

# 基于约束的装配体位置描述及求解<sup>1)</sup>

葛建新 李海龙 董金祥 何志均

(浙江大学 CAD & CG 国家重点实验室 杭州 310027)

## 摘 要

装配体设计是计算机辅助设计 (CAD) 的一个重要组成部分, 本文就装配体设计中装配体位置的描述及自动求解这两个关键问题进行了深入的探讨, 提出了基于约束的装配体相互位置关系的描述方法及自动求解算法. 同时本文首次引入奇异矩阵的方法, 较好地解决了装配体位置的约束冗余、约束不足以及病态矩阵的问题.

**关键词:** 装配体设计, 几何约束求解, 计算机辅助设计.

## 1 引言

机械装配体是由一系列离散的子部件按某个位置关系组合而成的具有特定功能的机械部件. 有关装配体设计方面的研究很多, 包括装配体的装配次序的自动规划, 装配体运行特性的自动分析和合成, 以及装配体的公差分析与合成等. 本文仅对装配体内部各子部件之间位置关系描述及自动求解这两个主要问题进行讨论.

通常装配体的表示是一个树状层次结构, 其中树状结构的根节点表示用户最终需要的装配体, 非叶节点表示子装配体, 它是由零件或者子装配体构成, 零件在这个树状结构中是用最底层的叶结点表示的. 装配体内部子部件之间的位置关系可通过目前几何造型系统中支持的平移、旋转等几何变换命令来实现. 用户输入相应的参数, 系统根据这些参数计算出变换矩阵, 完成所需的位置更新. 但是由于在三维情况下复杂空间位置关系很难通过平移、旋转等几何操作进行定义, 手工输入繁琐并且位置不精确. 同时装配体内部子部件之间的关系在完成几何变换后丢失, 使得当装配体内某个子部件的位置或形状发生变化时, 系统无法对相应的影响作自动调整.

对于这个问题, 国外学者早有注意并作了一些研究工作<sup>[1-5]</sup>. 他们的主要研究成果是将装置体之间位置关系通过非几何的装配关系进行描述, 例如孔与轴的插入关系, 面与面的接触关系, 然后根据这些装配关系自动计算子部件相对于整个装配体的几何变换矩阵.

我们的主要工作是对上述工作的改进, 包括以下两部分: 1) 建立一个基于约束的完整的与实际设计方式一致的装配体位置关系描述框架; 2) 使用矩阵奇异分解技术使位

1) 国家自然科学基金资助课题.

本文于 1994 年 1 月 11 日收到

置求解算法更加可靠, 实现更加方便.

## 2 基于约束的装配体位置描述方法

考察实际的装配体设计过程, 我们总结出以下常见的装配体位置约束关系, 这些约束主要是从几何方面考虑的, 因而约束中受约束的对象都是部件的几何拓扑元素. 这些位置约束从工程设计角度可分为以下四类<sup>[6]</sup>:

1) 面耦合 (mate) 及等距面耦合 (mate offset): 面耦合要求要装配部件的两个表面相互接触 (图 1). 面的等距耦合要求两个表面反向平行且相距某个距离.

2) 对齐 (align) 及等距对齐 (align offset): 对齐是指两个对象之间的重合关系 (如图 1), 有不同语义: 面的对齐是指两个表面重合且方向一致; 边的对齐是指两条边重合在同一直线上; 顶点的对齐是指两个顶点重合; 面边对齐是指边与面重合; 面点对齐是指顶点在面上; 点边对齐是指顶点在边上. 等距对齐是指两个面同向平行, 其间的距离由用户给出 (如图 1).

3) 插入 (insert): 描述孔与轴的配合关系 (如图 2).

4) 定向 (orient): 要求两个平面同向平行, 但距离不用给出. (如图 2).

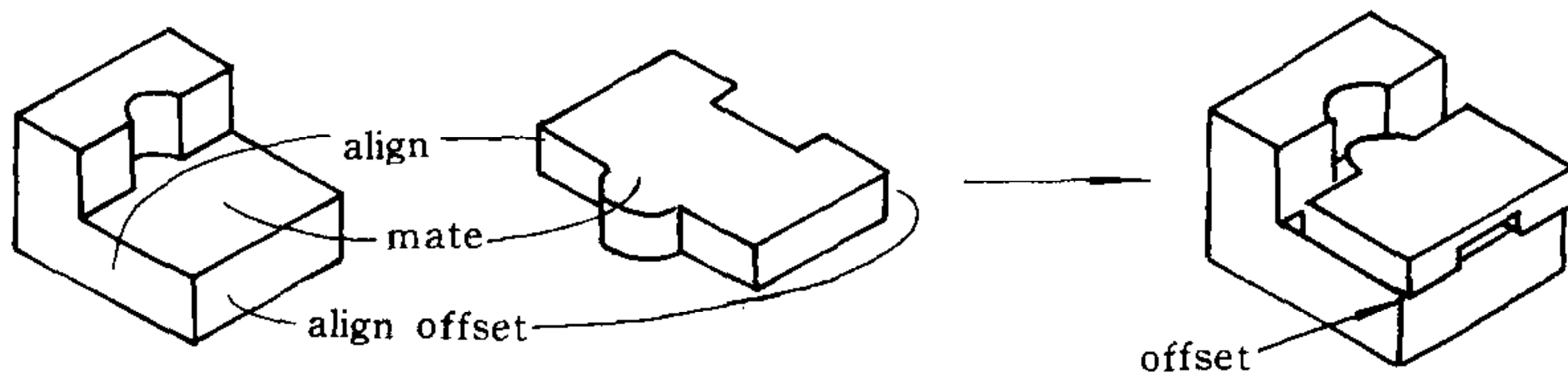


图 1 耦合和对齐约束

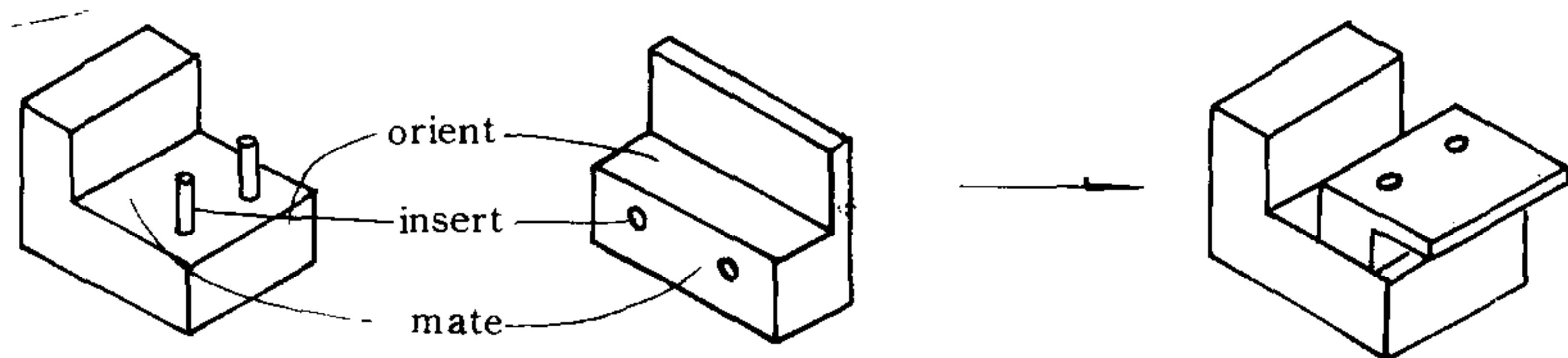


图 2 插入和定向约束

以上基于约束的装配体位置关系描述方法是面向工程设计习惯的, 本质上它们可归结到点、线、面两两相互关系. 对于面 (暂不考虑曲面) 它是由点及法向量构成, 因而所有的位置关系都归结到点线相互之间两两位置关系.

## 3 单步装配模型约束的方程化

在以下的讨论中我们为了讨论方便, 假定装配体位置描述及求解均按单步装配模型进行, 即用户每次仅装配两个部件, 其中一个为基部件, 其几何位置固定, 另一个为引用部位, 其几何位置可以变化. 装配体几何约束的求解问题就是根据用户给定的装配

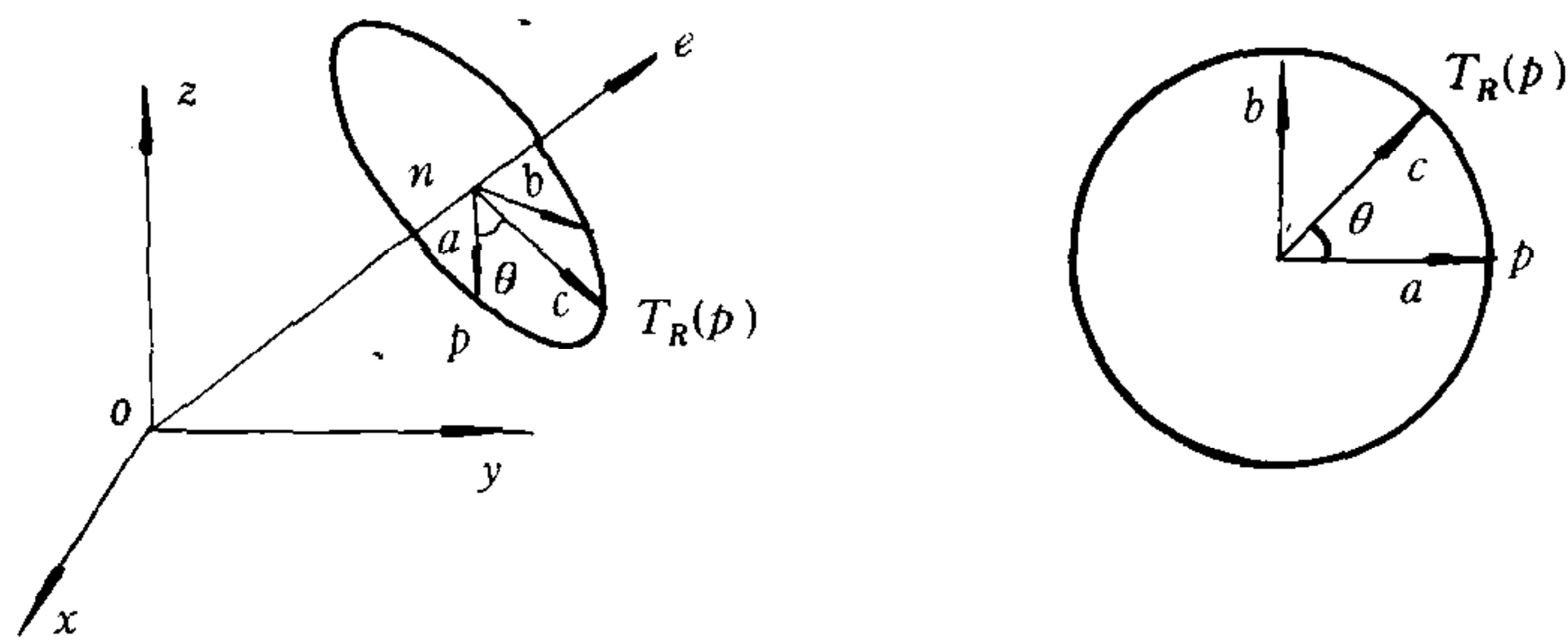


图3 旋转变换

约束计算出引用部件关于基部件的几何变换矩阵, 使引用部件经该矩阵的变换后满足装配位置约束.

几何变换可分解为平移变换和旋转变换. 平移变换可用空间一点  $P_0$  表示, 而旋转变换则可由空间一单位向量以及一个旋转角来规定 (如图3).

对于平移变换  $T_S$  有

$$T_S(p) = p + p_0.$$

对于旋转变换  $T_R$  有

$$\begin{aligned} T_R(p) &= n + c = n + \cos\theta \cdot a + \sin\theta \cdot b \\ &= (1 - \cos\theta) \cdot (p \cdot e) \cdot e + \cos\theta \cdot p + \sin\theta \cdot (e \times p). \end{aligned}$$

其中  $e = (e_x, e_y, e_z)$  为一单位向量,  $\theta$  为旋转角. 因而总的变换为

$$\begin{aligned} T(p) &= T_S \cdot T_R(p) \\ &= p_0 + (1 - \cos\theta) \cdot (p \cdot e) \cdot e + \cos\theta \cdot p + \sin\theta \cdot (e \times p). \end{aligned}$$

而对于空间一个方向  $n$ , 假定其起点为  $p_1$ , 而终点为  $p_2$ , 则变换后的方向为

$$T(p_2) - T(p_1) = (p_0 + T_R(p_2)) - (p_0 + T_R(p_1)) = T_R(p_2 - p_1) = T_R n.$$

由于  $e$  为单位向量, 有  $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$ , 所以实际上这个变换由以下6个参数 ( $x_0, y_0, z_0, e_x, e_y, \theta$ ) 决定.

下面讨论约束的方程化问题. 事实上, 上一节中的所有装配约束都可归约为以下三个基本几何问题:

- 1) 两个方向的关系: 一个方向与另一个方向平行或垂直;
- 2) 点到平面的距离: 一个点到平面的距离由设计人员给定;
- 3) 点到直线的距离: 一个点到直线的距离由设计人员给定.

例如对于面耦合约束, 可以导出平面法向量平行以及点到面距离为零的两个几何关系. 而面与线对齐则可归结为平面法向量与直线方向垂直以及直线上点到平面距离为零这两个基本的几何关系.

基本的形体关系可通过方程表示, 下面给出具体的对应方程:

- 1) 两个方向的关系

设  $d_1$  和  $d_2$  为两个已单位化的方向, 则当要求为平行关系时有

$$\mathbf{d}_1 = \pm T_R(\mathbf{d}_2) \quad \text{或} \quad T_R(\mathbf{d}_1) = \pm \mathbf{d}_2,$$

其中当方向相同时, 上式取正号, 否则取负号.

若不考虑方向性, 则可取

$$\mathbf{d}_1 \times T_R(\mathbf{d}_2) = 0 \quad \text{或} \quad T_R(\mathbf{d}_1) \times \mathbf{d}_2 = 0.$$

更一般地要求两个方向夹成  $\theta$  角, 则可取

$$\mathbf{d}_1 \cdot T_R(\mathbf{d}_2) = \cos\theta \quad \text{或} \quad T_R(\mathbf{d}_1) \cdot \mathbf{d}_2 = \cos\theta.$$

## 2) 点到平面的距离

设点为  $\mathbf{p}_0$ , 平面由点  $\mathbf{p}_1$  及单位化法向量  $\mathbf{n}$  构成, 用户给定距离为  $a$ , 则有

$$(T(\mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{n} = a \quad \text{或} \quad (\mathbf{p}_0 - T(\mathbf{p}_1)) \cdot T_R(\mathbf{n}) = a.$$

## 3) 点到直线的距离

设点为  $\mathbf{p}_0$ , 直线由点  $\mathbf{p}_1$  及单位化方向  $\mathbf{d}$  构成, 用户给定距离为  $a$ , 则有

$$\|\mathbf{n}_1 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{d}) \cdot \mathbf{d}\|_2 = a$$

或

$$\|\mathbf{n}_2 - (\mathbf{n}_2 \cdot T_R(\mathbf{d})) \cdot T_R(\mathbf{d})\|_2 = a,$$

其中

$$\mathbf{n}_1 = T(\mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{p}_0 - T(\mathbf{p}_1).$$

至此, 我们完成了装配位置约束到代数方程组的转换, 产生了一系列关于参数  $(x_0, y_0, z_0, a, b, \theta)$  的线性方程. 对于第一种关系, 可以生成三个方程. 但对于第二和第三种关系, 各自只生成一个方程.

## 4 约束方程求解

根据第 3 节中的方法, 由用户描述的装配体位置约束最终被转化为一个非线性方程组

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0. \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x}$  表示  $n$  维向量  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 这里  $\mathbf{x}$  为 6 个几何变换参数  $(x_0, y_0, z_0, a, b, \theta)^T$ , 则  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  表示  $m$  维向量.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T$$

由解非线性方程组的 Newton 法, 得到迭代公式

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - A_k^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \quad (2)$$

其中  $A_k$  为  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}_k$  处的 Jacobi 矩阵.

但对于我们这个问题, 使用 Newton 迭代公式将碰到以下两个问题:

1) 由装配约束转化而成的非线性方程个数不一定正好为求解参变量个数, 大多数情况下方程个数多于变量个数, 有时甚至还少于变量个数, 例如图 1 中的三个面耦合约束生成了 12 个约束方程. 这就使得 Jacobi 矩阵  $A_k$  不为方阵, Newton 迭代方法无法用.

2) 即使方程个数与变量个数相等, 由于可能存在相关性, 使得 Jacobi 矩阵奇异病态, 使得 Newton 迭代公式无法计算或者计算误差很大.

解决这个问题的一个办法就是使用最小二乘法, 即每次迭代时, 使误差在二范意义

下最小, 其迭代公式为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_k).$$

这种方法虽解决了第一个问题, 但是当  $A_k^T A_k$  奇异或病态时, 迭代将无法进行或产生较大误差. 下面给出我们的方法, 我们的方法主要是采用了矩阵理论中的一个重要结果, 即矩阵的奇异分解. 通过矩阵的奇异分解, 直接计算公式 (2). 这种方法很好地解决了上述两个问题.

由矩阵理论得知, 任何一个  $m \times n$  矩阵 ( $m \geq n$ ) 都可分解为一个  $m \times n$  的列正交矩阵  $U$ , 一个  $n \times n$  对角矩阵  $W$  (对角元素大于等于零) 和一个  $n \times n$  正交矩阵  $V$  的转置的乘积, 即

$$A = UWV^T$$

其中  $U, V$  分别满足

$$\sum_{i=1}^m u_{ik} \cdot u_{il} = \delta_{kl}, \quad 1 \leq k, \quad l \leq n,$$

$$\sum_{j=1}^n v_{jk} \cdot v_{jl} = \delta_{kl}, \quad 1 \leq k, \quad l \leq n,$$

而  $W$  则可写成

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ w_i & i = j, w_i > 0. \end{cases}$$

若将  $A$  看作  $R_n$  到  $R_m$  的线性变换, 则易知由元素  $w_i$  非零时对应  $U$  中的  $i$  列构成了  $A$  的值域的一组正交基, 而由元素  $w_j$  为零时对应  $V$  中的  $j$  列构成了  $A$  的零空间的一组正交基.

对于方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有

$$UWV^T \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

若所有  $w_i \neq 0$ , 有

$$\mathbf{x} = V \cdot \text{diag}(1/w_i) \cdot U^T \cdot \mathbf{b}, \quad (3)$$

若有  $w_i = 0$ , 则在上式中置  $1/w_i = 0$ , 即替零化.

可以证明, 这样求得的  $X$  使得

$$r = \|A \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2.$$

事实上, 假定  $W^{-1}$  为  $\text{diag}(1/w_i)$  替零化得到的矩阵,  $\mathbf{x}$  为 (3) 的一个解, 现对  $X$  作任意修正  $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$  有

$$\begin{aligned} r &= \|A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') - \mathbf{b}\|_2 = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b} + A\mathbf{x}'\|_2 \\ &= \|UWV^T VW^{-1} U^T \mathbf{b} - \mathbf{b} + A\mathbf{x}'\|_2 = \|(UWV^{-1} U^T - I)\mathbf{b} + A\mathbf{x}'\|_2 \\ &= \|U(WW^{-1} U^T - U^T)\mathbf{b} + U U^T \mathbf{b}'\|_2 = \|(WW^{-1} - I)U^T \mathbf{b} + U^T \mathbf{b}'\|_2 \\ &= \|(WW^{-1} - I)U^T \mathbf{b} + U^T \mathbf{b}'\|_2. \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{b}' = A\mathbf{x}'$ ,  $(WW^{-1} - I)$  为对角阵, 仅当  $w_i = 0$  有非零  $i$  分量, 又  $\mathbf{b}'$  在  $A$  的值域中, 故仅当  $w_i \neq 0$  时有非零  $i$  分量. 所以  $\mathbf{b}' = 0$  时,  $r$  达到最小.

值得一提的是采用奇异分解法求线性方程组的解能较好地处理矩阵为病态的情况, 当  $w_i$  小到接近零时, 采用其它线性方程求解方法都会产生较大的误差, 但使用奇异分解并对这些小  $w_i$  零化, 计算的结果将会有很大的改善.

## 5 具有自由度的装配体的处理

在实际装配中, 装配约束并没有完全将被装配的零件完全固定, 有时允许该零件在某个自由度内是自由的. 例如图 4 中螺钉通过两个装配约束与一个有孔的零件装配, 在装配成功之后允许螺钉绕其中心轴自由旋转.

这种情况反映在数值求解上, 有两种情形:

- 1) 约束方程个数少于所求变量个数,
- 2) 约束方程个数虽不少于所求变量个数, 但约束方程之间存在相关性.

对于这个问题, 可通过系统额外增加一个约束使零件完全固定 (Rochelean<sup>[7]</sup>), 但是这种方法是很牵强的, 因为要确定所增加的约束, 首先要确定零件诸如中心轴等全局属性, 而这个工作的实现是很困难的.

我们对这个问题的处理则很简单, 对于上述第二种情形只须直接采用上节的方法进行求解, 对于第一种情形则用零行对方程 (2) 进行增广使方程个数与变量个数相等, 然后用奇异分解法求解.

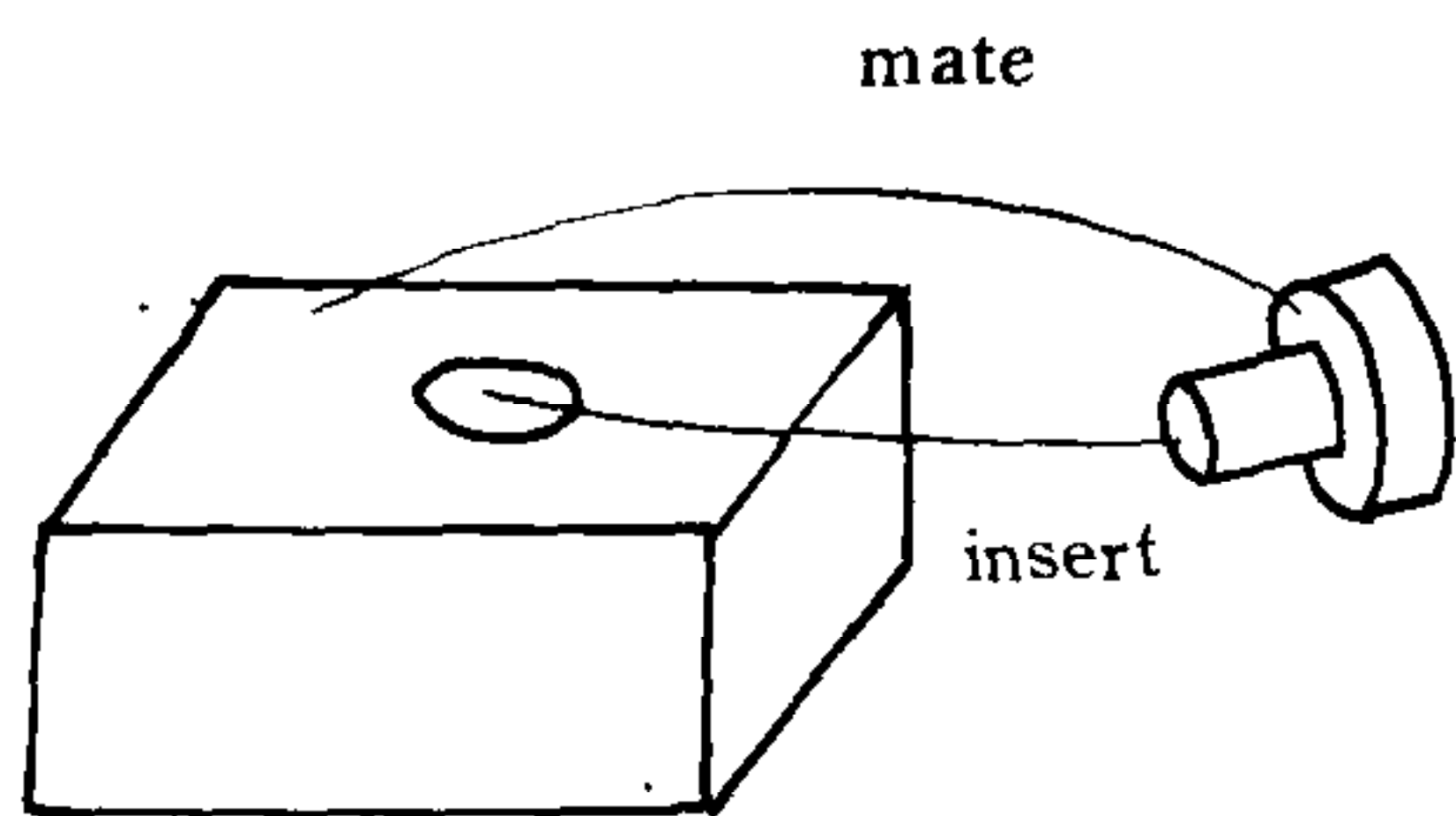


图 4 装配体的允许自由度

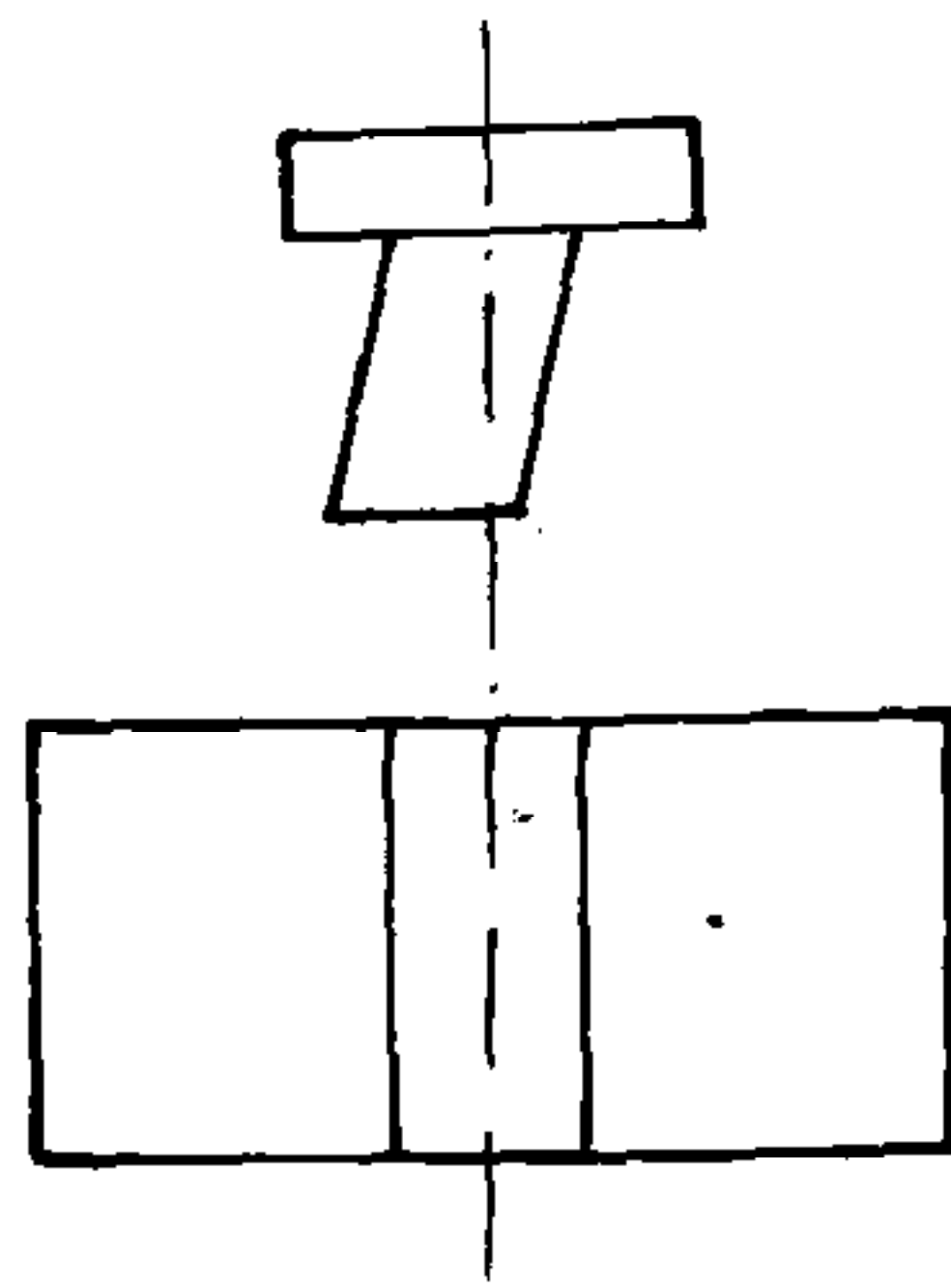


图 5 装配失效

## 6 装配体可装配性度量

在进行装配体设计时, 当被装配的零部件形状设计得不合要求或者装配约束得不好会出现无法装配的情况 (如图 5 所示).

为了有效地确定装配体的可装配程度, 我们引入可装配度这个概念. 假定  $AX = b$  为装配约束方程组, 则可装配度定义为

$$a = \|Ax - b\|_2,$$

当  $a$  大于某一系统定义的限定值时, 则认为装配过程失败.

## 7 小结

本文所提出的采用约束方法实现装配体相对位置的形式化描述及自动求解的基本原理与算法, 已经成功地应用到浙江大学人工智能研究所最新研制开发的特征化、参数化三维产品造型系统 MCAD II 中。实际应用表明, 本文所提出的方法能够有效地解决装配体设计中位置描述及求解问题, 具有高效、实用、可靠等特点。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Ko H and Lee K. Automatic Assembling procedure generation from mating condition. *CAD*, 1987, (1): 3—10.
- [ 2 ] Lee K, Gossard D C. A hierarchical data structure for representing assembly: part 1, *CAD*, 1985, (1): 15—19.
- [ 3 ] Lee K, Andrews G. Inference of the positions of components in an assembly: part 2, *CAD*, 1985, (1): 20—24.
- [ 4 ] Lee S, Shin Y G. Assembly planning based on geometric reasoning. *Computers & Graphics*, 2: 37—250.
- [ 5 ] Mullineux G. Optimizing scheme for assembling components. *CAD*, 1987, (1): 35—40.
- [ 6 ] Parametric technology corporation, Pro/ENGINEER Concepts and capabilities. USA, 1988.
- [ 7 ] Rocheleau D N, Lee K. System for interactive assembly modeling. *CAD*, 1987, (2): 65—72.

## CONSTRAIN BASED METHOD FOR DESCRIBING AND INFERRING POSITION OF ASSEMBLIES

GE JIANXIN    LI HAILONG    DONG JINXIANG    HE ZHIJUN

(State Key Lab of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

### ABSTRACT

Assembly design system is an important component of computer-aided design systems. This paper presents the mechanism and techniques to describe the relative positions of parts in an assembly and to automatic inference the accurate position from the description. The technique of singular value decomposition of a matrix is introduced to solve the problems of over-constraints, under-constrained condition, ill conditioned matrix.

**Key words:** Assembly design, geometric constraint satisfaction, computer-aided design.



**葛建新** 1965年生, 分别于1988年、1990年和1993年在浙江大学计算机系获本科、硕士和博士学位, 目前在浙江大学数学系博士后流动站从事研究和开发工作, 主要研究领域为计算机辅助几何造型、计算机辅助设计以及人机界面管理系统。

## 1996年中国智能自动化学术会议(CIAC'96) 征 文 通 知

### 会议主办单位

· 中国自动化学会智能自动化专业委员会  
· 中国人工智能学会计算机视觉及智能控制学会  
· IEEE 控制系统学会北京分会 · 中国系统工程学会模糊数学与模糊系统委员会 · 内蒙古电力学院(内蒙古工业大学电力学院)

### 会议地点时间

呼和浩特市 1996年8月26日—29日

### 征文范围

· 智能自动化系统理论、方法和技术 · 神经网络控制 · 模糊控制 · 基于规则的控制  
· 分层递阶智能控制 · 学习控制 · 自适应控制 · 变结构控制 · 机器人规划与控制 · 智能管理与智能决策 · 智能信息处理 · 遗传算法 · 智能设计 · 智能建模与仿真 · 智能制造 · 智能故障诊断 · 智能通讯与网络  
· 智能人机界面及多媒体技术 · 虚拟现实技术 · 智能自动化仪表及传感器 · 智能自动化装置与执行机构 · 智能自动化在电力、冶金、化工、航空及航天部门的应用 · 大系统及智能

自动化 · 其它有关问题

### 论文

· 在国内外杂志或会议上未发表过 · 篇幅一般不超过A4纸6页, 论文后面请附不超过200字的主要作者简介, 论文具体格式请见所附清稿要求 · 本次会议将评选出1—2篇优秀论文, 除颁发获奖证书外, 每篇获奖论文奖励人民币1000元 · 为方便论文作者赴会, 会议期间将在北京设立中转站

### 关键日期

· 1996年4月30日之前投送符合清稿要求的全文两份(不论录用与否, 恕不退还) · 1996年5月30日之前发出录用通知

联系人: 钱宗华

通信地址: 北京清华大学计算机系 100084

电 话: 2594895(O)

2561144 — 2266(O)

2594458(H)

传 真: 2562463

“欲投稿者, 请向联系人索要清稿规格与要求”。

“1995年中国智能自动化学术会议的论文集尚有少量剩余, 欲购者请与联系人联系。”