第 22 卷 第 3 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 22, No. 3
1996 年 5 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 1996

多项式族稳定性判定问题的多项式算法

杨 青　郑应平
(中国科学院自动化所　北京　100080)

摘　　要

利用除零原则，多项式族稳定性的判定问题(系数仿射依赖于参数的情形)可以化为单参数秩 2 简单二次规划问题. 本文用二次规划的理论、Kuhn-Tucker 条件，提出了此问题的一个多项式时间算法. 可以看到许多重要的结果，如棱边定理和强 Kharitonov 定理仅是此算法的一个特例. 作为简单应用，介绍了区间多项式族 Schur 问题的一个具体算例.

关键词: 多项式族稳定性，NP-完全问题，秩 2 半正定二次规划，Kuhn-Tucker 条件.

1　引言

从 Kharitonov 的开创性工作开始[5]，多项式族稳定性的判定问题，特别是系数仿射依赖于参数的情形得到了广泛地研究. 对于一些特殊情形，人们研究得很多，也比较透彻[3,7]. 对一般的情形，棱边定理[2]完全解决了可判定性问题，但是多项式时间的算法仍然没有出现. 因此，近似算法的研究得到了重视[6]. 这个问题到底是不是 NP-完全的，也就是通常所谓的组合爆炸性问题始终困扰着人们而没有得到明确的回答.

本文利用秩 2 半正定二次规划理论，提出了一个计算复杂性约为 $O(n^5)$ 的多项式时间算法，从而比较彻底的解决这个问题. 大量的计算表明：此算法速度快，数值稳定性好. 更有意义的是：用它能够轻松证明棱边定理和强 Kharitonov 定理，并且给出强 Kharitonov 多项式.

2　预备知识

给定二次规划　(QP)：
$$\min_{x\in V} Q(x)=\frac{1}{2}x'Gx+g'x, \tag{2.1}$$
其中 $g,x\in R^n$; $G\in R^{n\times n}$ 是半正定简单对称矩阵; $V=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$.

本文于 1994 年 6 月 4 日收到.

定义 2.1. 如果 $\bar{\boldsymbol{x}}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)'$ 是 (QP) 的最优解，$A:=\{i:a_i<\bar{x}_i<b_i\}$，如果 $A=\{m_1,\ldots,m_r\}$，$G_1\in R^{r\times r}$，$(G_1)_{i,j}=(G)_{mi,mj}$，若 $G_1>0$，则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是规范最优解，$r=|A|$ 称为 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的自由度，rank(G) 称为 (QP) 的秩.

引理 2.1.

(a) (Kuhn-Tucker 条件) $\bar{\boldsymbol{x}}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)'$ 是容许解,则其为最优解当且仅当

$$\partial Q/\partial x_i|\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}\begin{cases}\geqslant 0, & \bar{x}_i=a_i,\\ =0, & a_i<\bar{x}_i<b_i,\\ \leqslant 0, & \bar{x}_i=b_i.\end{cases}\tag{2.2}$$

(b) (QP) 必存在自由度 $\leqslant$ rank(G) 的规范解.

下面考虑带参数 θ 的秩为 2 的半正定二次规划(以下简称二次规划).

$$(\mathrm{QP}(\theta)):h(\theta)=\min_{x\in V}Q_\theta(\boldsymbol{x}),\theta\in[\alpha,\beta].\tag{2.3}$$

其中 $Q_\theta(\boldsymbol{x})=\left(u_0(\theta)+\sum_{i=1}^{n}u_i(\theta)x_i\right)^2+\left(v_0(\theta)+\sum_{i=1}^{n}v_i(\theta)x_i\right)^2$，$u_i(\theta)$，$v_i(\theta)$是 $[\alpha,\beta]$ 上的光滑初等函数，$V=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,i=1,2,\cdots,n\}$.

定义 2.2. $\forall i\neq j$，i，$j=1,2,\cdots,n$，$\gamma_{ij}(\theta):=u_i(\theta)v_j(\theta)-v_i(\theta)u_j(\theta)$ 称为 $\{(\mathrm{QP}(\theta)|\theta\in[\alpha,\beta]\}$ 的特征函数;如果 $\{(\mathrm{QP}(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]\}$ 的每个特征函数不恒为零，则称此问题是正则的.

3 问题的描述及有关概念

关于 z 的次数 $\leqslant m$ 的多项式集合 $P:=\left\{p(z,\boldsymbol{x})=\sum_{i=0}^{m}(k_i'\boldsymbol{x}+q_i)z^i\,|\,\boldsymbol{x}\in V\right\}$，其中 $V=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,i=1,2,\cdots,n\}$;$k_i,\boldsymbol{x}\in R^n$;$q_i\in R,i=1,2,\cdots,n$. 不失一般性,假定 $D=\{z\in C\,|\,|z|\leqslant 1\}$，$\partial D$ 为其边界. 下面总假定存在 $\boldsymbol{x}_0\in V$，使 $p(z,\boldsymbol{x}_0)$ 是 D-稳定的,即其所有的零点都在 D 内.

定义 3.1. P 是内部 D-稳定的,如果 Int$(P)=\{p(z,\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\in\mathrm{Int}(V)\}$(Int 表示取其内部) 中的所有多项式都是 D-稳定的. 根据除零原则，P 是 D-稳定的 $\Longleftrightarrow\forall z\in\partial D$，$\forall\boldsymbol{x}\in V,p(z,\boldsymbol{x})\neq 0$

$$\Longleftrightarrow h(\theta)=\min_{x\in V}|p(e^{i\theta},\boldsymbol{x})|^2>0,\forall\theta\in[0,2\pi]\ (\text{由}\,V\,\text{的紧致性可得}).$$

展开 $Q_\theta(\boldsymbol{x}):=|p(e^{i\theta},\boldsymbol{x})|^2=\left(u_0(\theta)+\sum_{i=1}^{n}u_i(\theta)x_i\right)^2+\left(v_0(\theta)+\sum_{i=1}^{n}v_i(\theta)x_i\right)^2,\theta\in[0,2\pi]$，$P$ 是 D-稳定的等价于 $h(\theta)=\min_{x\in V}Q_\theta(\boldsymbol{x})>0$，$\forall\theta\in[0,2\pi]$.

4 基本算法

采用前面的方法及约定，将 P 的 D-稳定性判定化为带参数 θ 的二次规划问题(以下总假定问题是正则的):

$$(\mathrm{QP}(\theta)):h(\theta)=\min_{a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=1,2,\cdots,n} Q_\theta(\boldsymbol{x}). \tag{4.1}$$

其中 $Q_\theta(\boldsymbol{x})=\left(u_0(\theta)+\sum_{i=1}^n u_i(\theta)x_i\right)^2+\left(v_0(\theta)+\sum_{i=1}^n v_i(\theta)x_i\right)^2, \theta\in[0,2\pi]$. 以下总假定 $h(\theta)$ 不恒为 0. 基本算法如下：

步骤 0. $m:=1$.

步骤 1. 计算 $\gamma_{im}(\theta)=u_i(\theta)v_m(\theta)-v_i(\theta)u_m(\theta)$ $(i=1,2,\cdots,m-1,m+1,\cdots,n)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的所有实零点，从而将 $[0,2\pi]$ 作如下划分：$0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_{N_m}=2\pi$，使诸 $\gamma_{im}(\theta)$ 在任意区间 $(\theta_k,\theta_{k+1})(k=0,1,\cdots,N_{m-1})$ 上不变号.

步骤 2. $j:=0$.

步骤 2.1. 令

$$c_{ij}^+=\begin{cases} b_i, & \text{若 } \gamma_{im}(\theta) \text{ 在 } (\theta_j,\theta_{j+1}) \text{ 上为正,} \\ a_i, & \text{若 } \gamma_{im}(\theta) \text{ 在 } (\theta_j,\theta_{j+1}) \text{ 上为负,} \end{cases}$$

$$c_{ij}^-=\begin{cases} a_i, & \text{若 } \gamma_{im}(\theta) \text{ 在 } (\theta_j,\theta_{j+1}) \text{ 上为正,} \\ b_i, & \text{若 } \gamma_{im}(\theta) \text{ 在 } (\theta_j,\theta_{j+1}) \text{ 上为负,} \end{cases}$$

$i=1,2,\cdots,m-1,m+1,\cdots,n$.

步骤 2.2. 判断

$$(P_{mj}^+):\begin{cases} u_0(\theta)+\sum_{i=1}^n u_i(\theta)x_i=0, \\ v_0(\theta)+\sum_{i=1}^n v_i(\theta)x_i=0, \\ x_i=c_{ij}^+, \quad i=1,2,\cdots m-1,m+1,\cdots,n, \\ a_m\leqslant x_m\leqslant b_m, \\ \sum_{i=1}^n c_{ij}^+\gamma_{im}(\theta)+\gamma_{0m}(\theta)=0, \\ \theta_j\leqslant\theta\leqslant\theta_{j+1}. \end{cases} \tag{4.2}$$

(P_{mj}^-)：将 (P_{mj}^+) 中的上标“+”号全部换成“－”号即可　　(4.3)

（其中 $\gamma_{0m}(\theta)=u_0(\theta)v_m(\theta)-v_0(\theta)u_m(\theta)$）

是否有可行解. 若其中之一有可行解 $(\boldsymbol{x}^*,\theta^*)$，则 $p(z,\boldsymbol{x}^*)$ 是一个不稳定多项式，P 不是 D-稳定的，算法终止.

步骤 2.3. 若 $j<N_m$，则 $j:=j+1$，转 步骤 2.1.

步骤 3. 若 $m<n$，则 $m:=m+1$，转步骤 1；若 $m=n$，则 P 是内部稳定的，算法结束.

关于以上算法作如下说明：(1)对非正则情况，在步骤 2.2 中，若 $\gamma_{im}=0$，只要将 (P_{mj}^+) 和 (P_{mj}^-) 中的约束换为 $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$，其它一切不变；(2)在 步骤 2.2 中，等式约束不是满秩的；(3)以上算法只能判定内部稳定性，要判定临界稳定性，可将 V 作微小的扰动 $V_0\subset V\subset V1$ 进行分析即可.

此算法的计算复杂性主要取决于参数数目 n，但是也与如下因素有关：(1) 多项式

次数. 这反映在求函数值的运算量上，但是次数一旦固定后，此运算量是固定的，为简单起见，将此运算量定为 1. (2) ∂D 的形状. 一般只研究 ∂D 分段光滑的情形. 基本算法的计算量主要在于求解 $O(n^3)$ 个初等函数(三角函数或多项式函数)实区间上的零点集，故其计算复杂性为 $O(n^5)$. 对每个具体问题，计算量亦即问题的复杂性主要取决于其特征函数的实零点数. 在以后的分析中可以更加清晰的看到这一点，这也是称之为特征函数的原因.

5 例子——区间多项式族的 Schur 问题

令 $P=\left\{p(z,x)=\sum\limits_{i=0}^{n}x_iz^i\,|\,a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=0,1,\cdots,n\right\}, D=\{z\in C\,|\,|z|<1\}$.

P 的 D-稳定性问题称为区间多项式族的 Schur 问题，如前所述，其稳定性等价于

$$h(\theta)=\min_{a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=1,2,\cdots,n}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\cos i\theta\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\sin i\theta\right)^2>0,\ \forall\theta\in[0,\pi].$$

此问题的特征函数 $\gamma_{im}(\theta)=\cos i\theta\sin m\theta-\sin i\theta\cos m\theta=\sin(m-i)\theta$，其形式很简单，但是实零点很多，这就是区间多项式族的 Schur 问题一直难以解决的根本原因之所在，Schur 问题是典型的正则问题，因其形式特殊，可将一般算法作相应的简化.

现举一个数值例子.

$P=\left\{\sum\limits_{i=0}^{7}x_iz^i\,|\,a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=0,1,\cdots,7\right\}$，$(a_0,a_1,\cdots,a_7)=(-0.5,-2,-1,-1,-1.5,-3,0,7)$，$(b_0,b_1,\cdots,b_7)=(1,2,0.5,1,1,3,2,8)$. 用以上算法算得的第一个不稳定多项式为 $f_1(z)=7z^7+2z^6+3z^5-1.5z^4+z^3+0.5z^2-2z+0.5, f(e^{2.049j})=0$.

6 应用——棱边定理和强 Kharitonov 定理的新证明

从基本算法中易见，棱边定理只是一个简单特例而已.

下面考虑区间多项式族的左扇区稳定性问题. 令 $P=\left\{\sum\limits_{k=0}^{n}x_kz^k\,|\,a_k\leqslant x_k\leqslant b_k, k=0,1,\cdots,n\right\}$ 是关于 z 的区间多项式族，$S=\{re^{i\theta}\in C\,|\,r\in[0,+\infty),\pi-\theta_0\leqslant\theta\leqslant\pi+\theta_0\}$，其中 $\theta_0\in(0,\pi/2]$. 根据基本算法，P 的 S 域稳定性等价于

$$0<h(r)=\min_{a_k\leqslant x_k\leqslant b_k, k=0,1,\cdots,n}\left(\sum_{k=0}^{n}x_kr^k\cos k\theta_0\right)^2+\left(\sum_{k=0}^{n}x_kr^k\sin k\theta_0\right)^2,\ r\in[0,+\infty).$$

此问题的特征函数 $\gamma_{lm}(r)=r^l\cos l\theta_0\cdot r^m\sin m\theta_0-r^l\sin l\theta_0\cdot r^m\cos m\theta_0=r^{l+m}\sin(m-l)\theta_0$. 当 r 在 $[0,+\infty)$ 上变化时，$\gamma_{lm}(r)$ 不变号，因此总共只需检验 $2n$ 条边的稳定性，易证：对每条边只需检验其两个顶点即可，用此方法可以迅速给出 Kharitonov

顶点多项式，这些顶点多项式中有些是相同的，特别是对 $\theta_0 = n_i\pi/n_2$ 的情形，这正是强于 Kharitonov 定理[7]所研究的情况.

7 结论

本文采用二次规划的方法彻底解决多项式族(系数仿射依赖于参数的情形)稳定性判定的计算复杂性问题，证明了它是一个多项式问题而不是 NP-完全的，并且给出了一个多项式时间算法. 大量的计算实例表明：这个算法有很高的效率和良好的数值稳定性，在参数较多的情况下更是显出其极大的优越性. 在理论上，可以用统一而简洁的特征函数的概念和方法综合了有关这个问题的一些经典的结果. 这种方法的出现将为多项式族稳定性研究开辟一条新的道路.

附　　录

算法正确性的证明. 在此，仅给出思路，详细的证明不难由此思路得到. 仍然采用第 4 节里的记号.

对任意 $\theta\in[0,2\pi]$，若 (QP(θ)) 有秩为 2 的规范最优解，则 $h(\theta)=0$. 据假定 $h(\theta)$ 不恒为 0，若存在 $\theta_0\in[0,2\pi]$，使 $h(\theta_0)=0$，则存在 $\theta_1\in[0,2\pi]$，使 $h(\theta_1)=0$，且 (QP(θ_1)) 有秩小于 2 的规范最优解. 通过扰动分析，不妨假定此规范最优解的秩为 1. 设此解为 $x^*=(c_1,\cdots,c_{m-1},x_m^*,c_{m+1},\cdots,c_n)$，其中 $x_m^*\in(a_m,b_m)$，$c_i=a_ib_i$，$i=1,2,\cdots,m-1,m+1,\cdots,n$. 令 $t(\theta):=\gamma_{0m}(\theta)+\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq m}}^{n}\gamma_{im}(\theta)c_i$，据 Khun-Tucker 条件

$$\mathrm{Re}(\theta)u_m(\theta)+\mathrm{Im}(\theta)v_m(\theta)=0, \tag{1}$$

$$\mathrm{Re}(\theta)u_k(\theta)+\mathrm{Im}(\theta)v_k(\theta)\begin{cases}\geqslant 0, & c_k=a_k,\\ \leqslant 0, & c_k=b_k,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots,m-1,m+1,\cdots,n \tag{2}$$

从(1)式中解出 X_m^* 并代入(2)式中，

$$t(\theta)\gamma_{km}(\theta)/(u_m(\theta)^2+v_m(\theta)^2)\begin{cases}\geqslant 0, & c_k=a_k,\\ \leqslant 0, & c_k=b_k,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots,m-1,m+1,\cdots,n.$$

取 ε_1 充分小，使 $(\theta_1-\varepsilon_1,\theta_1)\subseteq(\theta_1-\varepsilon,\theta_1)$，且 $t(\theta),\gamma_{km}(\theta)$ 上不变号(恒正或恒负). 在 $(\theta_0-\varepsilon_1,\theta_0)$ 上

(1) 若 $t(\theta)>0$，此时有

$$c_k=\begin{cases}a_k; & \gamma_{km}(\theta)>0,\\ b_k, & \gamma_{km}(\theta)<0,\end{cases}$$

(4.3)形式的问题有解；

(2) 同理，若 $t(\theta)<0$，此时(4.2)形式的问题有解.

证毕.

参　考　文　献

[1] Barmish B R. A generalization of Kharitonov's four-polynomial concept for the robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations. *IEEE trans. Aut. Contr*, 1989, **34**: 157—165.

[2] Bartelett A C, Hollot C V, Lin H. Root locations for an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges. *Math. Control Signals and Systems*, 1988, **1**: 61—71.

[3] Chapellat H, Bhattacharyya. A generalization of Kharitonov's theorem robust stability of interval plants. *IEEE Trans. Aut. Contr.* 1989, **34**: 306—311.

[4] Fletcher R. A general quadratic program algorithm. *J. Inst. Maths Applics*,, 1971 **7**: 76—91.

[5] Kharitonov V L. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems. *Differenncjalnyje Uravnenenija*, 1979, **14**(11): 1483—1485.

[6] Qiu L, Davison E J. A unified approach for the stability robustness of polynomials in a convex set. *Automatica*, 1992, **28**(5): 945—959.

[7] Soh Y C, Foo Y K. Generalization of strong Kharitonov theorem to the left sector. *IEEE Trans. Automat. Contr*, 1990, **35**: 1378—1382.

A POLYNOMIAL-TIME ALGORITHM FOR THE STABILITY-ROBUSTNESS CHECKING PROBLEM OF POLYNOMIAL-FAMILIES

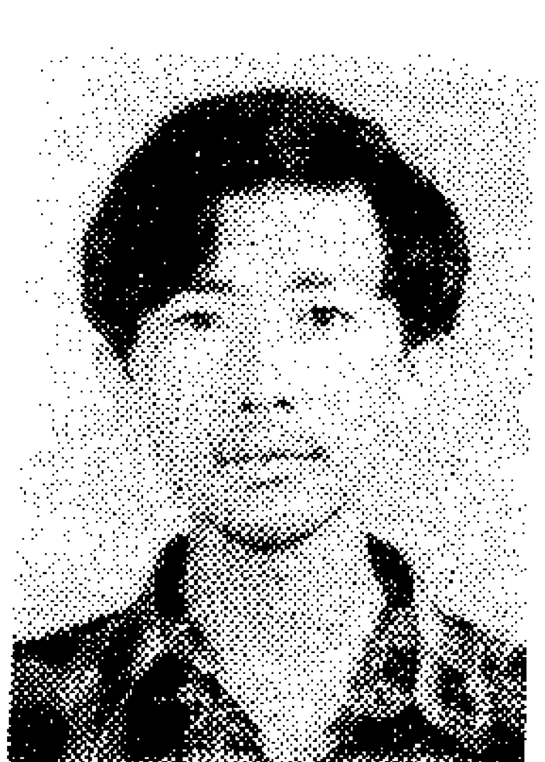
YANG QING ZHENG YINGPING

(Institute of Automation, Academia Sinica, Beijing 100080)

ABSTRACT

Consider the stability-robustness of a polynomial-family (assuming that the coefficients are affine functions of the parameters). This problem can be converted to an one-parameter simple quadratic programming (rank 2) by the zero-excluding principle. Using the theory of simple quadratic programming, the Khun-Tucker conditions and the method of perturbation analysis we derive a polynomial-time algorithm and solve the problem of computing complexity. Most of the availabe results in the literature, such as the Edge Theorem and the Extended Kharitonov's Theorem are special cases of the algorithm developed in this paper.

Key words: Stability of polynomial families, NP-complete problems, Semi-positive-definite quadratic programming of rank 2, Khun-Tucker conditions.



杨 青 1970年出生,1990年毕业于中国科技大学经济管理与系统科学系,1995年于中科院自动化所获自动控制理论与应用专业硕士学位,现在中科院自动化所模式识别实验室攻读博士学位.主要研究方向是鲁棒控制理论和计算机视觉.

郑应平 简介及照片见本刊第19卷第6期.