第22卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 22, No. 2
1996 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　March, 1996

短 文

多状态系统的性能可靠性

张际良
（南京航空航天大学动力工程系　南京　210016）

摘　　要

工程中的许多系统要求系统性能参数在规定范围内. 该文研究了这种多状态系统的结构和性能可靠性，利用定义出的路和割的新概念，求得系统可靠性的若干界，最后讨论了系统可靠性计算.

关键词： 多状态系统，性能可靠性，计算

1　引言

实际工程问题中常要求系统的性能参数在规定的范围内，过高或过低的系统状态（如温度、压力、位置、流量、功率等）都是不允许的. 当以系统和单元的性能参数大小为其状态来建立多状态系统模型时，不能利用现有的多状态关联系统理论. 本文注意到结构函数的单调性，根据此类系统允许状态有上限的特点，研究其性能可靠性.

2　系统结构

单元集 $C=\{1,2,\cdots,n\}$，单元 $i\in C$ 的状态集 $S_i=\{a_{i0},a_{i1},\cdots,a_{im_i}\}$，规定 $a_{i0}\leqslant a_{i1}\leqslant\cdots\leqslant a_{im_i}$；表示单元 i 状态的随机变量为 X_i，它的取值记为 $x_i\in S_i$；表示单元状态的随机向量为 $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,X_n)$，它的取值为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$；系统状态集 $E=\{a_0,a_1,\cdots,a_m\}$，规定 $a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_m, a_0<a_m, \boldsymbol{x}_{\min}=(a_{10},\cdots,a_{n0}), \boldsymbol{x}_{\max}=(a_{1m_1},\cdots,a_{nm_n})$；$\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{x}$，当且仅当 $\forall i\in C$，有 $y_i\leqslant x_i$；$y<x$，当且仅当 $\forall i\in C$，有 $y_i\leqslant x_i$，且 $\exists j\in C$，使 $y_j<x_j$；$\phi: S=S_1\times S_2\times\cdots\times S_n\to E$.

以下讨论的多状态系统满足三个条件：1）$\phi(\boldsymbol{x}_{\min})=a_0, \phi(\boldsymbol{x}_{\max})=a_m$；2）$\phi(\boldsymbol{x})$单调非减；3）$\exists 0\leqslant k\leqslant l\leqslant M$，使 $a_k\leqslant\phi(\boldsymbol{x})\leqslant a_l\Longleftrightarrow$系统正常工作. 由条件3）知，系统可靠度可定义为 $h=P(a_k\leqslant\phi(\boldsymbol{x})\leqslant a_l)$. 许多实际系统可归纳成这种多状态系统.

因为 $\phi(\boldsymbol{X})$单调非减，故多状态关联系统结构理论中的一些定义、性质和定理依然成

本文于1993年2月23日收到

立。

定义 1. 1)系统为串联结构，当且仅当 $\phi(\boldsymbol{X})=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} g_i(X_i)$; 2)系统为并联结构，当且仅当 $\phi(\boldsymbol{X})=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} g_i(x_i)$; 3)系统为和联结构，当且仅当 $\phi(\boldsymbol{X})=\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x_i)$. 其中 $g_i(x_i)$ 是单调递增函数[3]。

路和割的定义与多状态关联系统不同。

定义 2. 若 $\boldsymbol{y}$ 使 $a_k\leqslant\phi(\boldsymbol{y})\leqslant a_l$，且 $\forall\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\in S$，有 $\phi(\boldsymbol{x})<a_k$，则称 $\boldsymbol{y}$ 为最小下路向量；若 $\boldsymbol{z}$ 使 $a_k\leqslant\phi(\boldsymbol{z})\leqslant a_l$，且 $\forall\boldsymbol{x}>\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\in S$，有 $\phi(\boldsymbol{x})>a_l$，则称 $\boldsymbol{z}$，为最小上路向量；若进一步有 $\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{z}$，则称 $\{\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$ 为最小路向量对，简称最小路。

记系统有 s 个不同的最小路，分别为 $\{\boldsymbol{x}(P_1^1),\boldsymbol{x}(P_2^1)\},\cdots,\{\boldsymbol{x}(P_1^s),\boldsymbol{x}(P_2^s)\}$，第 j 个最小路结构函数记为

$$p^j(\boldsymbol{x})=I_{\{\boldsymbol{x}(P_1^j)\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{x}(P_2^j)\}}=\prod_{i=1}^{n} I_{\{x_i(P_1^j)\leqslant x_i\leqslant x_i(P_2^j)\}},$$

其中 $\boldsymbol{x}(P_1^3)=(x_1(P_1^j),\cdots,x_n(P_1^j))$ 为最小下路，$\boldsymbol{x}(P_2^j)=(x_1(P_2^j),\cdots,x_n(P_2^j))$ 为最小上路。

定义 3. 若 $\boldsymbol{x}$ 使 $\phi(\boldsymbol{x})<a_k$，且 $\forall\boldsymbol{y}>\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S$，有 $\phi(\boldsymbol{y})\geqslant a_k$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为最小下割向量，简称最小下割。

记系统有 t_1 个最小下割，分别为 $\boldsymbol{x}(C_1^1),\cdots,\boldsymbol{x}(C_1^{t_1})$，第 j 个最小下割结构函数记为

$$\kappa_1^j(\boldsymbol{x})=I_{\{\boldsymbol{x}\nleqslant\boldsymbol{x}(C_1^j)\}}=1-\prod_{i=1}^{n} I_{\{x_i\leqslant x_i(C_1^j)\}},$$

其中 $\boldsymbol{x}(C_1^j)=(x_1(C_1^j),\cdots,x_n(C_1^j))$。

定义 4. 若向量 $\boldsymbol{x}$ 使 $\phi(\boldsymbol{x})>a_l$，且 $\boldsymbol{y}<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S$，有 $\phi(\boldsymbol{y})\leqslant a_l$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为最小上割向量，简称最小上割。

记系统有 t_2 个最小上割，分别为 $\boldsymbol{x}(C_2^1),\cdots,\boldsymbol{x}(C_2^{t_2})$，第 j 个最小上割结构函数记为

$$\kappa_2^j(\boldsymbol{x})=I_{\{\boldsymbol{x}\ngeqslant\boldsymbol{x}(C_2^j)\}}=1-\prod_{i=1}^{n} I_{\{x_i\geqslant x_i(C_2^j)\}},$$

其中 $\boldsymbol{x}(C_2^j)=(x_1(C_2^j),\cdots,x_n(C_2^j))$。

定理 1. 1) $a_k\leqslant\phi(\boldsymbol{x})\leqslant a_l\Longleftrightarrow\coprod\limits_{j=1}^{s} p^j(\boldsymbol{x})=1\Longleftrightarrow\prod\limits_{j=1}^{t_1}\kappa_1^j(\boldsymbol{x})\cdot\prod\limits_{j=1}^{t_2}\kappa_2^j(\boldsymbol{x})=1$；2) $h=P\left(\coprod\limits_{j=1}^{s} p^j(\boldsymbol{x})=1\right)=P\left(\prod\limits_{j=1}^{t_1}\kappa_1^j(\boldsymbol{x})\cdot\prod\limits_{j=1}^{t_2}\kappa_2^j(\boldsymbol{x})=1\right)$. 这里

$$\coprod_{i=1}^{n} x_i=1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i).$$

证. 1) 若 $\coprod\limits_{j=1}^{s} p^j(\boldsymbol{x})=1$，则 $\exists j(1\leqslant j\leqslant s)$，使 $p^j(\boldsymbol{x})=1$，即 $\boldsymbol{x}(P_1^j)\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{x}(P_2^j)$，所以 $a_k\leqslant\phi(\boldsymbol{x})\leqslant a_l$。现设 $a_k\leqslant\phi(\boldsymbol{x})\leqslant a_l$，则由此 $\boldsymbol{x}$ 必可构造一最小路 $\{\boldsymbol{x}(P_1^j),\boldsymbol{x}(P_2^j)\}$，使 $\boldsymbol{x}(P_1^j)\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{x}(P_2^j)$，从而 $p^j(\boldsymbol{x})=1$，所以 $\coprod\limits_{j=1}^{s} p^j(\boldsymbol{x})=1$. 用反证法易证，

$$a_k \leqslant \phi(\boldsymbol{x}) \leqslant a_l \Longleftrightarrow \prod_{j=1}^{t_1} \kappa_1^j(\boldsymbol{x}) \cdot \prod_{j=1}^{t_2} \kappa_2^j(\boldsymbol{x}) = 1.$$

2) 在 1)的等式中取期望即得 2)中结论.

3 可靠性的界

利用上节定义的最小路和最小割,可求得系统可靠性的界.

定理 2.

$$\max_{1\leqslant j\leqslant s} P(p^j(x)=1) \leqslant h \leqslant \min\{\min_{1\leqslant j\leqslant t_1} P(\kappa_1^j(\boldsymbol{x})=1), \min_{1\leqslant j\leqslant t_2} P(\kappa_2^j(x)=1)\}$$

证. 由定理 1 知

$$\max_{1\leqslant j\leqslant s} p^j(\boldsymbol{x}) \leqslant I_{\{a_k\leqslant\phi(x)\leqslant a_l\}} \leqslant \min\{\min_{1\leqslant j\leqslant t_1} \kappa_1^j(\boldsymbol{x}), \min_{1\leqslant j\leqslant t_2} \kappa_2^j(\boldsymbol{x})\},$$

对上式取期望即可得证.

引理 1. 对于任意事件 $E_1,\cdots,E_n$, 有以下不等式成立:

1) $P(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n) \leqslant \sum_{j=1}^{n} P(E_j)$;

2) $P(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n) \geqslant \sum_{j=1}^{n} P(E_j) - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} P(E_j\cap E_k)$.

定理 3. 1) $h \leqslant \sum_{j=1}^{s} P(p^j(\boldsymbol{X})=1)$;

2) $h \geqslant \sum_{j=1}^{s} P(p^j(\boldsymbol{X})=1) - \sum_{j=1}^{s-1}\sum_{m=j+1}^{s} P(p^j(\boldsymbol{X})=p^m(\boldsymbol{X})=1)$;

3) $h \geqslant 1 - \sum_{j=1}^{t_1} P(\kappa_1^j(\boldsymbol{X})=0) - \sum_{j=1}^{t_2} P(\kappa_2^j(\boldsymbol{X})=0)$;

4) $h \leqslant 1 - \sum_{j=1}^{t_1} P(\kappa_1^j(\boldsymbol{X})=0) - \sum_{j=1}^{t_2} P(\kappa_2^j(\boldsymbol{X})=0) + \sum_{j=1}^{t_1-1}\sum_{m=j+1}^{t_1} P(\kappa_1^j(\boldsymbol{X})$

$= \kappa_1^m(\boldsymbol{X})=0) + \sum_{j=1}^{t_2-1}\sum_{m=j+1}^{t_2} P(\kappa_2^j(\boldsymbol{X})=\kappa_2^m(\boldsymbol{X})=0)$.

证. $h = P(\{p^1(\boldsymbol{X})=1\}\cup\cdots\cup\{p^s(\boldsymbol{X})=1\}) = 1 - P(\phi(\boldsymbol{X})<a_k) - P(\phi(\boldsymbol{X}) > a_l) = 1 - P(\{\kappa_1^1(X)=0\}\cup\cdots\cup\{\kappa_1^{t_1}(X)=0\}\cup\{\kappa_2^1(X)=0\}\cup\cdots\cup\{\kappa_2^{t_2}(X) = 0\})$,

利用引理 2 即可得证.

4 可靠性计算

对于某些特殊多状态系统,可以求得系统可靠性的精确解. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立,若 $a_l=a_m$, 则串联系统可靠度为

$$h = P(\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant a_k) = P(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} g_i(X_i) \geqslant a_k) = \prod_{i=1}^{n} P(g_i(X_i) \geqslant a_k);$$

并联系统可靠度为

$$h = P(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} g_i(X_i) \geqslant a_k) = \prod_{i=1}^{n} P(g_i(X_i) \geqslant a_k).$$

若 $a_k = a_0$，则串联系统可靠度为

$$h = P(\phi(\boldsymbol{X}) \leqslant a_l) = P(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} g_i(X_i) \leqslant a_l) = \prod_{i=1}^{n} P(g_i(X_i) \leqslant a_l);$$

并联系统可靠度为

$$h = P(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} g_i(X_i) \leqslant a_l) = \prod_{i=1}^{n} P(g_i(X_i) \leqslant a_l).$$

在 X_i 的分布列和 $g_i(X_i)$ 已知的条件下，可计算出系统可靠度。在上述两种情况下，利用系统分解结构和必要时利用概率分解公式，原则上仍可求较复杂系统可靠性精确解。

在一般情形下，若求得系统全部 s 个最小路，则由定理 1 知

$$h = P(\{p^1(\boldsymbol{X}) = 1\} \cup \cdots \cup \{p^s(\boldsymbol{X}) = 1\}).$$

利用概率论中的容斥原理可求精确解，但计算较繁。为简化计算，可采用以下不交化算法。因为

$$\begin{aligned}\{I_{\{a_k \leqslant \phi(\boldsymbol{x}) \leqslant a_l\}} = 1\} &= \{p^1(\boldsymbol{x}) = 1\} \cup \cdots \cup \{p^s(\boldsymbol{x}) = 1\} \\ &= \{p^1(x) = 1\} \cup \{p^1(x) = 0; p^2(x) = 1\} \cup \cdots \cup \{p^1(x) \\ &= 0; \cdots; p^{s-1}(x); p^s(x) = 1\},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}h = &P(p^1(X) = 1) + P(p^1(X) = 0; p^2(X) = 1) + \cdots + P(p^1(X) \\ &= 0; \cdots; p^{s-1}(X) = 0; p^s(X) = 1).\end{aligned}$$

在 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立条件下，可计算出上式中的各项。

上述算法中，需要求得最小路全体，且在最小路数量大时，计算过程仍较繁。实际上已知 $\phi(\boldsymbol{X})$ 表达式后，可采用 Monte-Carle 法求系统可靠性的数字仿真计算结果。原则上讲，该方法适用于非常复杂的 $\phi(\boldsymbol{X})$ 表达式。

参　考　文　献

[1] Barlow R E, Wu A S. Coherent systems with multistate components. *Math. Oper. Res.*, 1978, **3**: 275—281.

[2] El-Neweihi E, Proschan F, Sethuraman J. Multistate Coherent Systems, *J. Appl. Prob.*, 1978, **15**: 675—688.

[3] 张际良. 多状态关联系统的新定义与典型结构. 数学的实践与认识, 1993, **1**: 35—39.

PERFORMANCE RELIABILITY OF MULTISTATE SYSTEM

ZHANG JILIANG
(*Dept. of Power Eng., Nanjing University of Aeronautics and Astronautics Nanjing* 210016)

ABSTRACT

There exist many systems in which the performance parameters of the systems should be in assigned range. In this paper, the definition and theorems of structure and reliability on this multistate system are studied. Some bounds on system reliability are obtained by means of minimum paths and minimum cuts defined here. The reliability computation is also discussed.

Key words: Multistate system, performance reliability, computation.

(上接第 245 页)

五、联系人及地址

联系人: 张月田 通讯地址: 中国科学院系统科学研究所(北京中关村 100080)
电话: (010)2553063 传真: (010)2568364 电子信箱: epwang@iss03.iss.ac.cn

中国自动化学会
控制理论专业委员会
一九九五年十二月

《关肇直奖》 条例

一、关肇直教授是中国科学院院士,国内外知名的数学家和控制理论专家. 他一生致力于数学、控制科学和系统科学的研究和发展,作出了重要的贡献. 为了缅怀和纪念关肇直教授,推动我国控制科学的发展,特设立关肇直奖.

二、关肇直奖是中国自动化学会控制理论专业委员会设立的最高青年奖. 基金由国内外单位和个人捐赠,并由关肇直奖基金委员会管理.

三、关肇直奖的授奖对象为年龄不超过 35 周岁的青年作者(包括合作者)在中国自动化学会控制理论专业委员会举办的«中国控制会议»上宣读的论文. 关肇直奖每年评定一次, 每次获奖名额不多于两名.

四、凡申请关肇直奖的论文,需在投稿时注明,交论文一式九份,并附工作证(或学生证)和身份证复印件,及至少一份同行教授级专家推荐意见. 请奖论文需经会议审稿通过,然后交评奖委员会委员作书面评审,定出候选论文. 最后,在年会期间由评奖委员会根据论文质量及宣读水平,定出获奖者,在会议闭幕式上宣布结果并授奖.

五、评奖委员会每年由关肇直奖基金委员会聘请国内知名控制理论及应用专家组成.

六、关肇直奖基金委员会设正主任一人,副主任若干人. 基金委员会负责基金的筹集和管理,组织论文的评奖与颁发,以及决定其他有关事项. 具体工作委托中国自动化学会控制理论专业委员会办理.

七、本条例的解释权和修改权属于关肇直奖基金委员会.