

# 多变量系统的仿真软件<sup>1)</sup>

高黛陵 李卫东 吴麒

(清华大学自动化系 北京 100084)

## 摘 要

控制系统仿真的核心问题是微分方程组和代数方程组的联立求解。微分方程组的数值解法很多,其中以变阶变步长 Gear 算法最适合控制系统仿真。基于 Gear 算法作者研制了面向典型元件框图和传递函数矩阵的通用仿真软件,具有友好的人机界面,功能强,使用方便,为控制系统的智能设计提供了有效工具。

**关键词:** Gear 算法,控制系统仿真,智能设计。

## 1 引言

控制系统仿真是系统分析、设计的一个重要组成部分,其核心问题是求微分方程组与代数方程组的联立数值解。微分方程组的数值解法很多,但有些解法对于控制系统仿真不甚合适。研究表明<sup>2)</sup>,单步法中以斜率投影法最适合于控制系统仿真,而多步法中以变阶变步长 Gear 算法最适合于控制系统仿真。Gear 算法是一种多步法,它在计算每一步时,充分利用了前几步的数据,所以计算量小,速度快。Gear 算法的数值稳定性好,尤其在求解病态(stiff)方程组时仍具有好的稳定性,因而特别适合于控制系统仿真。我们研制了 Gear 算法的面向框图的通用仿真软件,可适用于线性和非线性系统。具有自动起步、自动选取步长、自动抽取输出响应特征和进行成批仿真等功能,并能将传递函数矩阵描述的系统自动转换成框图进行仿真,为控制系统的智能设计<sup>1)</sup>提供了有效工具。仿真软件是在 Windows 环境下用 C 语言开发的,具有友好、美观的用户界面,是一个较好的多功能仿真软件。

## 2 Gear 算法

Gear 算法<sup>[2]</sup>是一种自起步、变阶变步长的预报校正型的多步方法。对于微分方程组

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

其预报公式为

1) 国家自然科学基金资助项目(69274014)。

2) 张阿卜. 控制系统仿真算法的若干研究及一类系统动态指标的经验公式. 清华大学硕士论文, 1981.  
本文于 1994 年 3 月 1 日收到。

$$\mathbf{z}^{(0)}(n+1) = Q\mathbf{z}(n), \quad (2)$$

校正公式为

$$\mathbf{z}^{(m+1)}(n+1) = \mathbf{z}^{(m)}(n+1) - \mathbf{l}[f(\mathbf{z}^{(m)}(n+1))], \quad (3)$$

$$\mathbf{z}(n+1) = \mathbf{z}^{(m)}(n+1). \quad (4)$$

采用 Newton 迭代可加快收敛过程, 此时校正公式为

$$\mathbf{z}^{(m+1)}(n+1) = \mathbf{z}^{(m)}(n+1) - \mathbf{l} \left[ \left( \mathbf{l}_1 \mathbf{I} - \mathbf{l}_0 h \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} f(\mathbf{z}^{(m)}(n+1)) \right]^T. \quad (5)$$

此即 stiff 稳定的算法。其中  $\mathbf{z}(n) = \left[ \mathbf{x}(n), h\mathbf{x}'(n), \frac{h^2}{2!}\mathbf{x}''(n), \dots, \frac{h^p}{p!}\mathbf{x}^{(p)}(n) \right]^T$  称为 Nordsieck 向量, 它用前一步中的高阶导数  $\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots$  来代替多步法中需要的前几步数据  $\mathbf{x}$  或  $f$ , 这使得算法能自起步, 且便于变阶变步长;  $Q$  为 Pascal 矩阵, 它的每一列均由二项式系数所组成;  $\mathbf{l}$  为常向量, 因算法不同而不同。

为比较常用的几种微分方程数值解法用于控制系统仿真时的精度和速度, 对五类不同性质的系统, 分别采用 Gear 法、四阶 Runge Kutta 法、改进的四阶 Adams 预报校正法、双边法<sup>[3]</sup>、斜率投影法<sup>[4]</sup>等几种常用算法进行仿真。这五类控制系统的特征为: 系统(1)是个线性非 stiff 系统; 系统(2)和(3)是线性 stiff 系统, 其刚性比分别为 263 和 1000; 系统(4)是含有单值型非线性环节的系统; 系统(5)是含有记忆型非线性环节的系统。仿真结果的误差和仿真时间见表 1。

表 1 六种算法对五类系统的仿真结果

算 法	系统 1		系统 2		系统 3		系统 4		系统 5	
	误差	时间	误差	时间	误差	时间	误差	时间	误差	时间
Gear/stiff	好	1.0	好	1.0	好	1.0	较好	1.0	一般	1.0
Gear/Adams	好	0.8	好	1.2	好	1.2	较好	0.8	一般	1.5
改进 4 阶 Adams	好	0.4	不稳	2.5	不稳	8.3	好	1.25	较差	3.8
Runge Kutta	很好	0.5	不稳	4.0	不稳	11.1	好	1.0	较差	6.3
双边法	好	0.3	不稳	3.9	不稳	15.8	好	0.9	差	2.9
斜率投影法	较好	4.0	较好	2.6	较好	1.6	较差	1.3	较差	4.0

注. 仿真时间是以 Gear 的 stiff 稳定算法的仿真时间作为 1。

从表 1 可得到如下结论:

(1) Gear 算法对 stiff 系统、非 stiff 系统和含非线性环节的系统都有很好的数值稳定性, 且其精度比较好。这是因为在计算的每一步都对误差进行校验, 当误差不合格时自动调整步长或阶次, 保证了算法的数值稳定性和精度。而其他几种算法则常不能兼顾二者。

(2) Gear 算法对非 stiff 系统效果很好, 对 stiff 系统最有效。这是由于采用变阶变步长技术, 在保证精度的前提下在仿真的不同阶段采用不同的步长和阶次, 使仿真效率提高。



(3) 对含有记忆型非线性环节的系统及数值解的导数不连续的系统, 用 Gear 算法比其它算法更有效和可靠。

另外, Gear 算法对初始步长的选取并不严格, 初始步长只影响起步的快慢, 不影响仿真结果的可靠。因此, 虽然对于特定的某一对象, 其优越性也许并不明显, 但作为一个面向多种类型对象的通用仿真程序, 采用 Gear 算法是最合适的。

### 3 智能型仿真软件 EXACT 的主要功能

EXACT 是采用 Gear 算法编制的面向框图的通用仿真软件, 其主要功能如下所述。

#### 3.1 面向框图仿真

当系统以典型框构成的框图描述时, 直接输入该系统的各个典型框类型、参数及它们的连接关系即可对该系统进行仿真。这样一种面向框图的输入方式有很多优点: 直观, 输入简单, 便于研究某些环节参数变化时对系统性能的影响, 便于对控制器参数进行优化选择, 以及便于研究非线性因素对系统动态性能的影响等。EXACT 使用的典型框如表 2 和表 3 所示。

表 2 典型线性框

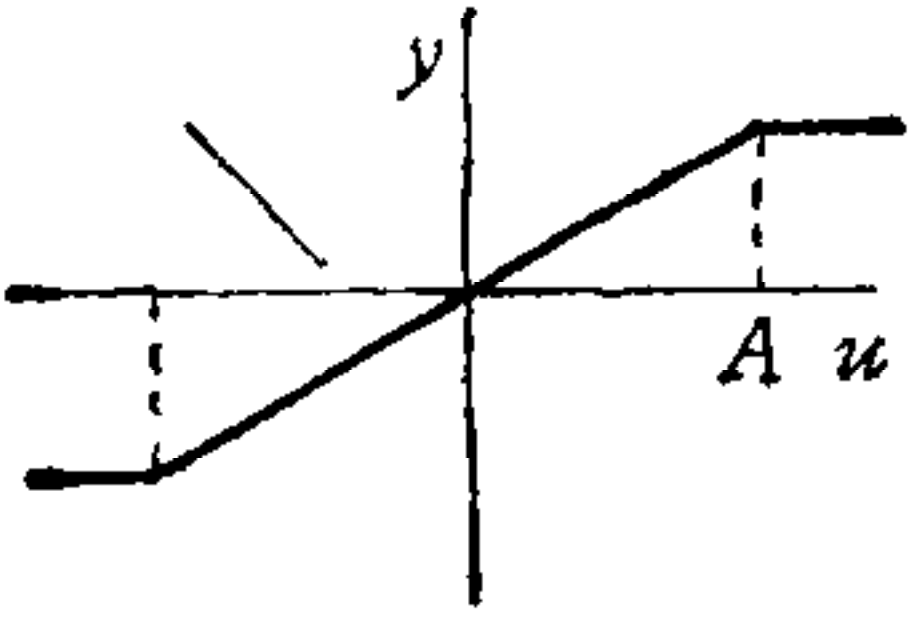
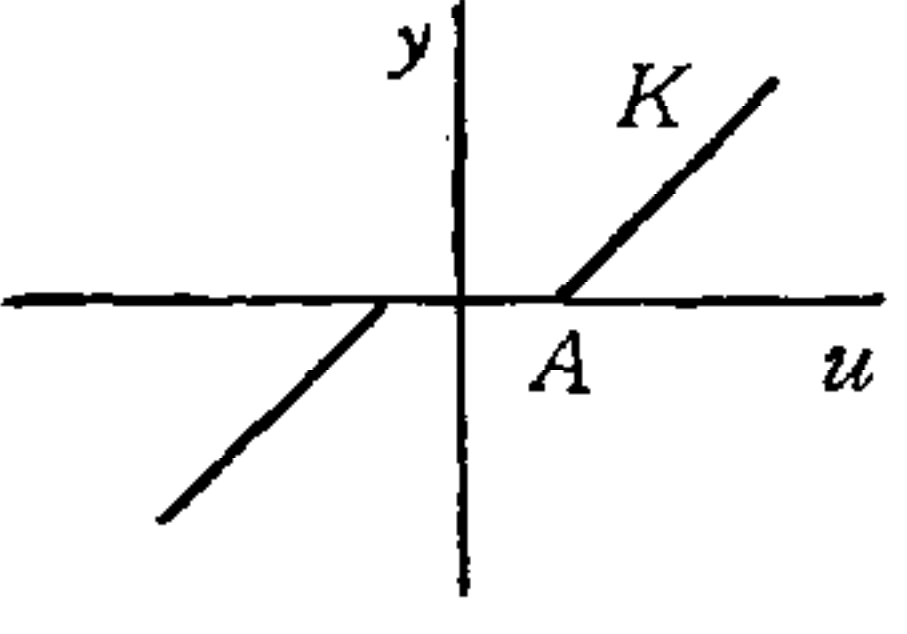
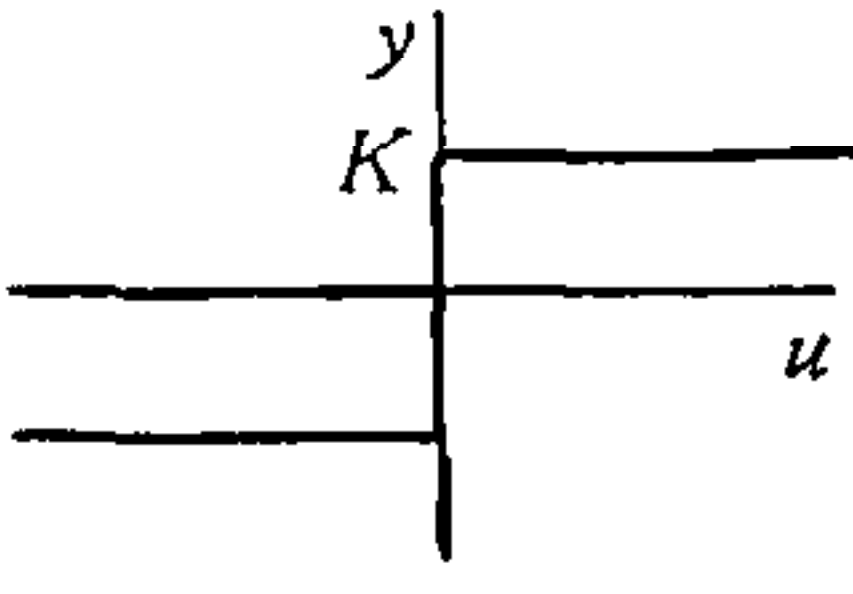
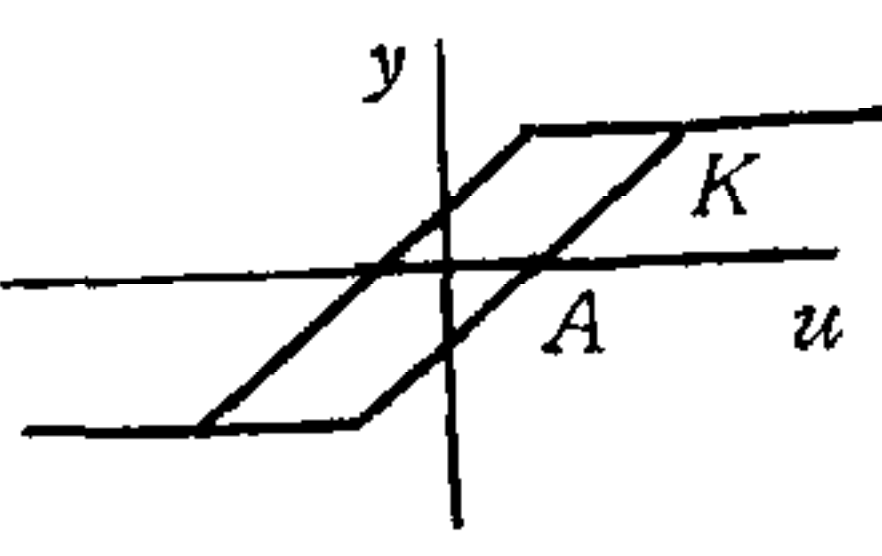
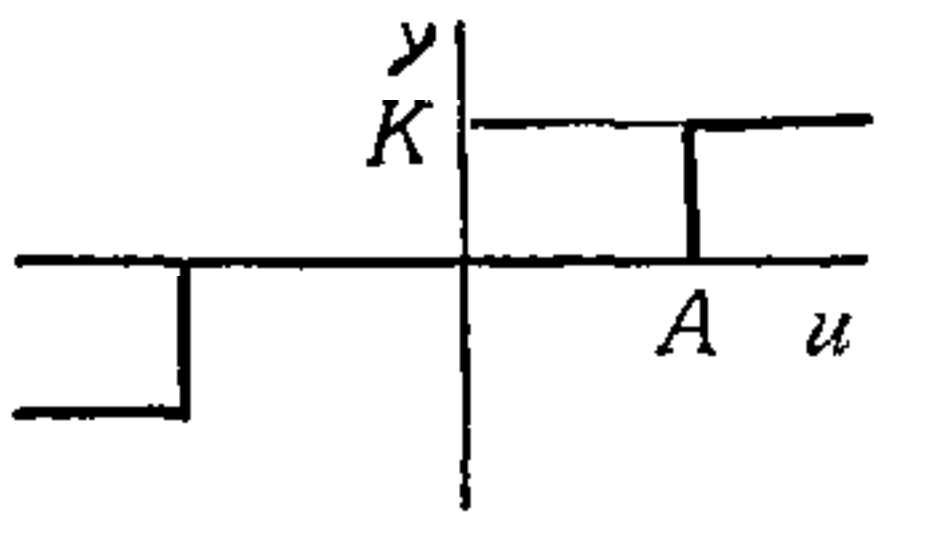
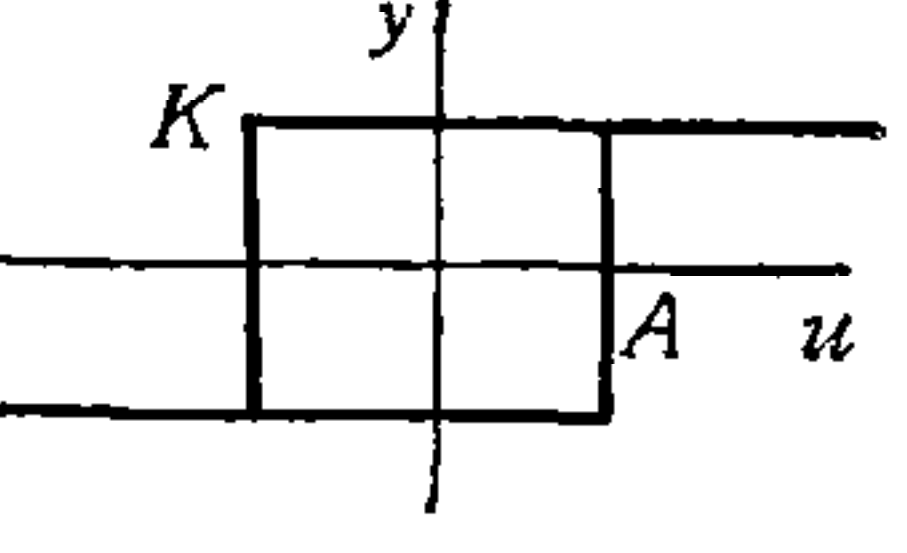
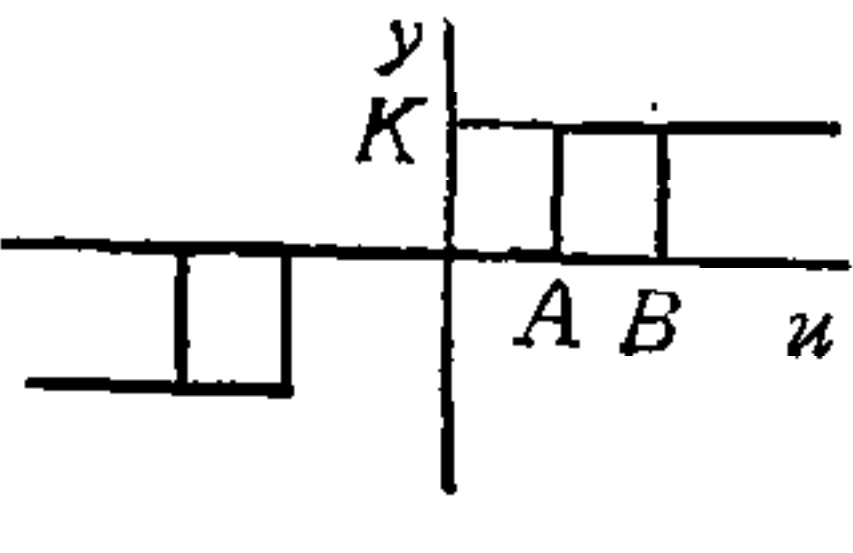
线性框类型	传递函数	状态方程和输出方程
积 分	$\frac{K}{s}$	$\begin{cases} \dot{x} = Ku \\ y = x \end{cases}$
惯 性	$\frac{K}{s + A}$	$\begin{cases} \dot{x} = -Ax + Ku \\ y = x \end{cases}$
比例积分	$\frac{K(s + A)}{s}$	$\begin{cases} \dot{x} = KA u \\ y = x + Ku \end{cases}$
比例惯性	$\frac{K(s + B)}{s + A}$	$\begin{cases} \dot{x} = -Ax + Ku \\ y = (B - A)x + Ku \end{cases}$
二阶振荡 1	$\frac{K}{s^2 + As + B}$	$\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = -By - Az + Ku \end{cases}$
二阶振荡 2	$\frac{Ks + 1}{s^2 + As + B}$	$\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = -By - Az + (1 - KA)u \end{cases}$
比 例	$K$	$y = Ku$
加 法		$y = \alpha u_1 + \beta u_2$

各框的类型、参数和结构用全屏幕编辑输入, 可方便地增删和修改, 所有框的类型都在屏上显示, 并有该类型各参数的含义的提示说明, 如图 1 所示。

#### 3.2 面向传递函数矩阵仿真

EXACT 提供了把传递函数矩阵描述的系统自动转换为典型框结构, 再进行仿真的服务。

表 3 典型非线性框

框类型	输入输出特性	框类型	输入输出特性
饱和		死区	
继电器开关		滞环	
死区继电器		滞环继电器	
死区滞环继电器		乘法	$y = Ku_1u_2$
正弦函数	$y = K\sin(Au + B)$	指数函数	$y = Ku^A$

在如图 2 所示的多变量系统中  $K_c, K_p, G(s)$  均为传递函数矩阵,  $x_1, x_2, x_3$  为向量,  $u, y$  分别为输入和输出向量。用户在输入各传递函数矩阵后可如下键入系统的组成和结构:

$$\begin{aligned}x_1 &= u - y, \\x_2 &= K_c * x_1, \\x_3 &= K_p * x_2, \\y &= G * x_3.\end{aligned}$$

然后加入外输入信号即可进行仿真。这给用户减少了不必要的负担。

### 3.3 自动选取输出步长和步数

Gear 算法的计算步长是由算法程序根据要求的计算精度自动控制的。但计算结果的输出步长和步数则由用户根据响应过程的长短来选择。若用户缺乏经验, EXACT 可以自动为用户选取输出步长和步数,使既可观测到瞬态响应的必要细节,又能保证在系统达到稳态后适时结束仿真。

### 3.4 自动抽取输出响应特征

为便于分析评价系统响应的质量和为系统智能设计提供更多的信息, EXACT 可以从仿真数据中自动抽取以下动态指标和误差积分指标: 超调量 ( $O_{max}$ )、过渡过程时间 ( $T_s$ )、上升时间 ( $T_r$ )、延迟时间 ( $T_d$ )、峰值时间 ( $T_p$ )、振荡周期 (Period)、绝对误



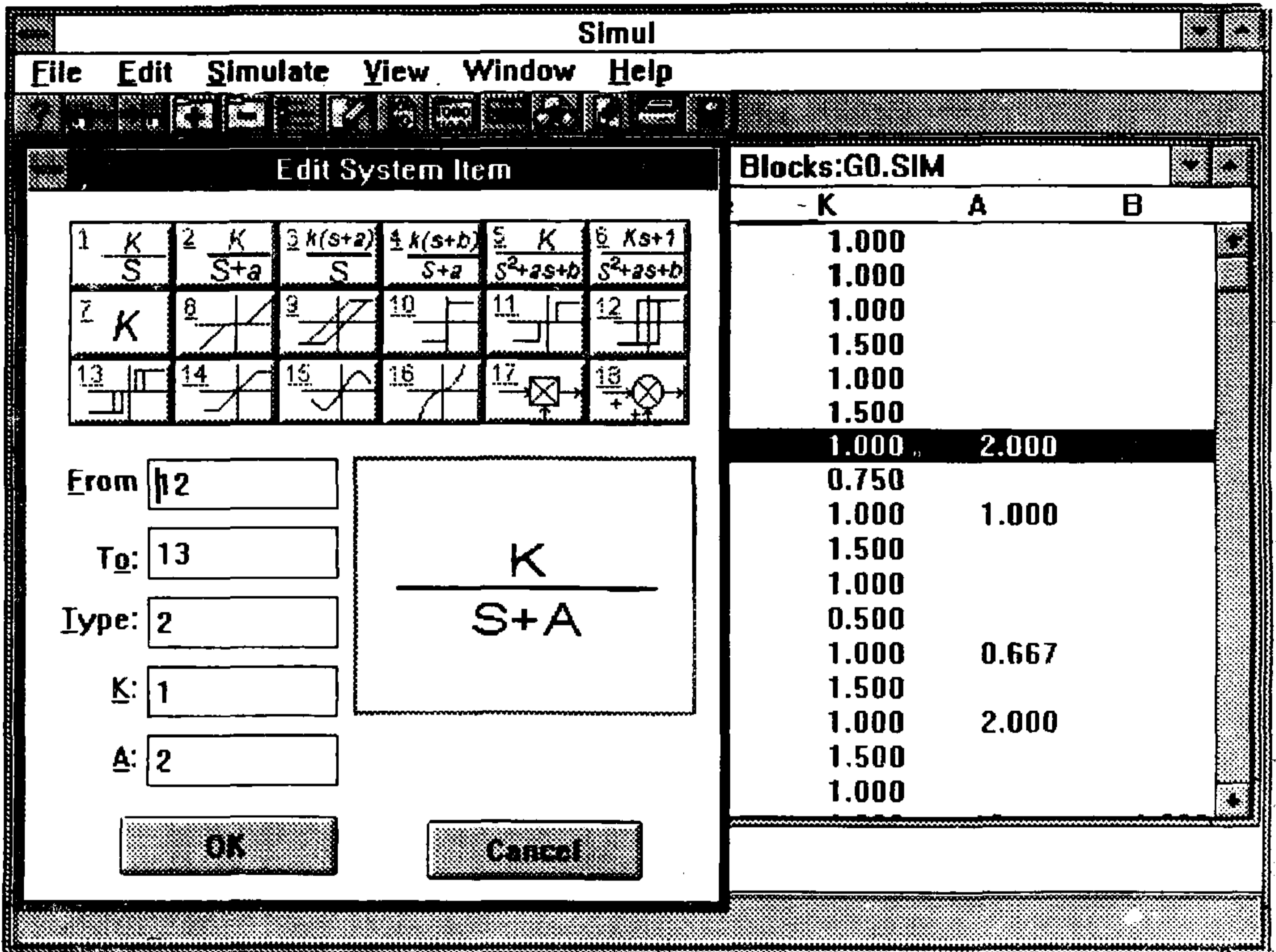


图1 EXACT 的输入界面

差时间积分 (ITAE)、绝对误差积分 (IAE)、误差平方积分 (ISE) 和误差平方时间积分 (ITSE)。这些特征或指标可根据用户的要求选择显示和取用。

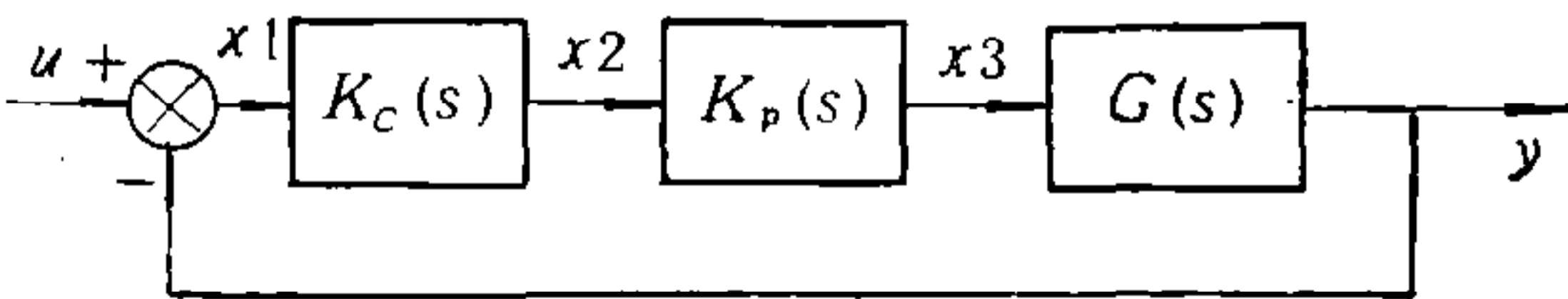


图2 多变量系统的矩阵结构

为研究参数变化对系统性能的影响或对控制器参数进行优化，常需要多次修改某些环节的参数，反复进行仿真，为此提供成批仿真功能。用户可输入一个典型线性环节各参数的若干离散值或变化范围和步长，程序就自动代入各参数进行成批仿真，并抽取输出响应特征。用户可根据这些特征挑选合适的系统进行详细分析和智能设计。

### 3.6 提供多种外输入信号

为研究不同类型的控制系统，EXACT 提供了多种类型的外输入信号供用户选择：1) 阶跃信号；2) 斜坡信号；3) 正弦信号；4) 脉冲信号。

## 4 仿真实例

对通用仿真软件 EXACT 进行了改进，得到满意的效果。下面举两个例子。

### 3.5 成批仿真

为研究参数变化对系统性能的影响或对控制器参数进行优化，常需要多次修改某些环节的参数，反复进行仿真，为此提供成批仿真功能。

例 1. 框图如图 3 所示, 其开环传递函数为

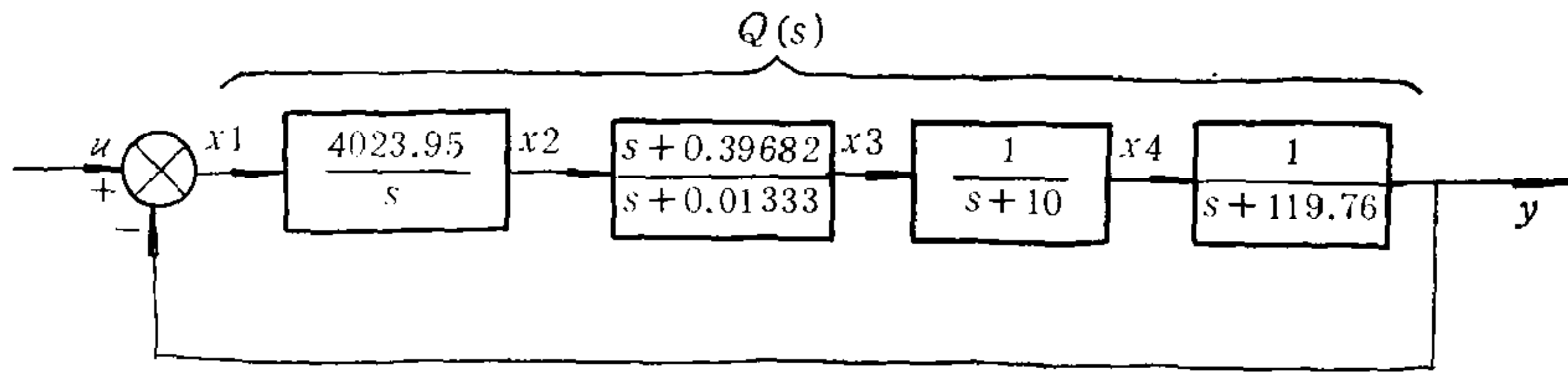


图 3 单变量系统的仿真框图

$$Q(s) = \frac{4023.95(s + 0.39682)}{s(s + 0.01333)(s + 10)(s + 119.76)}$$

选取仿真输出步长=0.05, 输出步数=200, 误差控制量= $10^{-4}$ . 闭环系统单位阶跃响应的仿真结果如图 4, 结果与精确解的最大误差为  $3 \cdot 10^{-4}$ .

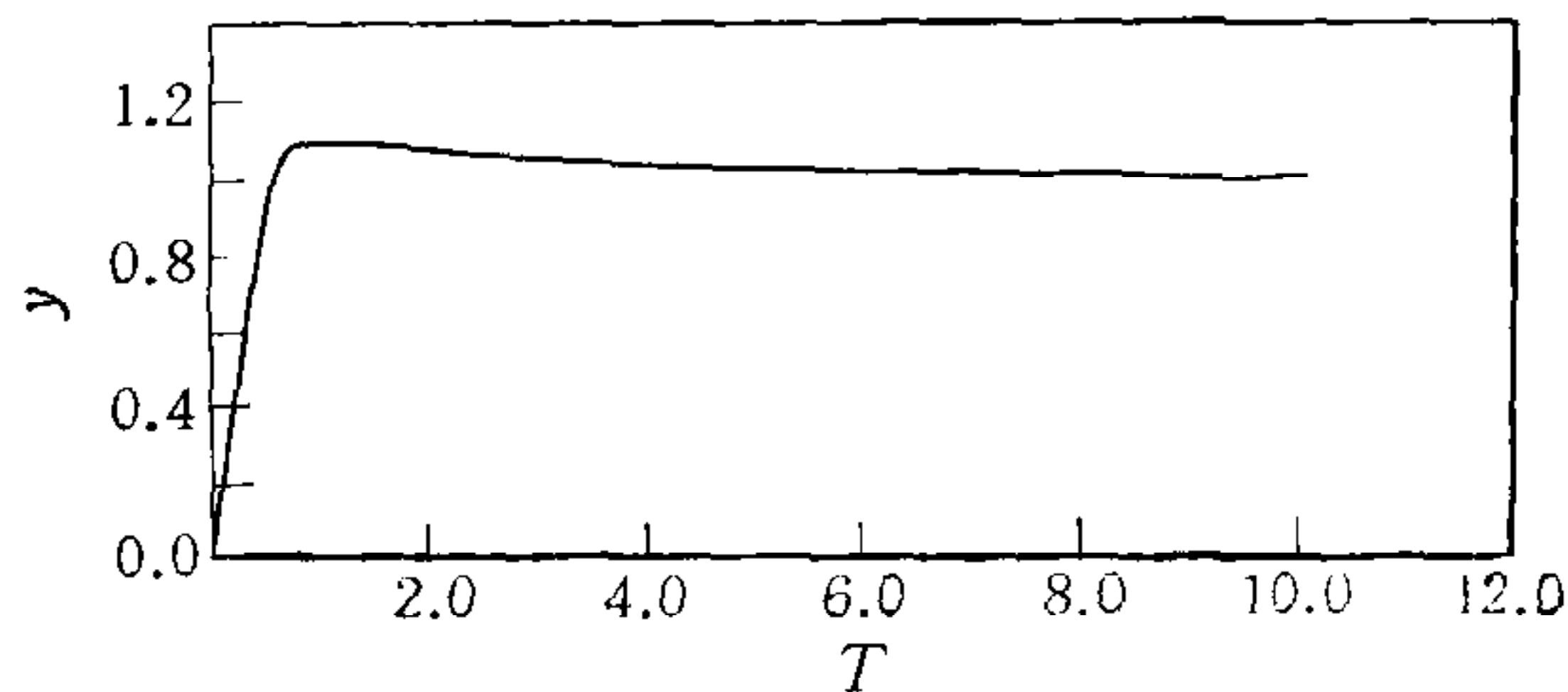


图 4 单变量系统仿真结果

例 2. 多变量系统的矩阵结构如图 2. 其中

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s} & \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{0.5s+1} & \frac{2}{s} & \frac{1}{0.5s+1} \\ 0 & \frac{1}{1.5s+1} & \frac{2}{s} \end{bmatrix};$$

$$K_p(s) = \begin{bmatrix} 1 & -0.504 & -0.587 \\ -0.0465 & 1 & -0.0465 \\ -0.0156 & -0.335 & 1 \end{bmatrix};$$

$$K_c(s) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{200(s+5)}{s+25} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

输入矩阵  $G(s)$ ,  $K_p(s)$ ,  $K_c(s)$  及其连接关系后, 由 EXACT 自动转化为框图结构. 阶跃信号加于第一个通道上, 求出三个通道的阶跃响应, 如图 5 所示.

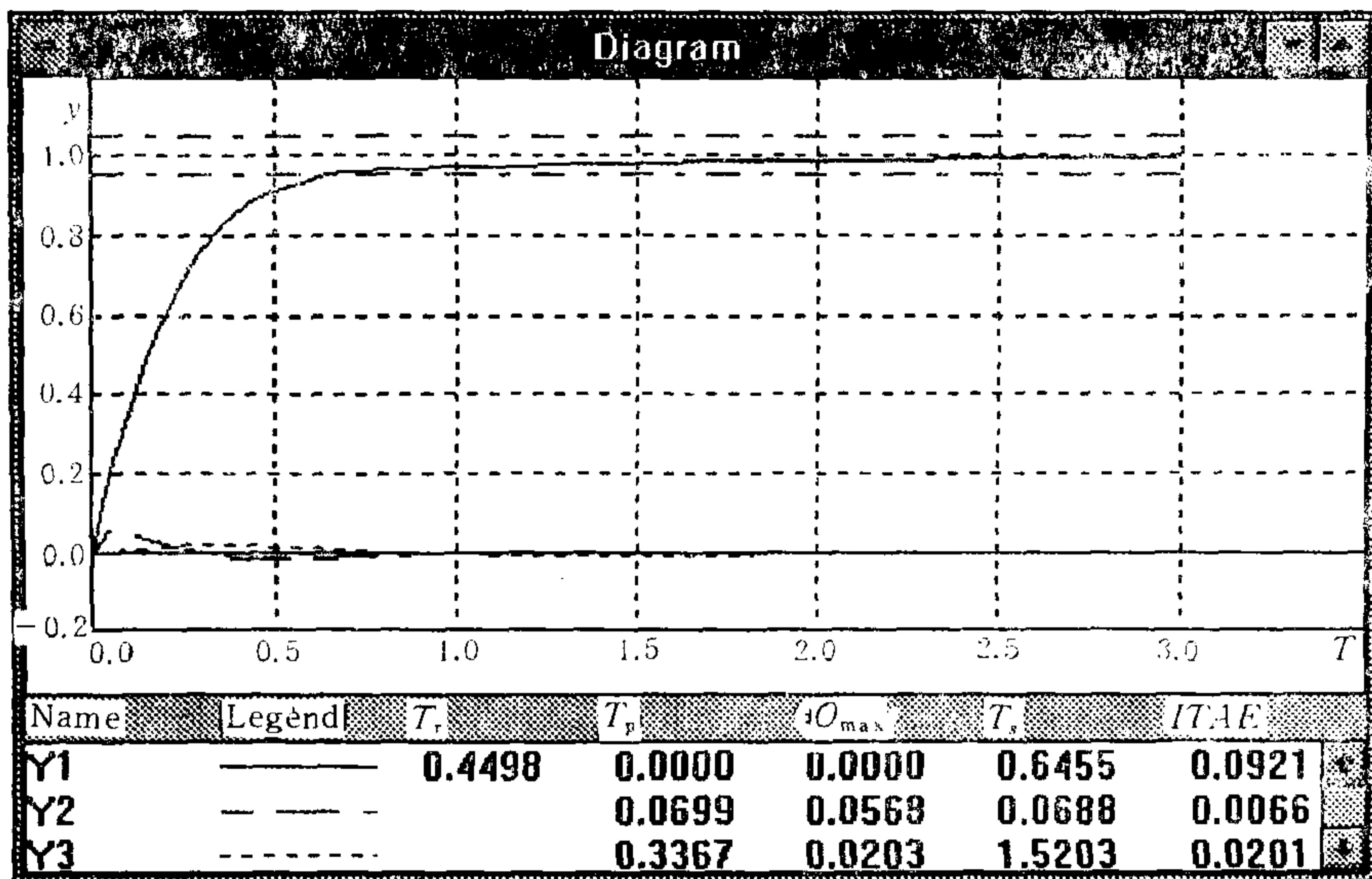


图5 多变量系统仿真结果

## 参 考 文 献

- [1] 吴麒,高黛陵,毛剑琴. 论控制系统的智能设计. 控制理论与应用,1993,10: 241—249.
- [2] Gear G W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1971.
- [3] 官锡芳. 常微分方程的一个积分方法. 应用数学与计算数学,1965,2(3): 205—210.
- [4] Eveleigh V W. 控制系统设计入门. 蔡海涛译,湖南科学技术出版社,1981.



## INTELLIGENT SIMULATION SOFTWARE BASED ON GEAR'S ALGORITHM

GAO DAILING    LI WEIDONG    WU QI

(*Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084*)

### ABSTRACT

The kernal problem of control system simulation is the simultaneous solution of a set of differential and algebraic equations. There exist quite a few methods for the numerical solution of differential equations. Among them the Gear's algorithm with variable order and variable step-length is most suitable for control system simulation. The authors have developed a general-purpose intelligent simulation software which is based on the Gear's algorithm and is oriented to block diagram of typical elements and transfer function matrices. The software is highly effective, convenient and user-friendly. It is a useful tool for the intelligent design of control systems.

**Key words:** Gear's algorithm, control system simulation, intelligent design.

**高黛陵** 简介及照片见本刊第 20 卷第 3 期。

**李卫东** 1968 年生。1990 年毕业于清华大学自动化系,现为该系博士研究生。目前主要研究方向为多变量控制系统的智能设计。



**吴 麒** 简介及照片见本刊第 17 卷第 1 期。