第22卷 第1期 自 动 化 学 报 Vol. 22, No.1
1996年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1996

短文

基于最小二乘算法的最优适应控制器[1)]

罗 贵 明

(清华大学应用数学系 北京 100084)

摘 要

采用"输入匹配"的方法，建立了"一步超前"最小二乘算法，得到参数估计的收敛速度. 证明了闭环适应系统是全局稳定的，且适应控制收敛于"一步超前"最优控制.

关键词: 最小二乘法，收敛速度，最优适应控制，全局稳定.

1 引言

近年来，最优适应控制有很多研究(如[1 — 5]). 这些工作大都建立在系统是逆稳定的基础上，而且在适应控制器中含有由 Riccati 方程确定的量.

为扩充控制系统的应用范畴，并考虑控制代价，通过对"一步超前"适应控制器的分析，[6] 和 [7] 中提出"输入匹配"方法，将系统的信号跟踪问题转化为对系统输入的研究. 其优点在最优适应控制的运算中没有 Riccati 方程，且还能降低系统 minimum phase 的要求.

利用随机梯度算法，[7] 中建立了关于"输入匹配"全局收敛的"一步超前"最优适应控制器. 然而实际应用中的适应控制器一般采用最小二乘方法构成. 这是因为最小二乘算法在系统的辨识中优于随机梯度算法. 但由于最小二乘算法本身的特点也给理论研究带来很大难度[8,9]，因而在以前的一些研究中不得不附加一些很强的激励条件或采用修正的最小二乘算法.

本文将建立随机系统"一步超前"最优适应控制的最小二乘算法，估计出由该算法辨识系统参数的收敛速率. 对稳定系统、minimum phase 系统、以及一些非稳定和 nonminimum phase 系统，不外加任何激励条件，也不需 Riccati 方程，本文证明了适应系统关于"输入匹配"的收敛性和全局稳定. 从而解决了随机系统基于最小二乘算法的"一步超前"最优适应控制问题.

2 适应控制器与参数估计

考虑随机系统

$$A(z)y_n = zB(z)u_n + w_n \tag{2.1}$$

1) 本项目得到清华大学重点学科基金的资助

本文于1992年12月4日收到

其中 y_n、u_n 和 w_n 分别为系统的输出、输入和噪声干扰. $A(z)$和 $B(z)$均为单位后移算子 z 的多项式

$$A(z)=1+a_1z+\cdots+a_pz^p,\ B(z)=\beta+b_1z+\cdots+b_qz^q$$

其中 p、q 的上界和 $\beta\neq 0$ 已知.

设$\{y_n^*\}$为有界参考信号，且 y_n^* 是 $\mathscr{F}_{n-1}-$ 可测. 考虑性能指标.

$$J=E\{(y_{n+1}-y_{n+1}^*)^2\mid\mathscr{F}_n\}+\lambda u_n^2,\ \lambda\geqslant 0 \tag{2.2}$$

当且仅当控制 u_n 满足

$$y_{n+1}-w_{n+1}-y_{n+1}^*+\frac{\lambda}{\beta}u_n=0 \tag{2.3}$$

时[10],[11]，性能指标(2.2)达到最优. 记

$$\theta^\tau=(-a_1\cdots-a_p\ b_1\cdots b_q),\ \varphi_n=(y_n\cdots y_{n-p+1}u_{n-1}\cdots u_{n-q})^\tau,$$

则系统(2.1)可表示为

$$y_{n+1}=\theta^\tau\varphi_n+\beta u_n+w_{n+1}. \tag{2.4}$$

因而当控制取

$$u_n^*=(\beta^2+\lambda)^{-1}\beta(y_{n+1}^*-\theta^\tau\varphi_n) \tag{2.5}$$

时，由(2.3)式知性能指标(2.2)达到最小. 所以 u_n^* 为“一步超前”最优控制. 设 θ_n 为 θ 的“一步超前”最小二乘估计，其构造如下:

$$\begin{cases}\theta_{n+1}=\theta_n+\alpha_nP_n\varphi_n[y_{n+1}-(\beta^2+\lambda)^{-1}(\beta^2y_{n+1}^*+\lambda\theta_n^\tau\varphi_n)], & (2.6)\\ P_{n+1}=P_n-\alpha_nP_n\varphi_n\varphi_n^\tau P_n,\ P_0>0 & (2.7)\\ \alpha_n=(1+\varphi_n^\tau P_n\varphi_n)^{-1}. & (2.8)\end{cases}$$

定义“一步超前”适应控制 u_n 为

$$u_n=\beta(\beta^2+\lambda)^{-1}(y_{n+1}^*-\theta_n^\tau\varphi_n). \tag{2.9}$$

对系统(2.1)作下面假定:

(A1). $\{w_n,\ \mathscr{F}_n\}$是鞅差序列，且满足

$$\sup_{n\geqslant 0}E\{w_{n+1}^r\mid\mathscr{F}_n\}<\infty,\ \text{a.s.}\ r>2, \tag{2.10}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n w_i^2=R>0. \tag{2.11}$$

(A2). $\beta B(z)+\lambda A(z)\neq 0,\ \forall\ z:\ |z|\leqslant 1.$

注1 由条件(A1)和 Borel-Cantelli 引理不难证明

$$w_{n+1}^2=O(n^{\varepsilon_0}),\ \text{a.s.}\ \forall\ \varepsilon_0\in\left(\frac{2}{r},\ 1\right). \tag{2.12}$$

注 2 在假定中并未要求系统是minimum phase. 如果系统是开环稳定或 minimum phase，可用根迹法证明[10],[12] 存在 $\lambda\geqslant 0$，使 $\beta B(z)+\lambda A(z)$稳定，并且对一些非稳定的 nonminimum phase 系统这一结论也成立.

令

$$e_{n+1}=y_{n+1}-(\beta^2+\lambda)^{-1}(\beta^2y_{n+1}^*+\lambda\theta_n^\tau\varphi_n),$$
$$z_n=e_{n+1}-w_{n+1},\ \tilde{\theta}_n=\theta-\theta_n.$$

显然 z_n 关于 $\mathscr{F}_n-$ 可测. 从(2.6)—(2.8)式推得

$$\widetilde{\theta}_{n+1}=\widetilde{\theta}_n-\alpha_n P_n\varphi_n e_{n+1}, \tag{2.13}$$

$$P_{n+1}^{-1}=P_n^{-1}+\varphi_n\varphi_n^{\tau},\quad P_0^{-1}>0. \tag{2.14}$$

设 $\lambda_{\min}^n$ 为矩阵 P_{n+1}^{-1} 的最小特征值, $r_n=\mathrm{tr}P_{n+1}^{-1}$. 由条件(A1)不难证明

$$n=O(r_n)\ \text{a.s.} \tag{2.15}$$

定理 1. 设系统(2.1)满足条件(A1)和(A2), 系统的参数 θ 由算法(2.6)—(2.8)式辨识. 则有

1)
$$\|\theta_{N+1}-\theta\|^2=O\left(\frac{\log r_N}{\lambda_{\min}^N}\right),\ \text{a.s.} \tag{2.16}$$

2)
$$\sum_{n=0}^{N}\alpha_n(\varphi_n^{\tau}\widetilde{\theta}_n)^2=O(\log r_N).\ \text{a.s.} \tag{2.17}$$

证明 根据鞅差性质[5], 对 $\forall\,\delta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 有

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\varphi_n^{\tau}\widetilde{\theta}_{n+1}w_{n+1}\right|=\left|\sum_{n=0}^{N}\varphi_n^{\tau}[\widetilde{\theta}_n-\alpha_n P_n\varphi_n(z_n+w_{n+1})]w_{n+1}\right|$$

$$\leqslant O\left(\left(\sum_{n=0}^{N}|\varphi_n^{\tau}\widetilde{\theta}_{n+1}|^2\right)^{\delta}\right)+O\left(\sum_{n=0}^{N}\alpha_n\varphi_n^{\tau}P_n\varphi_n w_{n+1}^2\right).\ \text{a.s.}$$

类似[13]中引理3的证明得到

$$\sum_{n=0}^{N}\alpha_n\varphi_n^{\tau}P_n\varphi_n w_{n+1}^2=O(\log r_N)\ \text{a.s.} \tag{2.18}$$

因此对 $\delta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 有

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\varphi_n^{\tau}\widetilde{\theta}_{n+1}w_{n+1}\right|=O\left(\left(\sum_{n=0}^{n}|\varphi_n^{\tau}\widetilde{\theta}_{n+1}|^2\right)^{\delta}\right)+O(\log r_N).\ \text{a.s.} \tag{2.19}$$

利用(2.9)式推得

$$\beta^2 y_{n+1}^*+\lambda\varphi_n^{\tau}\theta_n=(\beta^2+\lambda)(\beta u_n+\varphi_n^{\tau}\theta_n). \tag{2.20}$$

由(2.6)—(2.8)式和(2.20)式

$$\alpha_n e_{n+1}=y_{n+1}-\beta u_n-\varphi_n^{\tau}\theta_n-\alpha_n\varphi_n^{\tau}P_n\varphi_n e_{n+1}=\widetilde{\theta}_{n+1}^{\tau}\varphi_n+w_{n+1}.$$

利用(2.13)式、(2.14)式和上式、(2.19)式得到

$$\mathrm{tr}\widetilde{\theta}_{N+1}^{\tau}P_{N+1}^{-1}\widetilde{\theta}_{N+1}\leqslant\mathrm{tr}\widetilde{\theta}_0^{\tau}P_0^{-1}\widetilde{\theta}_0-\sum_{n=1}^{N}(\varphi_n^{\tau}\widetilde{\theta}_{n+1})^2-2\sum_{n=0}^{N}\varphi_n^{\tau}\widetilde{\theta}_{n+1}w_{n+1}$$

$$=O(\log r_N)+O\left(\left(\sum_{n=0}^{N}|\varphi_n^{\tau}\widetilde{\theta}_{n+1}|^2\right)^{\delta}\right)-\sum_{n=1}^{N}(\varphi_n^{\tau}\widetilde{\theta}_{n+1})^2=O(\log r_N).\ \text{a.s.}$$

由此推得(2.16)式. 下面证明结论 ii). 利用(2.4)式和(2.20)式推得

$$e_{n+1}=\varphi_n^{\tau}\widetilde{\theta}_n+w_{n+1},\quad z_n=\varphi_n^{\tau}\widetilde{\theta}_n \tag{2.21}$$

由(2.13)式和(2.14)式、(2.18)式有

$$\mathrm{tr}\tilde{\theta}_{N+1}^{\tau}P_{N+1}^{-1}\tilde{\theta}_{N+1}=O(1)-\sum_{n=0}^{N}\alpha_n|\varphi_n^{\tau}\tilde{\theta}_n|^2+\sum_{n=0}^{N}\alpha_n\varphi_n^{\tau}(P_n\varphi_n w_{n+1}^2-2\tilde{\theta}_n w_{n+1})$$

$$=-\sum_{n=0}^{N}\alpha_n|\varphi_n^{\tau}\tilde{\theta}_n|^2+O\left(\left(\sum_{n=0}^{N}\alpha_n|\varphi_n^{\tau}\tilde{\theta}_n|^2\right)^{\delta}\right)+O(\log r_N),\ \ \delta\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\alpha_n|\varphi_n^{\tau}\tilde{\theta}_n|^2+O(\log r_N)\quad \text{a.s.}$$

即(2.17)式成立. 证完

3 全局稳定与收敛性

引理. 设系统(2.1)满足条件(A1)和(A2). 则

$$\sum_{n=0}^{N}z_n^2=O(r_N^{\mu})\ \text{a.s.}\ \forall\ \ \mu\in\left(\frac{2}{r},\ 1\right) \tag{3.1}$$

证明 由(2.4)式和(2.9)式推得

$$A(z)z_n=[B(z)+\beta^{-1}\lambda A(z)]u_n-A(z)y_{n+1}^{*}-[A(z)-1]w_{n+1}$$

$$B(z)z_n=[B(z)+\beta^{-1}\lambda A(z)]y_{n+1}-B(z)y_{n+1}^{*}-[B(z)+\beta^{-1}\lambda]w_{n+1}$$

利用条件(A2), 由上式、(2.12)和(2.15)式不难证明存在 $s\in(0.1)$, 使得

$$u_n^2=O\left(\sum_{i=0}^{n}s^{n-i}z_i^2\right)+O\left(\sum_{i=0}^{n}s^{n-i}w_i^2\right)+O(1)\ \text{a.s.} \tag{3.2}$$

$$y_n^2=O\left(\sum_{i=0}^{n-1}s^{n-i}z_i^2\right)+O\left(\sum_{i=0}^{n}s^{n-i}w_i^2\right)+O(1)\ \text{a.s.} \tag{3.3}$$

$$\|\varphi_n\|^2=O\left(\sum_{i=0}^{n-1}s^{n-i}z_i^2\right)+O(r_n^{\varepsilon_0})\ \text{a.s.}\ \forall\ \ \varepsilon_0\in\left(\frac{2}{r},\ 1\right) \tag{3.4}$$

记

$$T_n=\sum_{i=0}^{n}s^{n-i}z_i^2,\ \ \delta_n=\mathrm{tr}(P_n-P_{n+1})$$

由定理1和(2.21)式知存在常数 $m>0$, 对 $\forall\ \varepsilon_0\in\left(\frac{2}{r},\ 1\right)$. 有

$$z_n^2\leqslant m\alpha_n\delta_n z_n^2T_{n-1}+mr_n^{\varepsilon_0}\ \ \text{a.s.}$$

类似[14]中(4.29)式的推导, 对 $\forall\ \varepsilon>0$, $\forall\ \varepsilon_0\in\left(\frac{2}{r},\ 1\right)$

$$T_n\leqslant s^nT_0r_n^{\varepsilon_0}+mr_n^{\varepsilon_0+\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}s^{n-j}=O(r_n^{\varepsilon_0+\varepsilon})\ \text{a.s.} \tag{3.5}$$

将上式代入(3.4)式, 得到

$$\|\varphi_n\|^2=O(r_n^{\varepsilon_0})\quad \text{a.s.}\quad \forall\quad \varepsilon_0\in\left(\frac{2}{r},\ 1\right) \tag{3.6}$$

利用定理1和(3.6)式

$$\sum_{n=0}^{N} z_n^2=\sum_{n=0}^{N}\alpha_n z_n^2(1+\varphi_n^\tau P_n\varphi_n)$$

$$=O(r_N^{\varepsilon_0})\sum_{n=0}^{N}\alpha_n z_n^2=O(r_N^{\varepsilon_0}\log r_N)\quad \text{a.s.}$$

因 $\varepsilon_0\in\left(\frac{2}{r},\ 1\right)$ 是任意的，故(3.1)式成立．证完

定理2． 设系统(2.1)满足条件(A1')和(A2)．则对适应控制(2.6)—(2.9)，我们有

1)．
$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}(y_n^2+u_n^2)<\infty\quad \text{a.s.}\tag{3.7}$$

2)．
$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}(u_n-u_n^*)=0\quad \text{a.s.}\tag{3.8}$$

其中 u_n^* 由(2.5)式定义，是系统(2.1)的"一步超前"最优控制．

证明　利用(3.1)式和(3.4)式

$$r_N=O\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=0}^{n-1}s^{n-i}z_i^2\right)+O\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=0}^{n}s^{n-i}w_i^2\right)+O(N)$$

$$=O(r_N^{\mu})+O(N)\quad \text{a.s.}\quad \forall\ \ \mu\in\left(\frac{2}{r},\ 1\right)$$

则
$$r_N=O(N)\quad \text{a.s}\tag{3.9}$$

从而得到

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}(y_n^2+u_n^2)\leqslant\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}(O(N))<\infty\quad \text{a.s.}$$

即(3.7)式成立．由(2.5)式和(2.9)式

$$(u_n-u_n^*)^2=\beta^2(\beta^2+\lambda)^{-2}(\theta^\tau\varphi_n-\theta_n^\tau\varphi_n)^2=O(z_n^2)$$

利用(3.9)式和引理

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}(u_n-u_n^*)=O\left(\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}z_n^2\right)$$

$$=O\left(\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}r_N^{\mu}\right)=0\quad \text{a.s.}$$

证完

定理2说明适应系统(2.1)是闭环稳定的，且控制收敛于系统的"一步超前"最优控制．

参　考　文　献

[1] Kumar P R. Optimal adaptive control of linear quadratic Gaussian systems. *SIAM J. Contr. and Optimiz.*, 1983, **21**: 163 — 178.

[2] Hijab O B. The adaptive LQG problem-Part I. *IEEE Trans.*, 1983, **AC−28**: 171 — 178.

[3] Caines P E and Chen H F. Optimal adaptive LQG control for systems with finite state process

parameters. *IEEE Trans.*, 1985, **AC-30**: 185— 189.

[4] Chen H F and Guo L. Optimal stochastic adaptive control with quadratic index. *Int. J. Control*, 1986, **43**: 869— 881.

[5] Chen H F and Guo L. Asymptotically optimal adaptive control with consistent parameter estimates. *SIAM J. Contr. and Optimiz.*, 1987, **25**: 558— 575.

[6] Johnson C R, JR. and Tse E. Adaptive implementation of one-step-ahead optimal control via input matching. *IEEE Trans.*, 1978, **AC-23**: 856— 872.

[7] Goodwin G C, Johnson C R, JR., and Sin K S. Global convergence for adaptive one-step-ahead optimal controllers based on input matching. *IEEE Trans*, 1981, **AC-26**: 1269— 1273.

[8] Kumar P R and Moore J B. Convergence of adaptive minimum variance algorithm via weighting coefficient selection. *Dept. Elec. Eng., Univ. Newcastle, Newcastle, N. S. W., Australia, Tech. Rep.* 7917, Aug. 1979.

[9] Sin K S, Goodwin G C, and Bitmead R R. An adaptive d-step ahead predictor based on least squares. *IEEE Trans.*, 1980, **AC-25**: 1161— 1165.

[10] Johnson C R JR. On single optimal control. *in proc.* 1978 *IEEE southeastcon*, Apr. 1978, 511— 514.

[11] Goodwin G C and Sin K S. Adaptive filtering:: Prediction and control. Prentice-Hall, 1984.

[12] Clarke D W and Gawthrop J P. Self-tuning Controller. *Proc. Inst. Elec. Eng.*, 1975, **122**: 929— 934.

[13] Chen H F and Guo L. Convergence rate of least-squares identification and adaptive control for stochastic systems. *Int. J. Control*, 1986, **44**: 1459— 1476.

[14] Guo L and Chen H F. The Åström-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS-based adaptive trackers. *IEEE Trans.*, 1991, **AC-36**: 802— 812.

OPTIMAL ADAPTIVE CONTROLLERS BASED ON LEAST SQUARES ALGORITHMS

LUO GUIMING

(*Dept. of Applied Math., Tsinghua University Beijing* 100084)

ABSTRACT

Optimal adaptive controllers based on input matching for the stochastic systems are studied by using least squares algorithms in this paper. The one-step-ahead least squares method is established and the convergence rate of the parameter estimation is obtained. Without any excited condition it is shown that the closed-loop system is globally stable and adaptive control converges to the one-step-ahead optimal control.

Key words: Least squares method, convergence rate, optimal adaptive control, globally stable.