第22卷 第2期 自动化学报 Vol. 22, No. 2
1996年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA March, 1996

短文

一类非线性不确定系统的鲁棒观测器设计[1)]

倪茂林 谌颖
(北京控制工程研究所 100080)

摘要

对于一类非线性不确定系统,给出一种基于观测器的鲁棒稳定控制器设计的新方法,它适用于一般匹配不确定系统,且对全维和降维两种观测器均进行了研究. 设计实例表明,所设计的控制器反馈增益幅值较小、实现方便.

关键词: 鲁棒控制,非线性系统,观测器,稳定性.

1 引言

不确定系统的鲁棒状态反馈控制近年来得到了很大发展[1]. 但在实际应用中系统状态信息常常不能得到,这就要求设计观测器来估计系统状态. 然而由于系统模型中含有不确定性,常规分离性原理不能使用,因而鲁棒观测器问题一直是鲁棒控制研究中的重要课题. 文献[2]研究了一类非线性匹配不确定系统,并给出一种基于观测器的鲁棒稳定控制器设计方法. 然而文献[2]对系统控制矩阵中不确定性范围附加了很强的限制,其方法不适用于一般的匹配不确定系统. 本文对于这类非线性不确定系统给出一种设计鲁棒观测器的新方法.

2 问题描述

考虑非线性不确定系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A\boldsymbol{x}(t) + \Delta a(\boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{x}(t)) + B\boldsymbol{u}(t) + \Delta b(\boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{u}(t)), \\ \boldsymbol{y}(t) &= C\boldsymbol{x}(t),\end{aligned} \tag{2.1}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是状态变量, $\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是控制变量, $\boldsymbol{y}(t)\in R^k$ 是输出变量. A, B 与 C 是系统标称参数矩阵. 在非线性不确定性 Δa 和 Δb 中, 假定可变参数向量 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 勒

1) 国家自然科学基金资助课题.
本文于1994年10月10日收到

贝格可测，且有 $\omega(t)\in\Omega\subset R^p$，这里 Ω 为紧集。

假设 1. $(A,\ B)$ 可控，(C,A) 可观。

假设 2. $\Delta a(\cdot,\cdot):R^p\times R^n\to R^n$ 和 $\Delta b(\cdot,\ \cdot):R^p\times R^m\to R^n$ 均为 Caratheodory 矩阵函数。

假设 3(匹配条件). 存在映射矩阵 $e_x(\cdot,\cdot)$ 和 $e_u(\cdot,\cdot)$ 满足条件

$$\Delta a(\omega,x)=Be_x(\omega,x),\ \Delta b(\omega,u)=Be_u(\omega,u),\ \forall\omega\in\Omega,\tag{2.2a}$$

$$\sup_x[\|e_x(\omega,x)\|/\|x\|]=\beta_x(\omega),$$

$$\sup_u[\|e_u(\omega,u)\|/\|u\|]=\beta_u(\omega)<1,\ \forall\omega\in\Omega,\tag{2.2b}$$

式中矩阵范数定义为最大奇异值。

3　鲁棒稳定控制器

定理 3.1. 假定系统(2.1)满足假设 1—3，且存在正数 δ 满足条件

$$\delta\leqslant 2[1-\beta_u(\omega)],\ \forall\omega\in\Omega.\tag{3.1}$$

若 Riccati 方程及其加权矩阵选择如下：

$$A'P+PA-PBR^{-1}B'P+Q=0,\tag{3.2}$$

$$R=\eta I,\ \eta=1/(\beta\delta-1);\ Q\geqslant qI,\ q\geqslant\beta_x^2(\omega)+a,\forall\omega\in\Omega,\tag{3.3}$$

式中 a 是选定的正数，β 满足条件 $\beta>1/\delta$，则反馈控制

$$u(t)=Kx(t),\ K=-\beta B'P,\tag{3.4}$$

可使系统(2.1)渐近稳定，其中 P 是方程(3.2)的正定解。

例 3.1. 某非线性不确定系统可用方程(2.1)描述，且

$$A=\begin{bmatrix}-4&-2\\1&3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ \Delta a=\begin{bmatrix}0\\\omega_1(t)\sin(x_2)\end{bmatrix},\ \Delta b=\begin{bmatrix}0\\\omega_2(t)\sin(u)\end{bmatrix}.$$

不确定参数满足 $|\omega_1(t)|\leqslant 1,|\omega_2(t)|\leqslant 0.5$。

显然 $e_x(\omega,x)=\omega_1\sin(x_2),\ e_u(\omega,u)=\omega_2\sin(u),\ \beta_x(\omega)=|\omega_1|,\ \beta_u(\omega)=|\omega_2|$。根据定理 3.1，选择 $\delta=1,\ \beta=6,\ a=1,\ Q=2I$，得鲁棒稳定控制

$$u(t)=Kx(t),\ K=[-0.6523\quad -8.5223].\tag{3.5}$$

对于 $|\omega_1|\leqslant 1,|\omega_2|\leqslant 0.1$ 情况，文献[2]给出鲁棒稳定控制

$$u(t)=Kx(t),\ K=[-0.7319\quad -5.9278].\tag{3.6}$$

而根据定理 3.1，选择 $\delta=1.8,\beta=3,a=1,Q=2I$，得鲁棒稳定控制

$$u(t)=Kx(t),\ K=[-0.3895\quad -4.7311].\tag{3.7}$$

4　全维鲁棒观测器

对于系统(2.1)，基于全维 Luenberger 观测器的控制形式为

$$\dot{\hat{x}}(t)=(A-LC)\hat{x}(t)+Ly(t)+Bu(t),\ u(t)=K\hat{x}(t),\tag{4.1}$$

式中 $\hat{x}(t)\in R^n$ 是估计状态，L 是观测器增益，K 是由定理 3.1 得到的状态反馈阵。

假设 4. 存在一正定矩阵 $Q_e \in R^{n\times n}$ 使得下式成立:

$$C'F' = P_eB, \text{ 对于某一矩阵 } F \in R^{m\times k}, \tag{4.2}$$

式中 $P_e > 0$ 是下面 Lyapunov 方程 ($A_0 = A - L_oC$ 渐近稳定)的解,

$$A_0'P_e + P_eA_0 = -Q_e. \tag{4.3}$$

定理 4.1. 假定系统(2.1)满足假设 1—4,如果选择观测器增益

$$L = L_0 + \gamma P_e^{-1}C', \tag{4.4}$$

则控制(4.1)可使系统(2.1)渐近稳定,其中正数 γ 足够大,其下界由(4.7)式给出.

应用上述定理设计系统(2.1)的具体步骤为

1) 应用定理 3.1 设计鲁棒稳定控制器 K.

2) 选择矩阵 L_0 使得 $A_0 = A - L_0C$ 渐近稳定.

3) 由方程 $P_eB = C'F'$ 求解 P_e,根据 P_e 的对称性确定矩阵 F 各元素之间的关系.

4) 构造矩阵 $Q_e(P_e) = -(A_0'P_e + P_eA_0)$, 并选择其元素使得对于 $i = 1, 2, \cdots, n$,顺序主子式 $\Delta_i(Q_e) > 0$,计算矩阵 P_e 及 F 的值.

5) 构造矩阵

$$F_1(\rho, \omega) = \begin{bmatrix} -\rho a & \rho\beta^{-1}(1+\beta_u)\|K\|^2 \\ \rho\beta^{-1}(1+\beta_u)\|K\|^2 & -\lambda_{\min}(Q_e) \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

式中 a,β 来自定理 3.1,为使 $F_1(\rho,\omega)$ 负定,选取 $\rho < \rho_*$,其中

$$\rho_* = a\beta^2\lambda_{\min}(Q_e)/\{\max_{\omega\in\Omega}[1 + \beta_u(\omega)]^2\|K\|^4\}. \tag{4.6}$$

6) 计算 $\zeta = -\max_{\omega\in\Omega}\{\lambda_{\max}[F_1(\rho, \omega)]\}$及矩阵 Φ 和 Θ, 其中 Φ 的列构成 C 的核空间 $N(C)$ 的正交基,Θ 的列构成 $N(C)$ 垂直空间的正交基.

7) 鲁棒观测器增益矩阵为(4.4),且 $\gamma > \gamma_*$,其中

$$\gamma_* = \{2\zeta\max_{\omega\in\Omega}\beta_u(\omega)\|K\Theta\|/\|FC\Theta\| + \max_{\omega\in\Omega}[\beta_x(\omega) + \beta_u(\omega)\|K\|]^2 + \max_{\omega\in\Omega}[\beta_u(\omega)\|K\Phi\|]^2\}\|FC\Theta\|^2/[2\zeta\lambda_{\min}(\Theta'C'C\Theta)]. \tag{4.7}$$

例 4.1. 考虑例 3.1 中的系统,假定 $C = [0\ \ 1]$,设计全维鲁棒观测器.

1) 由定理 3.1, 取 $\delta = 1$, $\beta = 20$, $a = 7$, $Q = 8I$, 得状态反馈阵 $K = [1.32\ \ -16.72]$.

2)—4) 与文献[2]类似,得 $L_o = [-1\ \ 4]$,$P_e = I_2$,$Q_e = \mathrm{diag}(8,2)$.

5)—7) 由 $\rho_* = 0.032$, 取 $\rho = 0.015$;由 $\gamma_* = 834.9$, 取 $\gamma = 835$, 得观测器增益 $L = [-1\ \ 839]$.

5 降维鲁棒观测器

对于系统(2.1),基于降维 Luenberger 观测器的控制形式为

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) = F\boldsymbol{\phi}(t) + L\boldsymbol{y}(t) + TB\boldsymbol{u}(t), \tag{5.1a}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t) = S_1\boldsymbol{\phi}(t) + S_2\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t) = K\hat{\boldsymbol{x}}(t), \tag{5.1b}$$

式中 $\boldsymbol{\phi}(t) \in R^S$ 是观测器的状态, $\hat{\boldsymbol{x}}(t) \in R^n$ 是系统(2.1)的估计状态. F, T, L, S_1 和 S_2 是适当维的常数矩阵. K 是由定理 3.1 得到的状态反馈阵. 假定 F 渐近稳定, 维数 S 与

矩阵 F, T, L, S_1 和 S_2 满足条件

$$n-k \leqslant s \leqslant n, \quad TA = FT + LC, \quad S_1T + S_2C = I_n. \tag{5.2}$$

定理 5.1. 假定系统(2.1)满足假设 1—3,若存在一个矩阵 $Q_r > 0$ 使

$$\lambda_{\min}(Q_r) - 2\max_{\omega\in\Omega}\beta_u(\omega)\|P_rTB\|\|KS_1\| > [\max_{\omega\in\Omega}\mu(\omega)]^2/a \tag{5.3}$$

成立,式中 $P_r > 0$ 是下面 Lyapunov 方程的解

$$F'P_r + P_rF = -Q_r, \tag{5.4}$$

$$\mu(\omega) = [1+\beta_u(\omega)]\|PB\|\|KS_1\| + [\beta_x(\omega) + \beta_u(\omega)\|K\|]\|P_rTB\|, \tag{5.5}$$

则控制(5.1)可使系统(2.1)渐近稳定.

例 5.1. 考虑例 4.1 中的问题,但设计降维鲁棒观测器.

由定理 3.1 得状态反馈阵 $K = [-0.6523 \quad -8.5223]$. 应用定理 5.1 选取

$$F = -4, \ L = -2, \ T = [1 \ \ 0], \ S_1 = [1 \ \ 0]', \ S_2 = [0 \ \ 1]', \tag{5.6}$$

则基于降维观测器的鲁棒控制为

$$\dot{\phi}(t) = -4\phi(t) - 2x_2(t), u(t) = -0.6523\phi(t) - 8.5223x_2(t). \tag{5.7}$$

对于一类非线性不确定系统，本文提出一种基于观测器的鲁棒稳定控制器设计的新方法。与文献[2]相比,这种方法允许控制矩阵中不确定性范围扩大一倍，且设计的控制器便于工程实现.

参　考　文　献

[1] 倪茂林,吴宏鑫. 线性不确定系统的鲁棒稳定控制器设计. 自动化学报,1992,**18**(5): 581—585.

[2] Fong I-K, Tsay S C and Kuo T S. Robust observer design for nonlinear uncertain systems with LQ regulators. *Int. J. Systems Sci.*, 1992, **23**(11):1937—1952.

ROBUST OBSERVERS FOR A CLASS OF NONLINEAR UNCERTAIN SYSTEMS

Ni Maolin　Chen Ying

(Beijing Institute of Control Engineering 100080)

Abstract

In this paper, a new method of designing observer-based robust stabilizing controllers for a class of nonlinear uncertain systems is presented. It is applicable to the uncertain system which only satisfies the general matching conditions. Both full-order and reduced-order observers are considered. Examples show that the resulting controller has smaller feedback gains and is, therefore, easier in implementation.

Key words: Robust control, nonlinear systems, observers, stability.