

# 一类非线性系统 Fokker-Planck 方程的解法<sup>1)</sup>

薛定宇

(东北大学控制与仿真研究中心 沈阳 110006)

## 摘 要

通过对一类典型非线性反馈系统的分析,提出一种对一阶和二阶反馈非线性系统的稳态 Fokker-Planck 方程的解析解法。根据这一方法,再利用最优降阶技术,得出高阶系统的近似解,并将其与 RDF 方法得出的近似解在精度上加以比较,得出有益的结论。

**关键词:** 非线性系统 Fokker-Planck 方程,随机输入,模型降阶,最优化方法。

## 1 引言

在非线形系统受随机扰动时,求出系统中某些信号的概率分布的一种简单而且有效的方法是随机描述函数法(RDF法)<sup>[1]</sup>,这种方法可以很容易地得出高阶系统的近似解。然而 RDF 方法毕竟是一种近似的解法,它忽略非线性环节对信号产生的畸变,所以其精度在一些情况下不是很高,甚至会导致错误的结论。求解前面问题的另一种有效的方法是 Fokker-Planck 方程的方法<sup>[2]</sup>,然而此解法一般是非常困难的,尤其对高阶非线性系统来说,即便为可解的也将是极其困难的。在早期的一些文献中<sup>[3,4]</sup>,Fokker-Planck 方程的解法局限于一阶和二阶不含零点的系统,所适应的非线性环节也很有限,如各种继电特性,饱和与死区特性等。然而,对于更一般的非线性环节则没有合适的解法。

这里提出一种对一阶和二阶(可含有零点)非线性反馈系统的稳态 Fokker-Planck 方程的解析解法,根据这一方法,利用最优降阶技术<sup>[5]</sup>,得出高阶系统的近似解,并将之与 RDF 方法得出的近似解在精度上加以比较,得出有益的结论。

### 1.1 非线性系统的描述

一个典型的非线性反馈系统模型如图 1 所示。图中  $N(e)$  为静态非线性函数; $r(t)$  为常数输入量,其值为  $c$ ; $\gamma(t)$  为

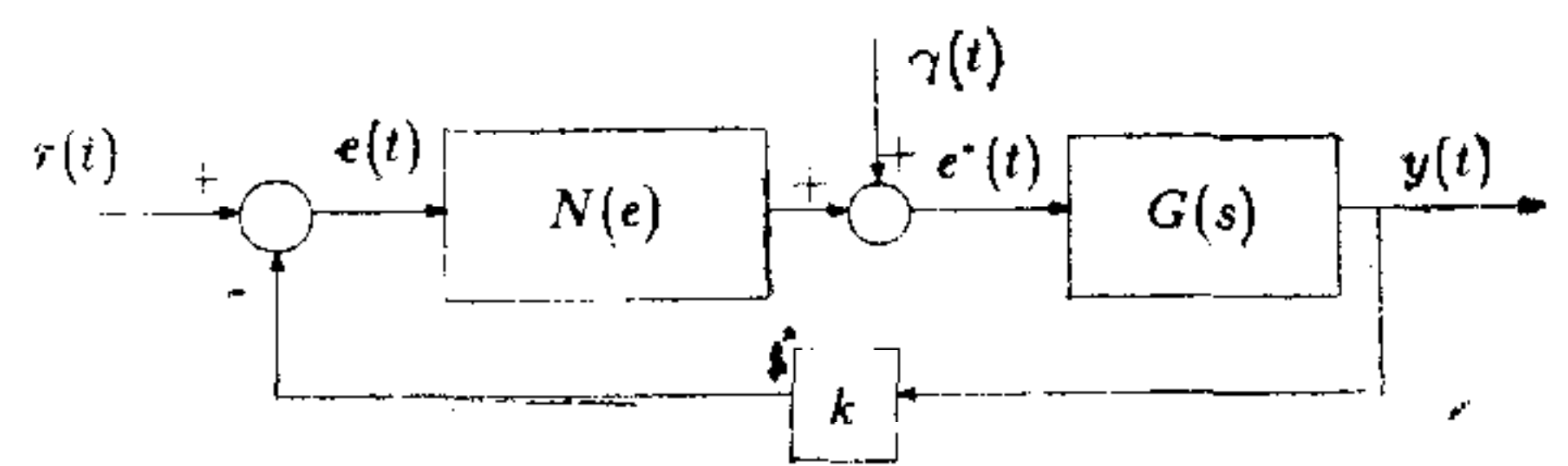


图 1 非线性反馈系统结构

1) 辽宁省博士启动基金与国家教委回国人员基金资助课题。  
本文于 1994 年 3 月 21 日收到。

Gauss 白噪声输入, 其均值为  $\eta$ , 其方差为  $\sigma^2$ ;  $G(s)$  为线性传递函数;  $k$  为反馈系数. 对静态非线性环节作以下两种分类. 第一类非线性环节为相对误差信号  $e(t)$  是分段线性的, 且满足方程

$$N(e) = k_i e + b_i, e_i < e(t) \leq e_{i+1}, i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

式中  $k_i$  为这一线性段内的斜率;  $b_i$  为截距;  $k_i, b_i, e_i$ , 和  $e_{i+1}$  均为给定常数, 且  $e_1 = -\infty, e_{N+1} = \infty$ . 另一类非线性环节中, 假定非线性函数为一个已知函数, 如一个三次函数  $N(e) = e^3$ .

## 1.2 Fokker-Planck 方程引论

如果系统的状态方程为

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + \xi_i(t), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

式中  $\xi_i(t)$  为白噪声向量;  $f_i(\cdot)$  为线性或非线性函数. 可以证明<sup>[2]</sup>, 各个状态变量  $x_i$  间的联合概率密度函数  $p(x_1, \dots, x_n)$  满足一个 Fokker-Planck 方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f_i p)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 (b_{ij} p)}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (3)$$

式中  $b_{ij}$  为白噪声向量  $\xi(t)$  的二次矩. 若在  $i = 1, 2, \dots, n-1$  时  $\xi_i(t) = 0$ , 且  $\xi_n(t)$  有界, 令  $\partial p / \partial t = 0$ , 则可以写出稳态 Fokker-Planck 方程

$$- \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f_i p)}{\partial x_i} + \frac{D}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 p}{\partial^2 x_n} = 0. \quad (4)$$

式中  $D$  为白噪声信号  $\xi_n(t)$  的方差. 但事实上 Fokker-Planck 方程是非常难解的, 在一般情况下解析解是不存在的.

## 2 一阶系统 Fokker-Planck 方程的解析解法

### 2.1 非线性为分段线性时 Fokker-Planck 方程的解析解

若  $G(s)$  为一阶模型  $G(s) = b/(s+a)$ , 则状态方程模型为

$$\dot{x} = -ax + e^*(t), y = bx. \quad (5)$$

由图 1 可知,  $e^*(t) = k_i e(t) + b_i + \gamma(t), x(t) = [c - e(t)]/(bk)$ , 这样

$$\dot{e} = -\alpha_i e - \beta_i + \omega(t). \quad (6)$$

式中  $\alpha_i = a + bkk_i$ ,  $\beta_i = bk(b_i + \eta) - ac$ , 且信号  $\omega(t) = -bk\gamma_0(t) = -bk[\gamma(t) - \eta]$  亦为 Gauss 白噪声, 其方差为  $b^2k^2D$ . 系统的稳态 Fokker-Planck 方程可以写成

$$\frac{\partial [(-\alpha_i e - \beta_i) p_i]}{\partial e} = \frac{b^2k^2D}{2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial^2 e}. \quad (7)$$

式中  $p_i(e)$  为  $e(t) \in [e_i, e_{i+1})$  时的概率密度函数. 对  $e(t)$  进行积分, 可以得出

$$(-\alpha_i e - \beta_i) p_i = \frac{b^2k^2D}{2} \frac{\partial p_i}{\partial e} + C_0. \quad (8)$$

可以证明  $C_0 \equiv 0$ <sup>[2]</sup>. 由这一偏微分方程可得

$$p_i(e) = C_i \exp \left[ -\frac{1}{b^2k^2D} (\alpha_i e^2 + 2\beta_i e) \right]. \quad (9)$$

式中  $C_i$  为待定系数。因为概率密度函数  $p(e)$  是一个连续函数, 所以列出  $N-1$  个边界条件  $p_i(e_{i+1}) = p_{i+1}(e_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ 。定义  $\delta C_i = C_{i+1}/C_i$ , 则可以得出

$$C_{i+1} = C_1 \prod_{j=1}^i \delta C_j, \text{ 且}$$

$$\delta C_i = \exp \left[ -\frac{1}{bkD} (\Delta k_i e_{i+1}^2 + 2\Delta b_i e_{i+1}) \right]. \quad (10)$$

式中  $\Delta k_i = k_{i+1} - k_i$ , 且  $\Delta b_i = b_{i+1} - b_i$ 。此外由  $\int_{-\infty}^{\infty} p(e) de = 1$  可以得出待定系数  $C_1$

$$C_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \left( \prod_{j=1}^{i-1} \delta C_j \Phi_i \right)}. \quad (11)$$

式中  $\Phi_i$  可按下列情况分别求出

- 若  $\alpha_i \neq 0$ , 则  $\Phi_i = F_i \int_{(e_i + \beta_i/\alpha_i)/\mu_i}^{(e_{i+1} + \beta_i/\alpha_i)/\mu_i} e^{-\tau^2/s} d\tau$ , 式中  $\mu_i = bk\sqrt{\frac{D}{2\alpha_i}}$  且

$$F_i = \mu_i \exp \left( \frac{\beta_i^2}{\alpha_i b^2 k^2 D} \right);$$

- 若  $\alpha_i = 0$ ,  $\beta_i \neq 0$ , 则  $\Phi_i = \frac{b^2 k^2 D}{2\beta_i} \left[ \exp \left( \frac{2\beta_i e_i}{b^2 k^2 D} \right) - \exp \left( \frac{2\beta_i e_{i+1}}{b^2 k^2 D} \right) \right];$

- 若  $\alpha_i = \beta_i = 0$ , 则  $\Phi_i = e_{i+1} - e_i$ 。

## 2.2 非线性为给定函数时 Fokker-Planck 方程的解析解

如果非线性环节为  $N(e)$ , 则状态方程可以写成

$$\dot{e} = -ac + (ac - bk\eta) - bkN(e) + w(t). \quad (12)$$

式中  $w(t) = -bk[\gamma(t) - \eta]$  亦为 Gauss 信号, 其均值为 0, 其方差为  $b^2 k^2 D$ 。这时稳态 Fokker-Planck 方程可以写成

$$\frac{\partial [(-ae + ac - bk\eta - bkN(e))p]}{\partial e} = \frac{b^2 k^2 D}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial^2 e}. \quad (13)$$

则可以得出 Fokker-Planck 的解为

$$p(e) = C \exp \left\{ -\frac{1}{b^2 k^2 D} \left[ ae^2 + 2(bk\eta - ac)e + 2bk \int_0^e N(\alpha) d\alpha \right] \right\}. \quad (14)$$

由  $\int_{-\infty}^{\infty} p(e) de = 1$  可以求出式中待定系数  $C$

$$C = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{b^2 k^2 D} \left[ ae^2 + 2(bk\eta - ac)e + 2bk \int_0^e N(\alpha) d\alpha \right] \right\} de}. \quad (15)$$

## 3 二阶系统 Fokker-Planck 方程的解析解法

### 3.1 二阶系统 Fokker-Planck 方程的一般解法

如果一个二阶系统的状态方程可以写成

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \dot{x}_2 = -\frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_1} - K \frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \gamma_0(t), \quad (16)$$

则稳态 Fokker-Planck 方程的解可以写成

$$p(x_1, x_2) = C \exp \left[ -\frac{2K}{D} H(x_1, x_2) \right]. \quad (17)$$

### 3.2 不含零点的二阶系统解法

假设  $G(s)$  为二阶模型  $G(s) = b/(s^2 + a_2s + a_1)$ , 且非线性环节满足式(1), 则可以容易地写出系统的状态方程模型为

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\alpha_1 x_1 - a_2 x_2 + \gamma_i + \gamma_0(t), y = b x_1. \quad (18)$$

式中  $\alpha_i = a_1 + b k k_i$ ,  $\gamma_i = k_i c + b_i + \eta_0$ . 为使此状态方程满足式(19)中给出的形式, 可以

选择  $K = a_2$ ,  $H(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \frac{\alpha_i x_1^2}{2} - \gamma_i x_1 + C_0$ , 且  $C_0 \equiv 0$ , 则

$$p_i(x_1, x_2) = C'_i \exp \left[ -\frac{2a_2}{D} \left( \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} \alpha_i x_1^2 - \gamma_i x_1 \right) \right]. \quad (19)$$

将式(19)对  $x_2$  求积分, 可得

$$p_i(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(x_1, x_2) dx_2 = \sqrt{\frac{\pi D}{a_2}} C'_i \exp \left[ -\frac{a_2}{D} (\alpha_i x_1^2 - 2\gamma_i x_1) \right]. \quad (20)$$

仿照一阶系统求法, 可得

$$p(e) = C_i \exp \left[ -\frac{1}{b^2 k^2 D'} (\alpha_i e^2 + 2\beta_i e) \right]. \quad (21)$$

式中  $\beta_i = b k \gamma_i - \alpha_i c = b k (b_i + \eta) - a_1 c$ ,  $D' = D/a_2$ , 且

$$C_i = \frac{\sqrt{\pi D'}}{b k} \exp \left[ -\frac{1}{b^2 k^2 D'} (\alpha_i c^2 - 2b k \gamma_i c) \right] C'_i. \quad (22)$$

可见式(21)中给出的  $p(e)$  的结构与式(9)中给出的一阶系统的  $p(e)$  是一致的, 所以  $C_i$  也可以用相同的方法求出, 即只将式(9)中的  $D$  用  $D'$  替换即可.

### 3.3 含有零点的二阶系统解法

如果线性环节的传递函数可以写成  $G(s) = (d_2 s + d_1)/(s^2 + a_2 s + a_1)$ , 且非线性环节满足式(1), 则系统的状态方程模型可以写成

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\alpha_i x_1 - \lambda_i x_2 + \gamma_i + \gamma_0(t), y = d_1 x_1 + d_2 x_2. \quad (23)$$

式中  $\alpha_i = a_1 + k k_i d_i$ ,  $\lambda_i = a_2 + k k_i d_2$ , 且  $\gamma_i = k_i c + b_i + \eta_0$ . 可以仿照前面给出的方法, 得到

$$K = \lambda_i, H(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} \alpha_i x_1^2 - \gamma_i x_1 + C_0, \quad (24)$$

且  $C_0 \equiv 0$ . 当  $e_i \leq e(t) = c - k d_1 x_1 - k d_2 x_2 < e_{i+1}$  时,  $p_i(x_1, x_2)$  满足

$$p_i(x_1, x_2) = C'_i \exp \left[ -\frac{2\lambda_i}{D} \left( \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} \alpha_i x_1^2 - \gamma_i x_1 \right) \right], \quad (25)$$

可以得出

$$p_i(e) = \frac{1}{k d_2} \int_{-\infty}^{\infty} p_i \left( x_1, \frac{c - e - k d_1 x_1}{k d_2} \right) dx_1 = C_i \exp \left[ -\frac{\lambda_i (\alpha_i e^2 + 2\beta_i e)}{k^2 D (d_1^2 + \alpha_i d_2^2)} \right]. \quad (26)$$

式中  $C = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi D}{\lambda_i(d_1^2 + \alpha_i d_2^2)}} \exp\left[-\frac{\lambda_i(\alpha_i c^2 - 2k\gamma_i d_1 c - k^2 d_2^2 \gamma_i^2)}{k^2 D(d_1^2 + \alpha_i d_2^2)}\right] C'_i$ , 且

$\beta_i = kd_1(b_1 + \eta) - a_1 c$ . 仿照前面的方法, 可得

$$\delta C_i = \exp\left\{\frac{1}{k^2 D} \left[ \frac{\lambda_{i+1}(\alpha_{i+1} e_{i+1}^2 + 2\beta_{i+1} e_{i+1})}{d_1^2 + \alpha_{i+1} d_2^2} - \frac{\lambda_i(\alpha_i e_i^2 + 2\beta_i e_i)}{d_1^2 + \alpha_i d_2^2} \right]\right\}, \quad (27)$$

且  $C_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \left( \prod_{j=1}^{i-1} \delta C_j \Phi_j \right)}$ . 这样仿照前面的方法可以容易地求出  $\Phi_i$

• 若  $\alpha_i \neq 0$ , 则  $\Phi_i = \int_{(e_i + \beta_i/\alpha_i)\mu_i}^{(e_{i+1} + \beta_{i+1}/\alpha_{i+1})\mu_i} e^{-\tau^2/s} d\tau$ , 式中  $\mu_i = bk \frac{D}{2\alpha_i}$ , 且

$$F_i = \mu_i \exp\left[\frac{\beta_i^2}{\alpha_i b^2 k^2 D}\right];$$

• 若  $\alpha_i = 0$ ,  $\beta_i \neq 0$ , 则  $\Phi_i = \frac{k^2 d_1^2 D}{2\lambda_i \beta_i} \left[ \exp\left(-\frac{2\lambda_i \beta_i e_i}{k^2 d_1^2 D}\right) - \exp\left(-\frac{2\lambda_i \beta_i e_{i+1}}{k^2 d_1^2 D}\right) \right];$

• 若  $\lambda_i = 0$  和/或  $\alpha_i = \beta_i = 0$ , 则  $\Phi_i = e_{i+1} - e_i$ .

如果非线性环节为给定的单一函数描述时, 则当  $G(s)$  有零点时 Fokker-Planck 方程的解析解无法求出. 这时可以对非线性函数进行分段线性拟合, 来求出系统 Fokker-Planck 方程的近似解.

## 4 高阶系统 Fokker-Planck 方程的近似解

高阶系统的解析解一般来说是难以直接求出的. 下面将讨论各种最优化准则下的最优降阶方法和在非线性环节不是分段线性时如何较精确地求出系统 Fokker-Planck 方程的近似解.

### 4.1 高阶模型最优降阶概述

假设原系统  $G(s)$  为

$$G(s) = \frac{n_1 s^{n-1} + n_2 s^{n-2} + \dots + n_n}{s^n + q_1 s^{n-1} + \dots + q_n}, \quad (28)$$

二阶降阶模型为  $G_{1/2}(s) = (\beta_0 s + \beta_1)/(s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2)$ , 在输入  $r(t)$  的作用下, 定义最优降阶目标函数<sup>[5]</sup>

$$J = \min_{\theta} \left[ \int_0^{\infty} w^2(t) e^2(t) dt \right] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-i\infty}^{j\infty} \mathcal{H}(s) \mathcal{H}(-s) ds. \quad (29)$$

式中  $w(t)$  为加权系数;  $e(t)$  为在同样输入信号下原模型与降阶模型之间的误差. 降阶模型参数可以通过数值最优化方法来求出<sup>[5]</sup>.

### 4.2 高阶 Fokker-Planck 方程的近似解法

定义加权函数为  $w(t) = 1$ , 这里给出三种最优降阶模型来求 Fokker-Planck 方程近似解:

• 第一种降阶模型简记为  $G^I(s)$ , 假定进入线性模型  $G(s)$  的信号为 Gauss 过程, 则  $\mathcal{H}(s) = G(s) - G^I(s)$ ;

• 第二种降阶模型简记为  $G^{\text{II}}(s)$ , 其准则是首先对原系统作 RDF 分析, 即用一个等效增益  $K_{e,q}(\sigma)$  来代替非线性环节, 则

$$\mathcal{K}(s) = [G(s) - G^{\text{II}}(s)] \frac{1}{1 + kK_{e,q}(\sigma)G(s)}; \quad (30)$$

• 第三种降阶模型简记为  $G^{\text{III}}(s)$ , 采取闭环系统的最优降阶方法, 仍用其 RDF 值取代原系统的非线性函数, 则

$$\mathcal{K}(s) = \frac{1}{1 + kK_{e,q}(\sigma)G(s)} \frac{G(s) - G^{\text{III}}(s)}{1 + kK_{e,q}(\sigma)G^{\text{III}}(s)}. \quad (31)$$

采用上述三种最优降阶模型之一取代原系统的线性函数  $G(s)$ , 则可得出相应的高阶 Fokker-Planck 方程的一个近似解。

### 4.3 给定非线性函数的分段线性拟合

由前节可知, 若二阶系统含有零点时, 如果非线性函数不是分段线性的, 则无法得出相应的 Fokker-Planck 方程的解析解。这时, 可以采用两种方法来解决这样的问题: 第一种方法是先求出系统不含零点的二阶降阶模型, 然后根据它来求出相应的 Fokker-Planck 方程的解, 并认为所得出的解为原系统的近似解; 另一种近似方法是首先对非线性函数作分段线性拟合, 然后由含有零点的二阶最优降阶模型来求出 Fokker-Planck 方程的解, 并认为它是原系统的一个近似解。在使用第二种方法时, 有必要明确“有效”分段区间这一概念, 因为不可能也没有必要对整个区间, 即  $(-\infty, \infty)$  进行分段。由 RDF 方法可以得出  $e(t)$  的方差的近似值  $\sigma^2$ , 可以将分布区间  $(-3\sigma, 3\sigma)$  定义为有效分段区间, 将之分成若干个子区间, 对每一段进行线性拟合, 这样便可以求出相应的高阶 Fokker-Planck 方程的近似解。

## 5 演示例子

下面用一个例子来演示所给出的算法。首先讨论高阶系统的近似解法, 并与传统的 RDF 方法进行比较, 同时还将考虑非线性程度对近似解精度的影响。由于高阶系统的解析解一般是不存在的, 所以将数值仿真得出的直方图作为可靠的结果<sup>[6]</sup>, 来进行各种方法的精度比较。然后再讨论非线性函数是单一的给定函数时高阶系统的近似解法, 并与其它方法进行比较。

考虑一个四阶系统, 线性环节为

$$G(s) = \frac{14s^3 + 248s^2 + 900s + 1200}{s^4 + 18s^3 + 102s^2 + 180s + 120},$$

非线性环节是一个有死区的函数, 其数学表示为

$$N(e) = \begin{cases} me - m\delta \operatorname{sgn}(e), & |e| > \delta, \\ 0, & |e| \leq \delta. \end{cases}$$

首先假定  $c = 0, \eta = 0, D = 3, m = 1, \delta = 2$ , 可以得出非线性环节的随机描述函数为  $K_{e,q}(s) = 0.6969$ 。由前面给出的三种准则得出的最优降阶模型分别为

$$G^{\text{I}}(s) = \frac{13.0724s + 9.8986}{s^2 + 2.1513s + 0.9899}, \quad G^{\text{II}}(s) = \frac{14.6908s + 42.3075}{s^2 + 5.1758s + 4.2307},$$

$$G^{\text{III}}(s) = \frac{14.4693s + 3.3826}{s^2 + 2.0711s + 0.3383}.$$

误差函数的 Fokker-Planck 方程的近似解如图 2 所示，图中还给出了 RDF 的解和由数值仿真得出的直方图。可以认为仿真得出的结果是可靠的，由此可以看出，由降阶模型  $G^{\text{II}}(s)$  和  $G^{\text{III}}(s)$  得出的近似解比  $G^{\text{I}}(s)$  得出的要精确，这和前面所预计的是一致的。

由降阶模型  $G^{\text{I}}(s)$  得出的近似解也比 RDF 得出的近似解要精确得多。这里还要讨论一下这种 Fokker-Planck 方程近似解法的精度与非线性环节参数之间的关系。假设非线性的死区宽度  $\delta$  不变，而斜率  $m$  分别取 0.1, 0.5, 2, 得出的 Fokker-Planck 方程的近似解与 RDF 结果如图 3 所示，图中还给出了由仿真结果得出的直方图。由图可见，随着  $m$  的增加，即非线性程度的增加，本文给出的 Fokker-Planck 方程的近似解法比 RDF

方法越精确得多。若保持斜率  $m$  不变，而将死区  $\delta$  取 0.5, 2, 5，即系统的非线性程度增加时，Fokker-

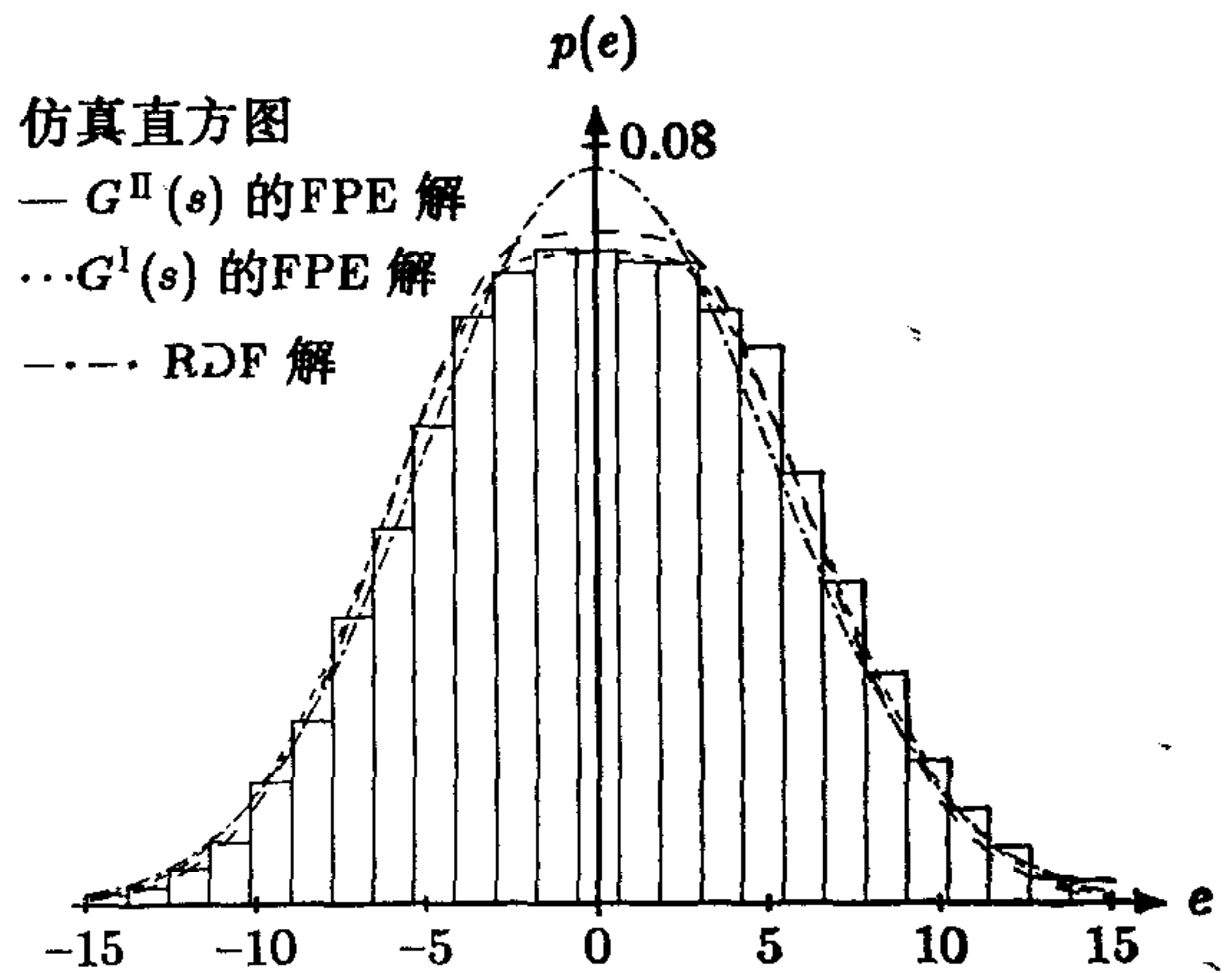


图 2 Fokker-Planck 方程的近似解

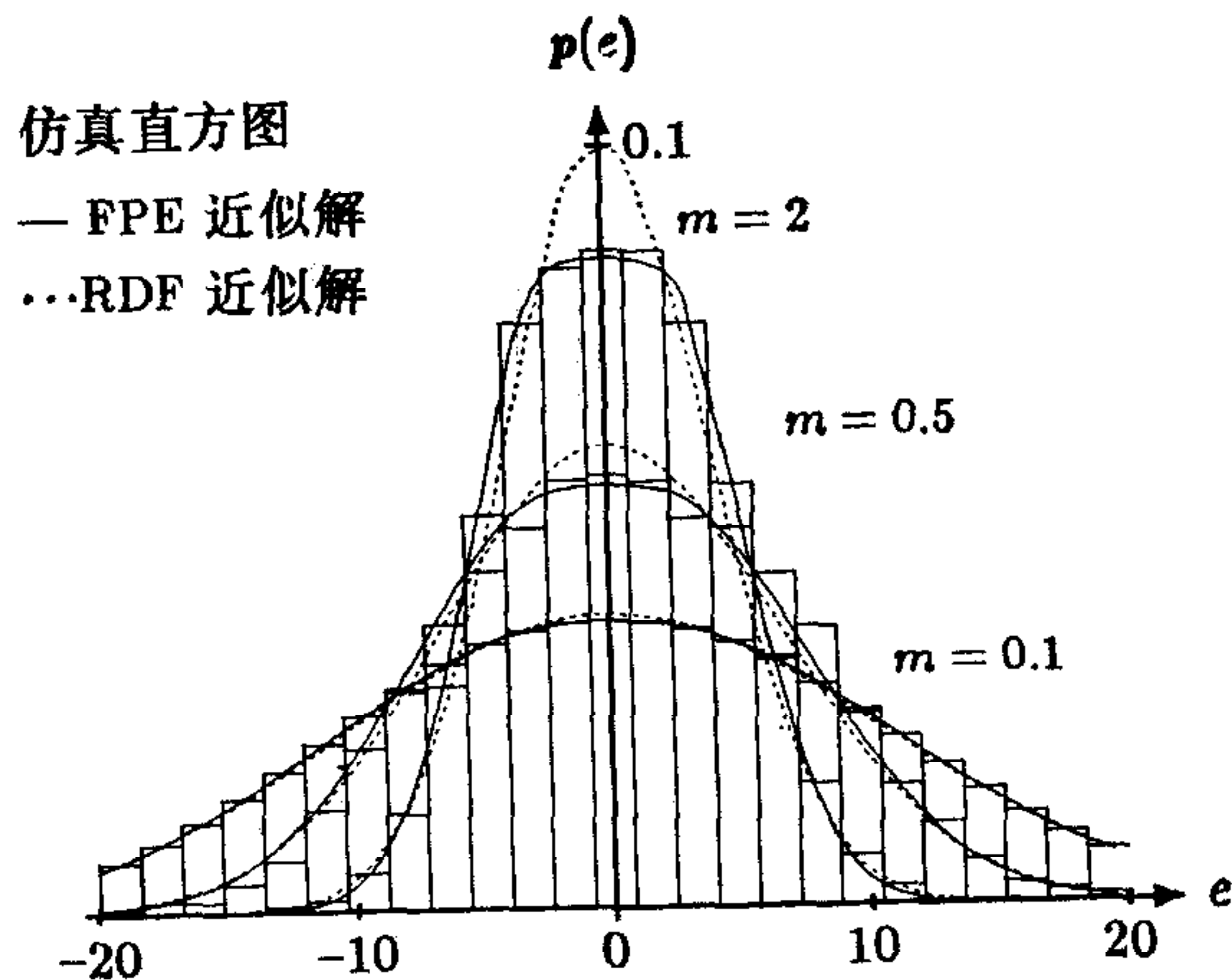


图 3  $m$  对近似解精度的影响

Planck 方程的近似解与 RDF 解如图 4 所示，图中还给出了由仿真结果得出的直方图。可以看出，这一近似解的精度在非线性的程度很高时要明显高于 RDF 得出的近似解。

如果此系统中非线性环节为三次函数  $N(e) = e^3$ ，由 RDF 方法得出系统的  $K_{e,q}(1.6246) = 7.9180$ ，选取有效分段区间  $(-5, 5)$ ，并选择分断点为  $-4, -3, -2, -0.8, 0.8, 2, 3, 4$ ，这时可以得出最优降阶模型  $G^{\text{II}}(s) = (14.4693s + 3.3826)/(s^2 + 2.0711s + 0.3383)$ 。采用不含零点的降阶方法可得出—阶降阶模型  $G^{\text{II}}_0 = 12.8484/(s + 12.8484)$ ，这时可以求出系统的 Fokker-Planck 方程的近似解如图 5 所示。图中还给出了由仿真结果得出的直方图及 RDF 结果。显然，这里给出的近似解的精度比 RDF 方法要高得多。同时，采用含有零点的二阶降阶模型得出的近似解的精度还要略高于一阶模型的精度。

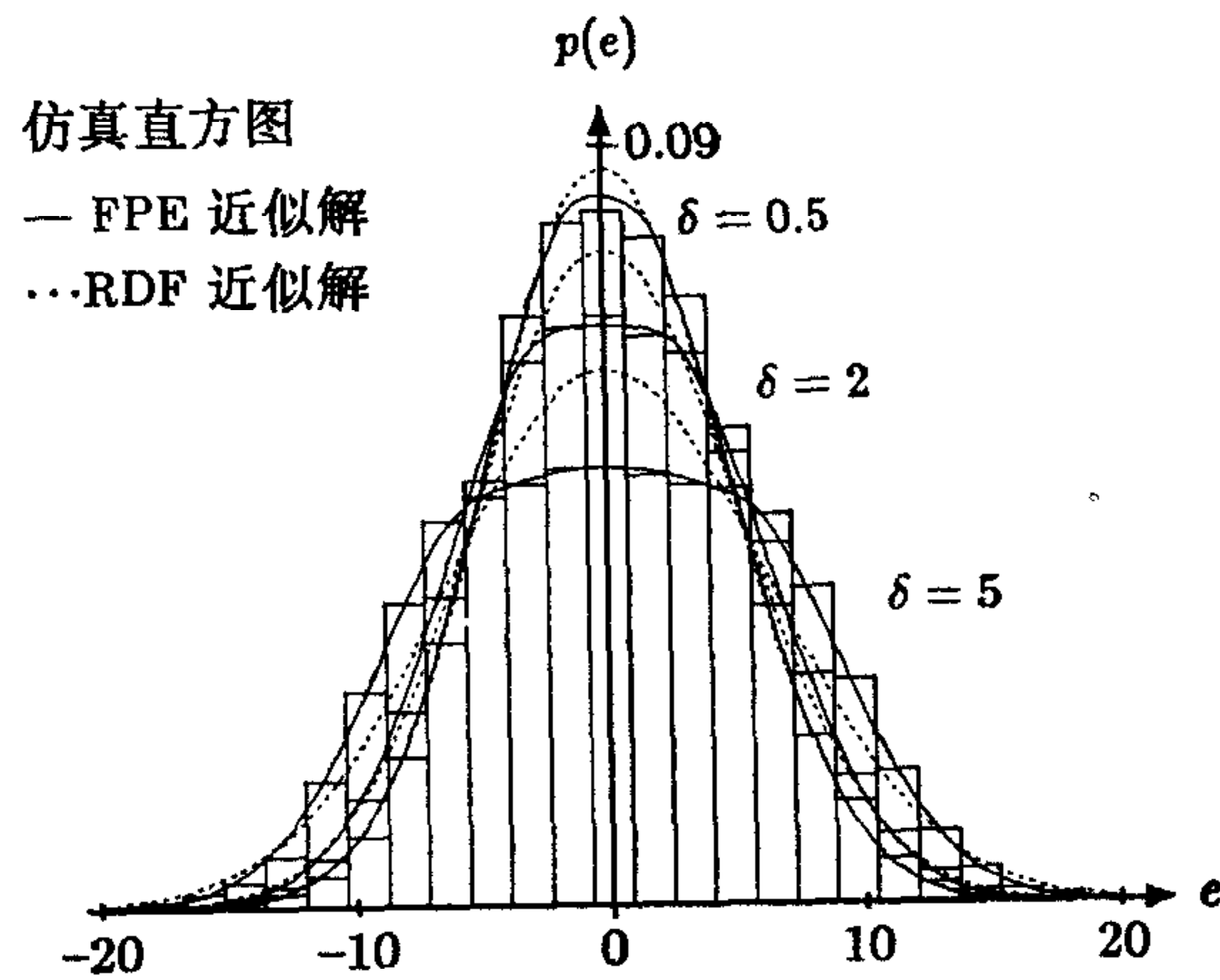
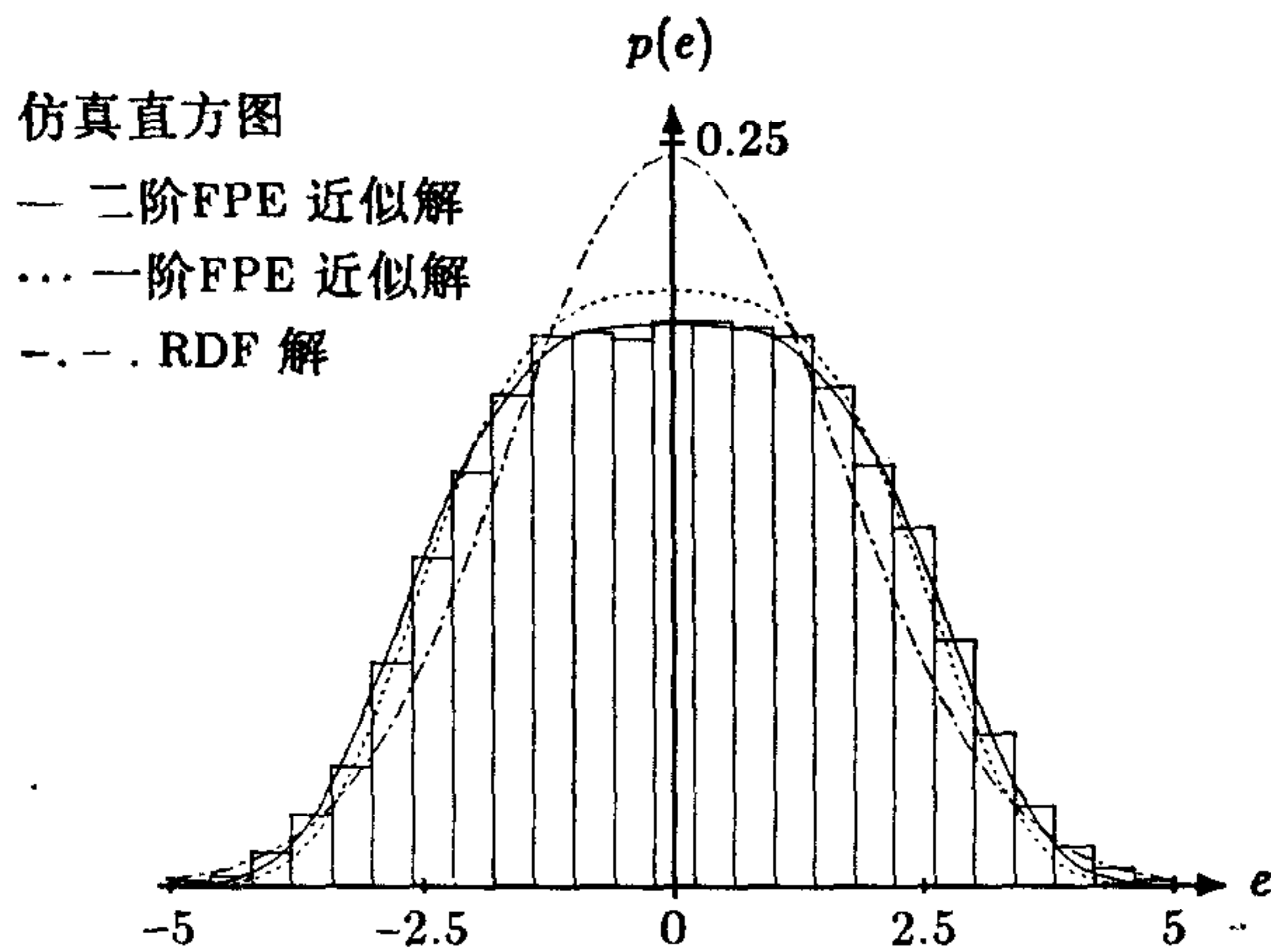
图4  $\delta$  对近似解精度的影响

图5 Fokker-Planck 方程的近似解

## 6 结论

本文给出一阶和二阶非线性反馈系统的稳态 Fokker-Planck 方程的解析解,着重探讨了非线性特性为分段线性或为给定函数时系统 Fokker-Planck 方程的解析解法,并讨论了高阶系统 Fokker-Planck 方程的近似解法,将得出的解与传统的随机描述函数方法(RDF)进行了比较。可以看出,这种近似解比 RDF 方法的精度要高,尤其在系统的非线性程度较高时这种现象更为明显。文中还讨论了在非非线性特性不是分段线性时的高阶系统 Fokker-Planck 方程的近似解法。

## 参 考 文 献

- [1] Atherton D P. Nonlinear systems engineering—Describing function analysis and design.



London: Van Nostrand Reinhold, 1975.

- [2] Fuller A T. Analysis of nonlinear stochastic systems by means of Fokker-Planck equation. *Int. J Control*, 1969, **9**(6): 603—655.
- [3] Fuller A T. Exact analysis of a first order relay control system with a white noise disturbance. *Int. J Control*, 1980, **31**(5): 841—867.
- [4] Akizuki K. Analysis of relay control systems subjected to random disturbance. *Systems Computers Controls*, 1970, **1**(4): 70—78.
- [5] Xue D, Atherton D P. An optimal model reduction algorithm for linear systems. In Proc of ACC, Boston USA, June, 1991, 2128—2129.
- [6] Xue D, Atherton D P. Simulation analysis of continuous systems driven by Gaussian white noise. *Recent Advances in Computer-aided Control Systems Engineering*, Amsterdam: Elsevier Science Publisher, 1992, 431—452.

## FOKKER-PLANCK EQUATION SOLUTIONS FOR A CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS

XUE DINGYU

(Control & Simulation Res. Centre, Northeastern Univ., Shenyang 110006)

### ABSTRACT

A class of typical feedback nonlinear systems is analysed. By this analysis, analytical solutions of the steady-state Fokker-Planck equations for first-and second-order systems can be obtained. Based on this algorithm, together with the optimal reduction technique, approximate solutions for Fokker-Planck equation of high order systems can also be obtained. The accuracy of the approximate solutions is compared with that of the traditional RDF method and satisfactory conclusions are obtained.

**Key words:** Nonlinear systems, Fokker-Planck equation, stochastic input, model reduction, optimisation method.



**薛定宇** 1963年4月生于沈阳市,分别于1985、1988和1992年在沈阳工业大学电机系、东北工学院自控系和英国 Sussex 大学工程学院获得学士、硕士和博士学位,并在 Sussex 大学工程学院从事博士后研究,现任东北大学副教授。主要研究方向:非线性系统理论与 CAD、模型降阶方法与应用、随机输入系统仿真算法研究、控制系统 CAD 软件及环境开发等。