研究简报

含观测器的非线性控制系统的实用稳定性

胡　刚
（广东工学院基础部　广州　510090）

关键词：观测器，实用稳定性，偏差区域，Schwarz 不等式.

1　引言

文[1]明确地提出了实用稳定性的概念. 由于实用稳定性的现实意义，许多学者对它的理论及应用进行了大量的研究工作，例如，A. N. Michel 等从 60 年代末以来，对有限时间区间上的实用稳定性和大系统的实用稳定性等进行了广泛的研究. 近年来我国学者贺建勋研究了不连续系统的实用稳定性，加拿大学者刘新智研究了带脉冲效应的控制系统的实用稳定性[2]. 本文对一类含观测器的控制系统作一些探讨.

2　概念和引理

记
$$L_2^l(0,T)=\left\{f:(0,\infty)\to R^l \,\middle|\, \int_0^T |f(t)|^2 dt<\infty\right\},$$
$$L_{2e}^l=\{f:(0,\infty)\to R^l \mid f\in L_2^l(0,T), T \text{ 为任意大于 0 的数}\},$$
其中
$$\|f\|_2=\left[\int_0^T |f(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$
进一步，令
$$L_{\sigma,2}^l=\left\{f\in L_{2e}^l \,\middle|\, \int_0^\infty |f(t)|^2\cdot e^{2\sigma t}dt<\infty\right\},\quad \|f\|_{\sigma,2}=\left[\int_0^\infty |f(t)|^2 e^{2\sigma t}dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

考虑具有下列形式的非线性控制系统：
$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)+B(u),\ x(0)=x_0,\\ y=C(x,u),\\ u=L(r-y),\end{cases}\tag{1}$$
其中 $x\in R^n$，$f:R^n\to R^n$ 是满足 Lipschitz 条件的连续状态函数，$B:R^m\to R^n$ 是满足 $|B(u)|\leqslant K_B\cdot\|u\|$ 的连续控制函数，$C:R^{n\times m}\to R^l$ 为连续的输出函数，且 $C(0,0)=0$；观测函数 $L:L_{2e}^l\to L_{2e}^m$，外部输入变量 $r\in L_2^l\triangleq L_2^l(0,\infty)$. 对于给定的 $P=(x_0,r)\in X=$

本文于 1993 年 5 月 21 日收到

$R^n \times L_2^l$,假定控制系统(1)有唯一的解 $(x(t,P),\ u(t,P))$. 值得指出的是，对控制系统(1)，$u = L(r - y)$ 中的观测函数L可以用微分方程或时滞微分方程，偏微分方程，Volterra 积分方程等来描述. 显然,控制变量可以通过控制外部输入 r 来实现.

在分析上述控制系统时,还需要用到下列无控制项的状态方程:

$$\dot{x} = f(x),\ x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

这里,假定系统(2)的解 $\phi(t,x_0)$ 满足：存在常数 $K > 0, C > 0$，当 $t > 0$ 时，对任意 $x_0 \in R^n$，$|x_0| < A$,有 $|\phi(t,x_0)| \leqslant K \cdot A \cdot e^{-ct}$.
约定当 $P \in X$时，$\|P\| \triangleq |x_0| + \|r\|_2$; 当 $P \in X_\sigma \subset R^n \times L_{\sigma,2}^l$ 时,$\|P\|_\sigma \triangleq |x_0| + \|r\|_{\sigma,2}$.

设 $T(i)$ 表示系统(1)的初始时刻集，$t_0 \in T(i), t_0 \geqslant 0; T = [t_0, \tau]$，其中 τ 可以为有限数,也可以为$+\infty$,此时，$T = [t_0, +\infty]$; 并规定初始偏差区域和随后偏差区域分别为

$$S_\alpha = \{P \mid P \in X, \|P\| < \alpha \text{ 或 } \|P\|_\sigma < \alpha, \alpha \text{ 为常数}\},$$
$$S_\beta = \{x \mid x \in R^n, |x(t,P)| < \beta, t \in T, \beta \text{ 为常数}\}.$$

定义 2.1. 如果当 $P \in S_\alpha$ 时,对所有 $t \in T$，$x(t,P) \in S_\beta$，则称系统 (1) 是实用稳定的.

定义 2.2. 如果对任意的 $t_0 \in T(i)$,当 $P \in S_\alpha$ 时,恒有 $x(t,P) \in S_\beta$, 则称系统(1)是实用一致稳定的.

定义 2.3. 如果系统(1)是实用稳定的,且存在常数 $a > 0$，$b > 0$，有$|x(t,P)| < ae^{-bt} (t \in T)$,则称系统(1)是 E-实用稳定的.

引理. 对系统(2),必存在一个 Lyapunov 函数 $V(x): R^n \to R^+$,满足

1）对任意 $x \in R^n$,有 $V(x) \geqslant |x|, V(0) = 0$;

2）存在 $L > 0$,当 $x, \bar{x} \in R^n$ 时，$|V(x) - V(\bar{x})| \leqslant L|x - \bar{x}|$;

3）对任意 $x \in R^n$，$\dot{V}_{(2)} \leqslant -q\subset V(x)$，其中常数 $q \in (0,1)$，$\dot{V}_{(2)}(x)$是V关于x的 Dini 导数.

引理的证明见文[3].

3 主要定理

定理 3.1. 如果当 $P \in S_\alpha$ 时,系统(1)满足不等式

$$\int_0^t e^{-qc(t-s)} \cdot |u(S,\ P)| dS < \frac{\beta - L\alpha}{LK_B},$$

则系统(1)是实用稳定的.

证明. 由引理,存在一个 Lyapunov 函数 $V(x)$ 及常数 $L > 0, q \in (0,1)$，对方程

$$\dot{x} = f(x) + B(u), \tag{3}$$

有

$$\dot{V}_{(3)}(x) \leqslant \dot{V}_{(2)}(x) + L|B(u)| \leqslant -q(V(x) + LK_B\|u\|.$$

考虑比较系统

$$\dot{W} = -qCW + LK_B\|u\|, W(0) = V(x_0).$$

注意到

$$|x(t,P)| \leqslant V(x(t,P)) \leqslant W(t),$$

根据比较原理[4]及引理，必存在

$$\begin{aligned}|x(t, P)| &\leqslant V(x_0)e^{-qct} + \int_0^t e^{-qc(t-s)} \cdot L \cdot K_B \cdot |u(S,P)|dS \\ &\leqslant L \cdot |x_0| + L \cdot K_B\int_0^t e^{-qc(t-s)} \cdot |u(S,P)|dS \\ &< L \cdot \alpha + L \cdot K_B \cdot (\beta - L \cdot \alpha)/(L \cdot K_B) = \beta,\end{aligned}$$

其中 $t \in T$，故系统(1)是实用稳定的.

定理 3.2. 若当 $P \in S_\alpha$ 时，系统(1)满足不等式

$$\|u(t,P)\|_2 \leqslant \sqrt{2qC}(\beta - L \cdot \alpha)/(L \cdot K_B),$$

则系统(1)是实用稳定的.

定理 3.3. 如果对任意 $t_0 \in T(i)$，当所有 $P \in X$时，有

$$\|u(t,P)\|_2 \leqslant M\|P\|,$$

其中 $M = \sqrt{2qC}(\beta - L \cdot \alpha)/(L \cdot \alpha \cdot K_B)$，则系统(1)是实用一致稳定的.

定理 3.4. 如果存在 $a > 0$ 及 $M > 0$，当 $P \in Z_\sigma$ 时，有

$$\|u(t,P)\|_\sigma \leqslant M\|P\|_\sigma (M \text{ 含义同上}),$$

则系统(1)是 E-实用稳定的.

上述定理的证明参照定理 3.1 的证明过程，并利用 Schwarz 不等式及相关比较原理可证.

参 考 文 献

[1] Lasalle J P and Lefschetz S. Stability by lyapunov's direct method with applications. New York, Academic Press, 1961.

[2] Liu Xinzhi. practical stabilization of control systems with impulse effects. *Journal of Math. Analysis and Applications*, 1992, **166** (2):563—576.

[3] Yoshizwa J. Stability theory by lyapunov's second method. Math Soc. Japan, 1966, 94—96.

[4] Miller R K and Michel A N. Ordinary differential equations. New York, Academic Press,1975.

THE PRACTICAL STABILITY FOR NONLINEAR CONTROL SYSTEMS WITH OBSERVERS

HU GANG

(*Guangdong Institute of Technology*, *Guangzhou* 510090)

Key words: Observers, practical stability, deviation region, Schwarz inequality.