$ 为第 i 个状态分量估计误差的稳态方差约束, 其值应不小于由传统的最小方差估计得到的最小方差. 则本文的目的在于设计滤波增益 K, 使得 1) 稳态误差协方差 P 满足关系式 $[P]_{ii}\leqslant\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$, 其中 $[\cdot]_{ii}$ 表示第 i 个对角元素; 2) $A_0=A-KC$ 的极点均位于给定圆形区域 $\Omega(q,r)$ 内, 即 $\sigma(A_0)\subset\Omega(q,r)$.

3　主要结果及证明

定理 1. 若如下矩阵方程

$$A_0YA_0^T+(q^2-r^2)Y+q(KWK^{\mathrm{T}}+V)+q(A_0Y+YA_0^{\mathrm{T}})=0 \tag{6}$$

有对称正定解 $Y>0$, 则 1) $\sigma(A_0)\subset\Omega(q,r)$, 2) 稳态协方差 P 存在且满足 $P<Y$.

证明. 1) 只需对文献[2] 中引理 1 的证明稍加修正即可. 2) 因 A_0 稳定, 从而 P 存在. 将 (6) 式改写为 (7) 式, 然后减去 (5) 式, 分别有

$$A_0Y+YA_0^{\mathrm{T}}+KWK^{\mathrm{T}}+V+q^{-1}[A_0YA_0^{\mathrm{T}}+(q^2-r^2)Y]=0, \tag{7}$$

$$A_0(Y-P)+(Y-P)A_0^{\mathrm{T}}+q^{-1}[A_0YA_0^{\mathrm{T}}+(q^2-r^2)Y]=0. \tag{8}$$

显然, $Q\triangleq q^{-1}[A_0YA_0^{\mathrm{T}}+(q^2-r^2)Y]>0$. 又因 A_0 稳定, 则 (8) 式等价于 $Y-P=\int_0^{+\infty}\exp(A_0t)Q\exp(A_0^{\mathrm{T}}t)dt>0$, 即 $P<Y$.

说明. 给定正定阵 Y 满足 $[Y]_{ii}\leqslant\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$, 若存在滤波增益 K 使得 (6) 式成立, 则据定理 1 有 $[P]_{ii}<[Y]_{ii}\leqslant\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $\sigma(A_0)\subset\Omega(q,r)$, 从而设计任务得以完成. 我们将满足上述条件的正定阵 Y 称为 Ω 可配置的, 则下面的任务将是研究正定阵 Y 为 Ω 可配置的充要条件以及相应的滤波增益 K 的集合的解析表达式.

定理 2. 给定圆形区域 $\Omega(q,r)$ 及满足关系式 $[Y]_{ii}\leqslant\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$ 的正定阵 Y. 则 Y 是 Ω 可配置的, 当且仅当

$$(A+qI)(YC^{\mathrm{T}}R^{-1}CY-Y)(A+qI)^{\mathrm{T}}+r^2Y-qV\geqslant 0, \tag{9}$$

且不等式(9)左端部分的最大秩为p, $R\triangleq CYC^{\mathrm{T}}+qW$.

证明: 注意到(6)式经适当的变形, 可写成

$$[-KR^{\frac{1}{2}}+(A+qI)YC^{\mathrm{T}}R^{-\frac{1}{2}}][-KR^{-\frac{1}{2}}+(A+qI)YC^{\mathrm{T}}R^{-\frac{1}{2}}]^{\mathrm{T}}$$
$$=(A+qI)(YC^{\mathrm{T}}R^{-1}CY-Y)(A+qI)^{\mathrm{T}}+r^2Y-qV. \tag{10}$$

因(10)式左端非负定, 从而应有(9)成立. 又因式 $-KR^{\frac{1}{2}}+(A+qI)YC^{\mathrm{T}}R^{-\frac{1}{2}}$ 的维数为$n\times p$且$p\leqslant n$, 为使(10)式两端的维数相容, 则(10)式右端的秩不应大于p. 此时, 方存在K使(10)成立. 证毕.

定理3. 若定理2的条件满足, 则配置正定阵Y的滤波增益K的集合可表示为

$$\mathscr{K}=\{K: K=(A+qI)YC^{\mathrm{T}}R^{-1}-TUR^{-\frac{1}{2}},\ U\in R^{p\times p}\text{为正交阵}\} \tag{11}$$

其中$T\in R^{n\times p}$为$S\triangleq(A+qI)(YC^{\mathrm{T}}R^{-1}CY-Y)(A+qI)^{\mathrm{T}}+r^2Y-qV$的平方根因子, $R\triangleq CYC^{\mathrm{T}}+qW$.

证明. 注意到(10)可表示为

$[-KR^{\frac{1}{2}}+(A+qI)YC^{\mathrm{T}}R^{-\frac{1}{2}}][-KR^{\frac{1}{2}}+(A+qI)YC^{\mathrm{T}}R^{-\frac{1}{2}}]^{\mathrm{T}}=TT^{\mathrm{T}}$ 或 $-KR^{\frac{1}{2}}+(A+qI)YC^{\mathrm{T}}R^{-\frac{1}{2}}=TU$, 则(11)直接可得.

下面是本文的主要结果.

定理4. 考虑线性连续系统(1), 给定各状态分量估计误差的稳态方差约束$\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$以及滤波矩阵的圆形区域极点约束$\Omega(q,r)$. 若有正定阵$Y$满足定理2的条件, 则期望的滤波增益可由(11)式决定.

说明. 易见定理2的条件不难验证且滤波增益K易于计算. 解的相容性问题及解法的收敛性问题将是进一步研究的课题. 在工程应用中, 可通过局部搜索法求解满足定理2条件的Y的集合, 并据此得到滤波增益K的集合.

4 数值例子

在系统(1)中取

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix}0&0\\0&0.06\end{bmatrix},\quad W=\begin{bmatrix}0.1&0\\0&0.1\end{bmatrix}$$

给定状态分量的估计误差稳态方差约束为: $\sigma_1^2=0.3114$, $\sigma_2^2=0.3537$, 给定滤波矩阵的圆形区域极点约束为$\Omega(2,1.9)$. 由定理2的条件, 我们选取Ω可配置的Y矩阵及相应的R、T分别为

$$Y=\begin{bmatrix}0.30012&0\\0&0.30024\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}0.50012&0\\0&0.50024\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}0.99146&0\\-0.3966&0.015\end{bmatrix}$$

将R、T、Y及$U=I_2$代入(11)式可得滤波增益$K=\begin{bmatrix}0.499&0.6\\0.2804&1.1893\end{bmatrix}$, 经验证滤波矩阵的极点分别为$-1.325$和$-0.3632$, 稳态误差方差值为$[P]_{11}=0.28291$和$[P]_{22}=0.29034$, 均满足要求. 因篇

幅限制，略去仿真曲线.

参 考 文 献

[1] Yaz E, Skelton R. E. Continuous and discrete state estimation with error covariance assignment. Proc. of 30th IEEE CDC, 1991, 3091 — 3092.

[2] Furuta K, Kim S B. Pole assignment in a specified disk. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1987, 32(5): 423 — 427.

A STUDY OF ERROR VARIANCE AND CIRCULAR POLE-CONSTRAINED STATE ESTIMATION FOR CONTINUOUS SYSTEMS

WANG ZIDONG　GUO ZHI

(*Dept. of Automat. Contr., Nanjing University of Science and Technology* 210094)

ABSTRACT

The problem of state estimation with the steady-state estimation error variance constraints and the circular pole constraints is proposed and studied in this paper. The purpose of this problem is to design the filter gain such that the steady-state value of estimation error variance for each state is less than or equal to the prespecified value, and the poles of the filter matrix lie within the prespecified circular region, simultaneously. Therefore the filtering process will possess good behavior. It is shown that the solution of the addressed problem can be determined by a modified Riccati equation. The conditions for the existence and the explicit expression of the desired filter gains are given. Finally, a numerical example is provided to demonstrate the directness and simplicity of the present design method.

Key words: Linear continuous-time stochastic systems, constrained variance estimation, regional pole placement..