第22卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 22, No. 2
1996 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　March, 1996

短 文

广义分散前馈控制系统固定模的进一步研究

高志伟　李光泉
（天津大学系统工程研究所　300072）

摘　要

运用把广义分散前馈控制系统转化为不带前馈的广义分散控制系统的方法，讨论了广义分散前馈控制系统的固定模问题，给出了若干以系统原始矩阵为基础的有穷固定模和脉冲固定模的新判据，得到了一些有意义的结论。

关键词： 广义系统，分散控制，前馈控制，固定模。

1 引言

近年来，广义分散控制系统的研究取得了较大进展[1-4]。广义分散前馈控制系统是一类较为广泛的系统，对其进行研究，无论在理论上，还是在实际应用上都很有价值。本文将在文[1—2]工作的基础上，对广义分散前馈控制系统的有穷固定模和脉冲固定模问题进行研究。

2 预备知识

考虑广义分散前馈控制系统

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{N}B_i\boldsymbol{u}_i(t), \\ \boldsymbol{y}_i(t)=C_i\boldsymbol{x}(t)+\sum_{j=1}^{N}D_{ij}\boldsymbol{u}_j(t),\ i\in\underline{N}=\{1,2,\cdots,N\}, \end{cases} \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 为状态矢量，$\boldsymbol{u}_i\in R^{m_i}$，$\boldsymbol{y}_i\in R^{r_i}$ 分别为第 i 个控制站的局部输入和输出矢量，$A\in R^{n\times n}, E\in R^{n\times n}, \mathrm{rank}E<n, m=\sum_{i=1}^{N}m_i$，$r=\sum_{i=1}^{N}r_i$。记 $B=(B_1,\ \cdots,\ B_N)$，

本文于 1993 年 5 月17日收到

$$C^{\mathrm{T}}=(C_1^{\mathrm{T}}\cdots C_N^{\mathrm{T}}),\ D=(D_1\cdots D_N)=\begin{bmatrix}D_{11}\cdots D_{1N}\\ \vdots \quad \vdots\\ D_{N1}\cdots D_{NN}\end{bmatrix}.$$

设系统(1)是正则的，而且是强能控且强能观的. 把系统(1)简记为 (E,A,B,C,D).

对系统(1)施加分散反馈控制

$$\boldsymbol{u}=-K\boldsymbol{y},\quad K\in\bar{K},\tag{2}$$

这里 $\bar{K}\triangleq\{K\mid K=\mathrm{blockdiag}\ (K_1,\cdots,K_N),K_i\in R^{m_i\times r_i},\ i\in\underline{N},$ 且 $\det(I_r+DK)\neq 0$, $\det[nE-A+BK(I_r+DK)^{-1}C]\not\equiv 0\}$.

相应的闭环系统为

$$E\dot{\boldsymbol{x}}=[A-BK(I_r+DK)^{-1}C]\boldsymbol{x}.\tag{3}$$

3　广义分散前馈控制系统的有穷固定模

定义 1. $\lambda\in\mathbb{C}$, λ 有限，如果对于一切 $K\in\bar{K}$ 都有 $\mathrm{rank}[\lambda E-A+BK(I_r+DK)^{-1}C]<n$ 成立，则称 λ 是系统(1)关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模.

系统(1)关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模的集合为

$$\Lambda=\bigcap_{K\in\bar{K}}sp\{E,A-BK(I_r+DK)^{-1}C\},\tag{4}$$

这里 $\mathbb{C}$ 表示复平面，$sp(R,T)=\{\lambda\mid\det(\lambda R-T)=0\}$.

显然，若取 $K=0$，则 $sp\{E,A-BK(I_r+DK)^{-1}C\}=sp(E,A)$，那么必有 $\Lambda\subset sp(E,A)$.

引理 1[1]. $\lambda\in sp(E,A)$ 是系统(1)关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模的充要条件是

$$\max_{K\in\bar{K}}\ \mathrm{rank}\begin{bmatrix}\lambda E-A+BKC & BK\\ DKC & I_r+DK\end{bmatrix}<n+r.\tag{5}$$

显然，式(5)较为繁琐. 为了便于讨论，构造如下增广广义系统：

$$(\tilde{E},\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})=\left(\begin{bmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & -I_r\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B\\ D\end{bmatrix},[C\quad I_r]\right),\tag{6}$$

这里 $\tilde{E}\in R^{(n+r)\times(n+r)},\tilde{A}\in R^{(n+r)\times(n+r)},\tilde{B}\in R^{(n+r)\times m},\tilde{C}\in R^{r\times(n+r)}$

式(5)可等价地写为

$$\max_{K\in\bar{K}}\mathrm{rank}(\lambda\tilde{E}-\tilde{A}+\tilde{B}K\tilde{C})<n+r.\tag{7}$$

下面先讨论一下增广广义系统 $(\tilde{E},\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 的性质.

引理 2. 增广广义系统 $(\tilde{E},\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 与系统(1)有相同的特征根集合.

证. 由式(6)有

$$\det(\lambda\tilde{E}-\tilde{A})=\det\begin{pmatrix}\lambda E-A & 0\\ 0 & I_r\end{pmatrix}=\det(\lambda E-A),$$

即 $sp(E,A)=sp(\tilde{E},\tilde{A})$.

引理 3. 增广广义系统 $(\tilde{E},\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 与系统(1)的 R 能控、能观性是等价的.

证.

$$\operatorname{rank}(\lambda\tilde{E}-\tilde{A}\tilde{B})=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\lambda E-A & 0 & B\\ 0 & I_r & D\end{pmatrix}$$
$$=\operatorname{rank}(\lambda E-A\ B)+r, \tag{8a}$$

同理有

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\lambda\tilde{E}-\tilde{A}\\ \tilde{C}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\lambda E-A\\ C\end{pmatrix}+r. \tag{8b}$$

再由系统(1) R 能观，R 能观的定义，则结论显然.

为了叙述方便，设集合 $\underline{N}=\{1,2,\cdots,N\}$ 的某种不相交分划为：$p=\{i_1,\cdots,i_k\}$，$\bar{p}=\{i_{k+1},\cdots,i_N\}$. 记 $\tilde{B}_{\bar{p}}=(\tilde{B}_{i_{k+1}},\cdots,\tilde{B}_{i_N})$，$B_{\bar{p}}=(B_{i_{k+1}},\cdots,B_{i_N})$，

$$D_{\bar{p}}=\begin{pmatrix}D_{1,i_{k+1}} & \cdots & D_{1,i_N}\\ \vdots & & \vdots\\ D_{N,i_{k+1}} & \cdots & D_{N,i_N}\end{pmatrix},\ C_p=\begin{pmatrix}C_{i_1}\\ \vdots\\ C_{i_k}\end{pmatrix},\ I_p=\begin{pmatrix}I_{i_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & I_{i_k}\end{pmatrix}.$$

定理 1. $\lambda\in sp(E,A)$ 是系统 (1) 关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模的充要条件是，存在 $\underline{N}=\{1,2,\cdots,N\}$ 的某种不相交分划 $p=\{i_1,\cdots,i_k\}$ 和 $\bar{p}=\{i_{k+1},\cdots,i_N\}$，使

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda\tilde{E}-\tilde{A} & \tilde{B}_{\bar{p}}\\ \tilde{C}_p & 0\end{bmatrix}<n+r. \tag{9}$$

证. 由引理 2 和式 (7)，利用文 [5] 中正常分散控制系统固定模的代数判据直接可得.

定理 2[1]**.** $\lambda\in sp(E,A)$ 是系统(1)关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模的充要条件是，存在 $\underline{N}=\{1,2,\cdots,N\}$ 的某种不相交分划 $p=\{i_1,\cdots,i_k\}$ 和 $\bar{p}=\{i_{k+1},\cdots,i_N\}$，使

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A-\lambda E & B_{\bar{p}}\\ C_p & D_{p,\bar{p}}\end{bmatrix}<n. \tag{10}$$

证. 把 $\tilde{E}=\begin{bmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$\tilde{A}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & -I_r\end{bmatrix}$，$\tilde{B}_{\bar{p}}=\begin{bmatrix}B_{\bar{p}}\\ D_{\bar{p}}\end{bmatrix}$，$\tilde{C}_p=(C_p\ \ I_p)$ 代入式(9)，并整理即得.

为了得到定理 2，文[1]用了很大的篇幅. 本文却很容易、很直接地得到了它，说明了本文分析方法的优越性.

定理 3. $\lambda\in sp(E,A)$ 是系统(1)关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模的充要条件是，$\lambda\in sp(E,A)$ 是广义系统 $(\tilde{E},\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模.

证. 由引理 2，再比较式(5)和(7)，则显然可得.

定理 3 表明，广义分散前馈控制系统有穷固定模问题，完全可转化为较高维的不带前馈的广义分散控制系统有穷固定模问题来考虑. 可以很方便地运用已有的判别和消除广义分散控制系统有穷固定模的算法，来解决广义分散前馈控制系统有穷固定模的判别和消除问题.

由于已假定系统(1)是 R 能控且 R 能观的，则由引理 3 知，增广广义系统 $(\tilde{E},\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 也是 R 能控且 R 能观的，于是可用文[6]中介绍的算法来判别和消除，增广广义系统 $(\tilde{E},\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模，实质上也就是解决了系统(1)的有穷固定模的判别和消除问题. 具体算法步骤可参见文[6].

4　广义分散前馈控制系统的脉冲固定模

引理 4[7]. 广义线性系统 (E,A) 具有脉冲模的充要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix} < n + \operatorname{rank}E = n + q. \tag{11}$$

根据引理 4,可给出系统(1)具有脉冲固定模的定义.

定义 2. 系统(1)关于结构 $\bar{K}$ 具有脉冲固定模的充要条件是

$$\max_{K\in\bar{K}} \operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & 0 \\ A - BK(I_r + DK)^{-1}C & E \end{bmatrix} < n + q. \tag{12}$$

引理 5. 系统(1)关于结构 $\bar{K}$ 具有脉冲固定模的充要条件是

$$\max_{K\in\bar{K}} \operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A - BKC & E & BK \\ -DKC & 0 & I_r + DK \end{bmatrix} < n + r + q. \tag{13}$$

证. 由式(12), 且又因 $\operatorname{rank}(I_r + DK) = r$, 利用文[1]中定理 2.1.1 的证明方法平行可得.

同样,式(13)也较复杂,为了便于进一步分析,构造如下增广正常系统:

$$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = \left(\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ D \end{bmatrix}, [C\ 0\ -I_r]\right). \tag{14}$$

这里 $\bar{A} \in R^{(2n+r)\times(2n+r)}, \bar{B} \in R^{(2n+r)\times m}, \bar{C} \in R^{r\times(2n+r)}$, 则式(13)可相应地写成

$$\max_{K\in\bar{K}} \operatorname{rank}(\bar{A} - \bar{B}K\bar{C}) < n + r + q. \tag{15}$$

定理 4. 系统(1)关于结构 $\bar{K}$ 具有脉冲固定模的充要条件是,存在 $\underline{N} = \{1, 2, \cdots, N\}$ 的某种不相交分划 $p = \{i_1, \cdots, i_k\}$ 和 $\bar{p} = \{i_{k+1}, \cdots, i_N\}$, 使

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}_{\bar{p}} \\ \bar{C}_p & 0 \end{bmatrix} < n + r + q. \tag{16}$$

证. 由式(15),运用文[5]中正常分散控制系统固定模的代数判据平行可得.

定理 5. 系统(1)关于结构 $\bar{K}$ 具有脉冲固定模的充要条件是,存在 $\underline{N} = \{1, 2, \cdots, N\}$ 的某种不相交分划 $p = \{i_1, \cdots, i_k\}$ 和 $\bar{p} = \{i_{k+1}, \cdots, i_N\}$, 使

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B_{\bar{p}} \\ C_p & 0 & D_{p,\bar{p}} \end{bmatrix} < n + q. \tag{17}$$

证明,把 $\bar{A} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}$, $\bar{B}_{\bar{p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\bar{p}} \\ D_{\bar{p}} \end{bmatrix}$, $\bar{C}_p = (C_p\ 0\ -I_p)$, 代入式(16), 并加以整理即得.

与文[2]中的定理 6 比较,本文得到的定理 5 用的都是系统的原始矩阵, 不需降秩变换,因此,运用起来更方便.

定理 6. 系统(1)关于结构 $\bar{K}$ 具有脉冲固定模的充要条件是,正常系统 $(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$关于结构 $\bar{K}$ 以零为固定模.

证. 由式(13),(15),显然可得.

定理 6 表明,广义分散前馈控制系统的脉冲固定模问题,可转化为较高维的正常分散控制系统的零固定模问题来讨论. 从而,一切已有的有关正常分散控制系统固定模的判别和消除的算法,都可直接用来解决系统(1)的脉冲固定模的判别和消除问题. 如可用文[6,8]中介绍的算法来判别(消除)增广正常系统 $(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ 的零固定模,也即判别(消除)了系统(1)的脉冲固定模. 具体算法步骤略.

5 结论

本文讨论了广义分散前馈控制系统的有穷固定模和脉冲固定模问题,得到了如下有意义的结论:

1) 广义分散前馈控制系统有穷固定模问题完全可转化为不带前馈的增广广义分散控制系统的有穷固定模问题来考虑.

2) 广义分散前馈控制系统脉冲固定模问题则可转化为不带前馈的增广正常分散控制系统零固定模问题.

3) 本文得到的判据和算法都是以系统原始矩阵为基础的,便于应用.

参 考 文 献

[1] 李光泉,高志伟,郑丕谔. 前馈广义分散控制系统有穷固定模的代数特征. 天津大学学报,1994,**27**(2): 125—130.

[2] 高志伟,李光泉,郑丕谔. 带前馈的广义分散控制系统固定模. 天津大学学报,1993,**26**(2): 21—29.

[3] Chang T N, Davison E J. Decentralized Control for Descriptor Type Systems, Proc. of the 25th CDC. 1986, 1176—1181.

[4] 王朝珠,王恩平. 广义分散控制系统的无穷远固定模. 系统科学与数学,1988,**8**(2): 142—150.

[5] Anderson B D O. Algebrai characterization of fixed modes in decentralized control systems. *Automatica*, 1981, **17** (6): 703—712.

[6] 高志伟,李光泉,郑丕谔. 广义分散控制系统有穷固定模的判别. 控制理论与应用,1994,**11**(1): 30—33.

[7] Dai L Y. Impulsive modes and causality in singular systems. *Intern. J. of Control.*, 1989, **50** (4): 1267—1281.

[8] Tarokh M. Elimination of decentralized fixed modes with minimum number of interconnected gains. *Large Scale Systems*, 1986, **11** (3): 207—215.

FURTHER RESEARCH ON FIXED MODES IN SINGULAR DECENTRALIZED FEEDFORWARD CONTROL SYSTEMS

GAO ZHIWEI　　LI GUANGQUAN

(*Institute of Systems Engineering, Tianjin University* 300072)

ABSTRACT

By means of the conversion of a generalized singular decentralized feedforward control systems into a singular decentralized control systems without forward feed, the problems of fixed modes in singular decentralized feedforward control systems are further studied. Some new criteria based on the original system coefficient matrices to determine finite fixed modes and impulsive fixed modes are given. Some significant conclusion are also proposed.

Key words: Singular systems, decentralized control, feedforward control, fixed modes.

（下转第 250 页）