

广义不确定线性系统的稳定化 控制器设计¹⁾

温香彩 刘永清

(华南理工大学自动化系 广州 510641)

摘 要

利用变结构控制方法,在一定条件下,对广义不确定线性系统设计了一种鲁棒控制器,其设计过程简单,所得控制易于实现.最后,以例子说明了设计过程及所建立方法的有效性.

关键词: 广义不确定线性系统,变结构控制,切换函数,动态补偿器,强能控.

1 引言

迄今为止,对广义控制系统的研究,几乎都假定系统有确定的结构和已知的参数^[1-3]而在实际中遇到的系统不可避免地要受到各种各样随机因素和系统未建模部分的影响,因此,对广义不确定控制系统进行研究是非常有必要的.

原则上,不确定系统的控制器问题是用一个确定的控制器去控制一簇系统,而不论这些系统的参数如何选取,在此固定控制器的作用下,系统皆可正常工作.要做到这一点是非常困难的.对正常控制系统(即由常微分方程描述的系统),已有很多文献研究了其鲁棒控制器设计问题^[4-6]而对广义控制系统,很少有文章论及.这是因为广义系统的解与控制及不确定项的导数有关^[1],在进行控制器设计时,不仅要考虑系统的鲁棒性,而且还要考虑系统的正则性与脉冲现象.1990年文献[7]在利用传统的状态反馈设计方法,首次对广义不确定系统的鲁棒控制器设计问题进行了研究,但给出的设计过程较复杂.本文利用变结构控制思想,建立了新的设计方法,不需经过任何线性变换,直接从原系统本身进行设计.整个设计过程简单,所得控制易于实现.

2 问题的描述

考虑由方程

$$E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + Df(t) \quad (1)$$

描述的广义不确定线性系统的鲁棒稳定化变结构控制器设计问题.这里 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ 分别为系统的状态向量和控制向量; $\dot{x}(t)$ 为状态 $x(t)$ 对时间 t 的导数; $E, A \in$

1) 国家教委高校博士点基金资助项目.
本文于1993年9月28日收到.

$R^{n \times n}$ 和 $B \in R^{n \times m}$ 为定常矩阵, E 奇异(即 $\text{rank} E = r < n$); $\Delta A \in R^{n \times n}$, $\Delta B \in R^{n \times m}$ 和 $D \in R^{n \times l}$ 为系统的不确定矩阵; $f(t) \in R^l$ 为系统的外部扰动.

方程(1)的理想系统为

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (2)$$

假设

$$\Delta A \in U_A(\alpha) = \{\Delta A \in R^{n \times n}, \|\Delta A\| \leq \alpha\},$$

$$\Delta B \in U_B(\beta) = \{\Delta B \in R^{n \times m}, \|\Delta B\| \leq \beta\},$$

$$D \in U_D(\gamma) = \{D \in R^{n \times l}, \|D\| \leq \gamma\}.$$

这里 $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ 为常数; $\|\cdot\|$ 为诱导范数, 即对一矩阵 U , $\|U\| = (\sigma_{\max}(U^T U))^{1/2}$, σ_{\max} 表示矩阵的最大奇异值.

为了保证系统(1)有唯一解, 假定对任意 $\Delta A \in U_A(\alpha)$, $\Delta B \in U_B(\beta)$ 及 $D \in U_D(\gamma)$ (1)式皆是正则的(即 $\det(\lambda E - A - \Delta A) \neq 0$). 文中 $\sigma(E, A)$ 表示集合 $\{\lambda \mid |\lambda E - A| = 0\}$, 即

$$\sigma(E, A) = \{\lambda \mid |\lambda E - A| = 0\}.$$

向量范数为欧几里德范数, 矩阵范数为诱导范数.

本文的目的是设计变结构控制

$$u = \begin{cases} u^+ & s > 0, \\ u^- & s < 0, \end{cases} \quad (3)$$

使得式(1)和(3)构成的闭环系统对任意 $\Delta A \in U_A(\alpha), \Delta B \in U_B(\beta), D \in U_D(\gamma)$ 皆在最小范数意义下稳定.

3 综合设计

利用变结构方法进行控制器设计可分为两步: 第一步, 设计切换函数, 使系统在切换面上的滑动模运动稳定; 第二步, 设计变结构控制, 使系统在此控制的作用下, 从切换面外向切换面运动, 并在有限时间内到达它, 实现滑动模运动. 下面分别设计.

第一步. 设计切换函数, 使系统在切换面上的滑动模运动稳定.

假定切换函数为

$$\left. \begin{aligned} s &= CEx + z, \\ z' &= Hx + Mz. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

这里 C , H 和 M 为待定的相容维数的常矩阵. s 沿着系统(1)的轨道对时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} s' &= CEx' + z' \\ &= C(Ax + Bu + \Delta Ax + \Delta Bu + Df) + Hx + Mz \\ &= (CA + H)x + CBu + C\Delta Ax + C\Delta Bu + CDf + Mz. \end{aligned}$$

若 $\det(CB) \neq 0$, 则由 $s' = 0$, 得等效控制

$$u_{eq} = -(CB)^{-1}[(CA + H)x + C\Delta Ax + C\Delta Bu + CDf + Mz],$$

滑动模运动方程为

$$\begin{aligned} E\dot{x}' &= [A - B(CB)^{-1}(CA + H)]x + (I - B(CB)^{-1}C)\Delta Ax \\ &\quad + [I - B(CB)^{-1}C]\Delta Bu_{eq} + (I - B(CB)^{-1}C)Df - B(CB)^{-1}Mz, \end{aligned}$$

$$\mathbf{s} = 0.$$

显然, 滑动模运动对不确定项不变的充要条件

$$\left. \begin{aligned} \Delta A &= B(CB)^{-1}C\Delta A, \Delta B = B(CB)^{-1}C\Delta B, \\ D &= B(CB)^{-1}CD. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

易验证, 条件(5)等价于

$$\text{rank } B = \text{rank}(B, \Delta A) = \text{rank}(B, \Delta B) = \text{rank}(B, D). \quad (6)$$

式(6)称为完全匹配条件. 在此条件下, 由上面的讨论知, 对任意满足条件 $\det(CB) \neq 0$ 的矩阵 C , 滑动模运动方程为

$$\begin{aligned} E\mathbf{x}' &= [A - B(CB)^{-1}(CA + H)]\mathbf{x} - B(CB)^{-1}M\mathbf{z}, \\ \mathbf{s} &= 0. \end{aligned}$$

若 (E, A, B) 强能控, 则 (E, A, B) 脉冲能控. 由文献[3]知, 存在矩阵 K , 使得

$$\begin{aligned} \deg[\det(\lambda E - A + BK)] &= \text{rank } E, \\ \sigma(E, A - BK) &= \{\lambda | \text{Re } \lambda < 0\}. \end{aligned}$$

在式(4)中选取 H, M 满足

$$CA + H = CBK, M = 0. \quad (7)$$

则在切换面 $\mathbf{s} = 0$ 上, 滑动模运动稳定.

注 1. 在匹配条件(6)下, 由于 C 的选取具有很大的灵活性(只要满足 $\det(CB) \neq 0$ 即可), 可以适当选取 C , 使 H 具有较简单的结构.

第二步. 设计变结构控制 \mathbf{u} .

对 $\Delta B \equiv 0$ 和 $\Delta B \neq 0$ 两种情况, 分别有以下定理.

定理 1. 对广义不确定系统(1)、切换函数(4)和(7)式, 在匹配条件(6)之下, 若 $\Delta B \equiv 0$, 则存在变结构控制:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} -(CB)^{-1}[(CA + H)\mathbf{x} + (\varepsilon + \alpha_1\|\mathbf{x}\| + \beta_1\|\mathbf{f}\|)\bar{\mathbf{a}}], & \mathbf{s} > 0, \\ -(CB)^{-1}[(CA + H)\mathbf{x} - (\varepsilon + \alpha_1\|\mathbf{x}\| + \beta_1\|\mathbf{f}\|)\bar{\mathbf{a}}], & \mathbf{s} < 0, \end{cases} \quad (8)$$

使式(1)的闭环系统在有限时间内实现滑动模运动. 这里, $\alpha_1 = \|C\|\alpha, \beta_1 = \|C\|\gamma, \varepsilon > 0$ 为任意常数, $\bar{\mathbf{a}} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T \in R^m$

证明. 取 Lyapunov 函数为 $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$, 则沿着式(1)和(8)组成的闭环系统的解的

轨道, V 对时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} V' &= \mathbf{s}^T \mathbf{s}' = \mathbf{s}^T (CA\mathbf{x} + CB\mathbf{u} + CD\mathbf{f} + C\Delta A\mathbf{x} + H\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{s}^T [(CA + H)\mathbf{x} + CD\mathbf{f} + C\Delta A\mathbf{x} - (CA + H)\mathbf{x} \\ &\quad - (\varepsilon + \alpha_1\|\mathbf{x}\| + \beta_1\|\mathbf{f}\|)\text{sgn}\mathbf{s}] \\ &= -\mathbf{s}^T [(\varepsilon + \alpha_1\|\mathbf{x}\| + \beta_1\|\mathbf{f}\|)\text{sgn}\mathbf{s} + CD\mathbf{f} + C\Delta A\mathbf{x}] \\ &\leq -(\varepsilon + \alpha_1\|\mathbf{x}\| + \beta_1\|\mathbf{f}\|)\|\mathbf{s}\| + \|\mathbf{s}\|[\|CD\mathbf{f}\| + \|C\Delta A\mathbf{x}\|] \\ &\leq -(\varepsilon + \alpha_1\|\mathbf{x}\| + \beta_1\|\mathbf{f}\|)\|\mathbf{s}\| + \|\mathbf{s}\|(\alpha_1\|\mathbf{x}\| + \beta_1\|\mathbf{f}\|) \\ &\leq -\varepsilon\|\mathbf{s}\|. \end{aligned}$$

对 $\mathbf{s} \neq 0, V' < 0$, 即控制(8)可把系统(1)“拉”到 $\mathbf{s} = 0$ 上.

下面考虑到达时间 t_h . 不失一般性, 假设初始时间为 $t_0 = 0$, 初始状态为 x_0 则由

$$\mathbf{s}^T \mathbf{s}' \leq -\varepsilon \mathbf{s}^T \text{sgns}$$

得 t_h 满足

$$t_h \leq (\|\mathbf{s}(x_0)\|) / \varepsilon_0. \quad \text{证毕.}$$

定理 2. 对系统(1), 切换函数(4)和(7)式, 如果匹配条件(6)成立, ΔB 满足

$$\|C\Delta B(CB)^{-1}\| < \rho < \frac{1}{2},$$

则可设计变结构控制 u 为

$$\mathbf{u} = \begin{cases} -(CB)^{-1}[(CA + H)\mathbf{x} + 2(\varepsilon + \alpha_2\|\mathbf{x}\| + \beta_2\|\mathbf{f}\|)\bar{\mathbf{a}}], & s > 0, \\ -(CB)^{-1}[(CA + H)\mathbf{x} - 2(\varepsilon + \alpha_2\|\mathbf{x}\| + \beta_2\|\mathbf{f}\|)\bar{\mathbf{a}}], & s < 0. \end{cases} \quad (9)$$

在此控制作用下, 系统(1)在切换面 $\mathbf{s} = 0$ 外的运动可在有限时间 $t_h \leq \|\mathbf{s}(t_0)\| / \varepsilon$ 内到达

$\mathbf{s} = 0$, 实现滑动模运动. 这里 $\alpha_2 = \|C\|\alpha + \frac{1}{2}\|CA + H\|$, $\beta_2 = \|C\|\gamma$.

证明. 仍取 Lyapunov 函数为 $V = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T \mathbf{s}$, 则 V 沿着式(1)和(9)组成的闭环系统的

解的轨道对时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} V' &= \mathbf{s}^T \{C\mathbf{A}\mathbf{x} + C\Delta\mathbf{A}\mathbf{x} + C\Delta B[-(CB)^{-1}((CA + H)\mathbf{x} \\ &\quad + 2(\varepsilon + \alpha_2\|\mathbf{x}\| + \beta_2\|\mathbf{f}\|)\text{sgns}] + C\mathbf{D}\mathbf{f} + H\mathbf{x} \\ &\quad - (CA + H)\mathbf{x} - 2(\varepsilon + \alpha_2\|\mathbf{x}\| + \beta_2\|\mathbf{f}\|)\text{sgns}\} \\ &= \mathbf{s}^T \{-2(\varepsilon + \alpha_2\|\mathbf{x}\| + \beta_2\|\mathbf{f}\|)\text{sgns} + C\Delta\mathbf{A}\mathbf{x} + C\mathbf{D}\mathbf{f} \\ &\quad - C\Delta B(CB)^{-1}(CA + H)\mathbf{x} - 2C\Delta B(CB)^{-1}(\varepsilon + \alpha_2\|\mathbf{x}\| \\ &\quad + \beta_2\|\mathbf{f}\|)\text{sgns}\} \\ &= -2(\varepsilon + \alpha_2\|\mathbf{x}\| + \beta_2\|\mathbf{f}\|)\mathbf{s}^T \text{sgns} + \mathbf{s}^T (C\Delta\mathbf{A}\mathbf{x} + C\mathbf{D}\mathbf{f} \\ &\quad - C\Delta B(CB)^{-1}(CA + H)\mathbf{x}) - 2\mathbf{s}^T C\Delta B(CB)^{-1}(\varepsilon + \alpha_2\|\mathbf{x}\| \\ &\quad + \beta_2\|\mathbf{f}\|)\text{sgns} \\ &\leq -2(\varepsilon + \alpha_2\|\mathbf{x}\| + \beta_2\|\mathbf{f}\|)\mathbf{s}^T \text{sgns} + \|\mathbf{s}\|[\alpha_2\|\mathbf{x}\| + \beta_2\|\mathbf{f}\|] \\ &\quad + \|\mathbf{s}\|(\varepsilon + \alpha_2\|\mathbf{x}\| + \beta_2\|\mathbf{f}\|) \\ &= -\varepsilon \mathbf{s}^T \text{sgns}. \end{aligned}$$

下面的证明同定理 1. (略)

证毕.

如果 $\Delta A = \Delta B = 0$, 则可设计控制

$$\mathbf{u} = \begin{cases} -(CB)^{-1}[(CA + H)\mathbf{x} + \bar{\mathbf{s}} + \bar{\mathbf{G}}], & s > 0, \\ -(CB)^{-1}[(CA + H)\mathbf{x} - \bar{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{G}}], & s < 0. \end{cases} \quad (10)$$

这里 $\bar{\mathbf{s}} = (\varepsilon\varepsilon\cdots\varepsilon)^T \in R^m$; $\bar{\mathbf{G}} = (g_1 g_2 \cdots g_m)^T$; $G = \text{diag}\{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$; $C\mathbf{D}\mathbf{f} = (f_1 \cdots f_m)^T$; $g_i > \|f_i\|$.

事实上, 在控制(10)的作用下

$$\begin{aligned} \mathbf{s}' &= C\mathbf{E}\mathbf{x}' + \mathbf{z}' \\ &= C\mathbf{A}\mathbf{x} + H\mathbf{x} - (CA + H)\mathbf{x} - \varepsilon \text{sgns} - G\text{sgns} + C\mathbf{D}\mathbf{f} \\ &= -\varepsilon \text{sgns} - G\text{sgns} + C\mathbf{D}\mathbf{f}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}^T \mathbf{s}' &= -\varepsilon \mathbf{s}^T \operatorname{sgn} \mathbf{s} - G \mathbf{s}^T \operatorname{sgn} \mathbf{s} + \mathbf{s}^T C D \mathbf{f} \\
&\leq -\varepsilon \mathbf{s}^T \operatorname{sgn} \mathbf{s} - \left(\sum_{i=1}^m g_i |s_i| - \sum_{i=1}^m \|f_i\| \|s_i\| \right) \\
&= -\varepsilon \mathbf{s}^T \operatorname{sgn} \mathbf{s} - \sum_{i=1}^m (g_i - \|f_i\|) |s_i| \\
&\leq -\varepsilon \mathbf{s}^T \operatorname{sgn} \mathbf{s}.
\end{aligned}$$

故由定理 1 的证明知, 控制(10)可使式(1)的闭环系统在切换面 $\mathbf{s}=0$ 外的运动, 在有限时间内到达 $\mathbf{s}=0$, 实现滑动模运动. 总之, 可得结论

对系统(1), 如果 (E, A, B) 强能控; ΔA , ΔB 和 D 满足完全匹配条件(6), 则总可设计切换函数(4)和控制 \mathbf{u}

- 1) $\Delta B = 0$ 时, \mathbf{u} 取式(8);
- 2) $\|C \Delta B (CB)^{-1}\| < \rho < \frac{1}{2}$ 时, \mathbf{u} 取式(9);
- 3) $\Delta A = \Delta B = 0$ 时, \mathbf{u} 取式(10).

使系统(1)在控制 \mathbf{u} 的作用下, 闭环系统在最小范数意义下稳定.

4 例子

考虑如下广义不确定系统:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}' &= \begin{pmatrix} 1 + \Delta A_1 & \Delta A_2 & \Delta A_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta A_1 & \Delta A_2 & 1 + \Delta A_3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 + \Delta B_1 \\ 0 \\ 1 + \Delta B_1 \end{pmatrix} \mathbf{u} \\
&\quad + \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \\ D_1 \end{pmatrix} \mathbf{f}, \tag{11}
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\Delta A &= \begin{pmatrix} \Delta A_1 & \Delta A_2 & \Delta A_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta A_1 & \Delta A_2 & \Delta A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\Delta A_1 \quad \Delta A_2 \quad \Delta A_3), \\
\Delta B &= \begin{pmatrix} \Delta B \\ 0 \\ \Delta B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta B_1, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} D_1.
\end{aligned}$$

假定 $\|(\Delta A_1 \Delta A_2 \Delta A_3)\| \leq \frac{1}{2}$, $|\Delta B_1| < \frac{1}{4}$, $|D_1| < \frac{1}{2}$. 由 $\Delta A, \Delta B, D$ 的表达式知

$$\text{rank } B = \text{rank}(B, \Delta A) = \text{rank}(B, \Delta B) = \text{rank}(B, D) = 1,$$

$$\text{rank}(E, B) = 3, \text{rank}(\lambda E - A, B) = 3,$$

即 (E, A, B) 强能控. 取 $C = (100) \in R^{1 \times 3}, H = (3 \ -1 \ -2)$, 则 $\sigma(E, A - B(CB)^{-1}(CA + H)) = \{-1, -1\}$, 且

$$\deg \det(\lambda E - A + B(CB)^{-1}(CA + H)) = 2 = \text{rank } E.$$

设计切换函数 s 为

$$s = x_1 + z,$$

$$z' = (3 \ -1 \ -2)x, \quad x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T;$$

控制 u 为

$$u = \begin{cases} (-4 \ 1 \ 2)x - 2(\varepsilon + \|x\| + |f(t)|), & s > 0, \\ (-4 \ 1 \ 2)x, & s = 0, \\ (-4 \ 1 \ 2)x + 2(\varepsilon + \|x\| + |f(t)|), & s < 0. \end{cases}$$

则在此控制作用下, 系统(11)的闭环系统为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \Delta \bar{A}x + \Delta B_1 u + D_1 f - 2(\varepsilon + \|x\| + |f(t)|) \text{sgn } s \\ 0 \\ \Delta \bar{A}x + \Delta B_1 u + D_1 f - 2(\varepsilon + \|x\| + \|f(t)\|) \text{sgn } s \end{pmatrix}.$$

这里 $\Delta \bar{A} = (\Delta A_1 \ \Delta A_2 \ \Delta A_3) \in R^{1 \times 3}$.

在 $s = 0$ 上, 闭环系统的特征根为 $\{-1, -1\}$, 故渐近稳定. 在 $s \neq 0$ 时,

$ss' \leq -\varepsilon |s| < 0$, 从而 $s \rightarrow 0$, 故系统(11)的闭环系统在最小范数意义下稳定.

5 结束语

本文所研究的不确定广义线性系统的鲁棒控制器设计问题, 从原系统出发, 不需经过任何线性变换, 即可设计出系统的变结构控制器. 设计过程简单, 控制易于实现. 所举例子说明该方法的可行性.

参 考 文 献

- [1] Campbell S L. Singular systems of differential equations II. New York: Pittman, 1982.
- [2] Cobb J. Controllability, observability and duality in singular systems, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1984, **AC-29**(12):1076-1082.
- [3] Dai L. Singular control systems. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [4] Barmish B R. Stabilization of uncertain system via linear control. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1983, **AC-28**(8):848-851.
- [5] Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear system. *Sys. Contr. Lett.*, 1987, **8**(3): 351-359.
- [6] Qu Z H, Dorsey J. Robust control of generalized dynamic systems without the matching condition *Trans. of ASME*, 1991, **113**: 582-589.
- [7] 王朝珠, 戴立意, 贾新春. 一类广义不确定线性系统稳定控制. *控制理论与应用*, 1990, **7**(2): 18-25.
- [8] 高为炳. 变结构控制理论基础. 北京: 中国科学技术出版社, 1990.

CONTROLLER DESIGN OF STABILIZATION FOR SINGULAR UNCERTAIN LINEAR SYSTEMS

WEN XIANGCAI LIU YONGQING

(Department of Automation, South China University of Technology, Guangzhou 510641)

ABSTRACT

In this paper, a novel robust controller for singular uncertain linear systems is given under some conditions by employing variable structure control strategy. The design procedure presented is straight forward and the control can be easily realized. At last, an example is given to illustrate the procedure and the effectiveness of the of algorithm.

Key words: Singular uncertain linear systems, variable structure control, switching function, dynamic compensator, strongly controllable.



温香彩 1964年生, 1989年在西北大学获理学硕士学位、现为华南理工大学无线电系博士后。曾获广东省大学生科技成果一等奖及全国第三届“挑战杯”三等奖。目前研究兴趣为广义系统的鲁棒控制及智能控制。



刘永清 1930年生, 教授, 任《控制理论与应用》、《控制与决策》、《微分方程年刊》等国内期刊及法国 AMSE 《建模、仿真与控制》等的编委。目前研究兴趣为广义系统、分布参数系统及测度脉冲大系统的稳定与镇定。