第 22 卷 第 2 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 22, No. 2
1996 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　March, 1996

一种新的时变大系统递阶控制求解方法

黄苏南　邵惠鹤
(上海交通大学自控系 200030)

摘　要

研究了一种新的大系统求解方法,利用 Taylor 级数的性质,将大系统时变递阶控制问题转化为代数方程的求解问题. 该方法简单,易于编成计算机程序. 算例表明了它的有效性.

关键词: 大系统, Taylor 级数,递阶控制.

1 引言

大系统理论研究尽管已有二十多年了,但仍有许多问题需要改进和发展. 近年来,正交级数已用于多方面控制问题的分析[1,2]. 对于大系统情况, 文献[3]对关联预估法将第一级的两点边值问题

$$X_i = A_iX_i - B_iR_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P_i + D_i,\ \ X_i(0) = X_{i0},$$
$$P_i = -Q_iX_i - A_i^{\mathrm{T}}P_i + E_i,\ \ P_i(t_f) = 0,$$

用 Walsh 级数转化成初始值问题,进而得到了大系统的解,作者也曾在文献[4,5]用 Legendre 级数以及 Taylor 级数分别进行了类似的研究. 本文研究了大系统的目标协调方法,给出了一种新的大系统求解方法. 与文献[3—5]研究的方法不同,这里不是对现有大系统方法中需要求解的 Riccati 方程或者两点边值问题进行求解, 而是通过 Taylor 级数近似,将大系统低级求解问题转化成了代数方程的求解问题, 得到了大系统的直接解, 尽管采用了目标协调法结构,却没有在目标函数中增加没有物理意义的二次项,这一点非常重要. 文中首先介绍了 Taylor 级数性质,回顾一种递阶控制的二级协调方法, 然后给出了级数的二级协调的算法,最后将这种方法用一个例子进行了仿真,结果是满意的.

2 递阶控制的描述

大系统问题是使 J 最小

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_f}\left(x_i^{\mathrm{T}}(t)Q_i(t)x_i(t) + u_i^{\mathrm{T}}(t)R_i(t)u_i(t)\right)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

本文于 1993 年 5 月 10 日收到

这里 Q_i 是半正定的，R_i 是正定的，n 是关联子系统的数目，x_i 是第 i 个子系统的 n_i 维状态向量，u_i 是相应 m_i 维控制向量

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = N, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i = M.$$

目标函数(1)最小化必需满足约束

$$\dot{x}_i(t) = A_i(t)x_i(t) + B_i(t)u_i(t) + C_i(t)z_i(t), \ i = 1,2,\cdots,n, \tag{2}$$

这里

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}(t)x_j(t), \ i = 1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

z_i 是 q_i 维来自于其它子系统的输入。对于这个大系统，为了使计算变得容易，定义对偶函数 $\phi(\lambda)$

$$\phi(\lambda) = \mathrm{Min}\{L(x_i,u_i,\lambda,z_i)\}, \ i = 1,2,\cdots,n, \tag{4}$$

这里

$$L(x_i,u_i,\lambda,z_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_f}\left[(x_i^{\mathrm{T}}Q_i(t)x_i + u_i^{\mathrm{T}}R_i(t)u_i) + 2\lambda_i^{\mathrm{T}}\left(z_i - \sum_j L_{ij}(t)x_j\right)\right]\mathrm{d}t, \tag{5}$$

式中 $\lambda(t)$ 是 $\sum_{i=1}^{n} q_i = q$ 维 Lagrange 乘子。按照强耦合定理

$$\underset{\lambda}{\mathrm{Max}}\,\phi(\lambda) = \underset{u_i}{\mathrm{Min}}\,J, \ i = 1,2,\cdots,n. \tag{6}$$

于是 J 最优化可用 $\phi(\lambda)$ 的最大化。给定一个 $\lambda(t)$，Lagrange 函数 L 可分成 n 个独立的最小化问题，第 i 个是

$$\mathrm{Min}L_i = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[(x_i^{\mathrm{T}}Q_ix_i + u_i^{\mathrm{T}}R_iu_i) + 2\lambda_i^{\mathrm{T}}\left(z_i - \sum_{j=1}^{n} L_{ij}x_j\right)\right]\mathrm{d}t, \tag{7}$$

约束为(2)式。这样可用两级结构求解大系统问题，第一级对于给定的 λ，求解(7)式的最小化问题。在第二级，$\lambda(t)$ 用梯度法校正，即从 j 到 $j+1$

$$\lambda(t)^{j+1} = \lambda(t)^j + \alpha^j d^j, \tag{8}$$

$\alpha^j > 0$ 是步长，d^j 为搜索方向，当 $d^j \to 0$，Lagrange 乘子是最优的。

需要注意的是，上面的讨论并没有在目标函数中加进没有物理意义的二次项 z_i^2。

3 Taylor 级数的性质

一个函数 $f(z)$ 能在 $z = 0$ 附近用 Taylor 级数展开

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} C_iT_i(z), \tag{9}$$

这里

$$T_i(z) = z^i, C_i = \frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}^if(z)}{\mathrm{d}z^i}\bigg|_{z=0}, \tag{10),(11}$$

也可用 m 项级数近似

$$f(z)=\sum_{i=0}^{m-1} C_i T_i(z)=C^{\mathrm{T}} T(z), \tag{12}$$

式中 $C^{\mathrm{T}}=[C_0 C_1 \cdots C_{m-1}]$，$T^{\mathrm{T}}(z)=[T_0(z) T_1(z) \cdots T_{m-1}(z)]$. 文献 [2] 指出随着用 Taylor 级数展开的项数增多函数与近似值的误差就小于某个定值. 有关 Taylor 级数的性质如下:

性质 1[1]. Taylor 级数的运算矩阵为

$$\int_0^z T(z) \mathrm{d} z=H T(z), \tag{13}$$

这里H是运算矩阵

$$H=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(m-1)} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}.$$

性质 2[2]. T_i 是 Taylor 级数,那么有一个重要的结果[2]

$$W=\int_0^\beta T(z) T^{\mathrm{T}}(z) \mathrm{d} z=(w_{ij})_{m \times m}, \tag{14}$$

这里

$$w_{ij}=\frac{\beta^{i+j+1}}{i+j+1}, \quad i, j=0,1,2, \cdots, m-1. \tag{15}$$

性质 3[2]. 对一个向量 $C^{\mathrm{T}}=[c_0 c_1 \cdots c_{m-1}]$，有下面结果

$$C^{\mathrm{T}} T(t) T^{\mathrm{T}}(t)=T^{\mathrm{T}}(t) \bar{C}^{\mathrm{T}}, \tag{16}$$

这里

$$\bar{C}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}
c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
c_1 & c_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
c_2 & c_1 & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{m-1} & c_{m-2} & c_{m-3} & c_{m-4} & \cdots & c_0
\end{pmatrix}.$$

定义 1. $T_i(t)(i=0,1, \cdots, m-1)$ 是 Taylor 级数,定义

$$\hat{T}_n(t)=[I_n T_0(t), I_n T_1(t), \cdots, I_n T_{m-1}(t)]^{\mathrm{T}}, \tag{17}$$

这里 I_n 是单位阵.

性质 4. $\hat{T}_n(z)$ 如定义 1, 则有

$$\bar{W}_n=\int_0^{t_f} \hat{T}_n(z) \hat{T}_n^{\mathrm{T}}(z) \mathrm{d} z=W \otimes I_n, \tag{18}$$

式中⊗是 Kronecker 积.

性质 5. $\hat{T}_n(z)$ 如定义 1, 则有

$$\int_0^z \hat{T}^{\mathrm{T}}(z)\mathrm{d}z = \hat{T}^{\mathrm{T}}(z)\overline{H}^{\mathrm{T}},$$

这里 $\overline{H}^{\mathrm{T}} = H^{\mathrm{T}} \otimes I_n$。

性质6. 如果 A 是 $k \times n$ 矩阵，$\hat{T}_n$ 如定义 1，那么

$$A\hat{T}_n^{\mathrm{T}} = \hat{T}_k^{\mathrm{T}}\overline{A},$$

这里

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix} = I_m \otimes A.$$

4 递阶大系统控制的 Taylor 级数方法

4.1 第一级控制问题

对给定 λ，设法求得 L_i 的最小化并满足约束(2)式。对于(2)式，用有限项 Taylor 级数近似 $x_i(t), u_i(t), z_i(t)$，可得

$$x_i(t) = \hat{T}^{\mathrm{T}}(t)[x_{i0}^{\mathrm{T}}, x_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, x_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$
$$u_i(t) = \hat{T}^{\mathrm{T}}(t)[u_{i0}^{\mathrm{T}}, u_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, u_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$
$$z_i(t) = \hat{T}^{\mathrm{T}}(t)[z_{i0}^{\mathrm{T}}, z_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, z_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$
$$A_i(t) = [A_{i0}A_{i1}\cdots A_{i(m-1)}]\hat{T}(t),$$
$$B_i(t) = [B_{i0}B_{i1}\cdots B_{i(m-1)}]\hat{T}(t),$$
$$C_i(t) = [C_{i0}C_{i1}\cdots C_{i(m-1)}]\hat{T}(t),$$

这里 A_{ik}, B_{ik} 和 $C_{ik}(i = 1,2,\cdots,n; k = 0,1,\cdots,m-1)$ 是 Taylor 级数系数矩阵，可应用(11)式求得。将 $x(0)$ 表示为

$$x_i(0) = \hat{T}^{\mathrm{T}}(t)[x_i^{\mathrm{T}}(0)O^{\mathrm{T}}\cdots O^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

这里 O 定义为 $n_i \times 1$ 向量 $(i = 1,2,\cdots,n)$。在 $[0,t]$ 积分(2)式得到

$$x_i(t) = \int_0^t A_i(t)x_i(t)\mathrm{d}t + \int_0^t B_i(t)u_i(t)\mathrm{d}t + \int_0^t C_i(t)z_i(t)\mathrm{d}t + x_i(0). \tag{19}$$

也有

$$\begin{aligned} A_i(t)x_i(t) &= [A_{i0}A_{i1}\cdots A_{i(m-1)}]\hat{T}(t)\hat{T}^{\mathrm{T}}(t)[x_{i0}^{\mathrm{T}}, x_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, x_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\ &= \hat{T}^{\mathrm{T}}(t)\overline{A}_i^{\mathrm{T}}[x_{i0}^{\mathrm{T}}, x_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, x_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

这里 $\overline{A}_i^{\mathrm{T}}$ 可由(16)式得到

$$\overline{A}_i^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{i0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{i1} & A_{i0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{i2} & A_{i1} & A_{i0} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{i(m-1)} & A_{i(m-2)} & A_{i(m-3)} & A_{i(m-4)} & \cdots & A_{i0} \end{pmatrix}.$$

类似有

$$B_i(t)u_i(t) = \hat{T}^{\mathrm{T}}(t)\overline{B}_i^{\mathrm{T}}[u_{i0}^{\mathrm{T}}, u_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, u_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$C_i(t)z_i(t) = \hat{T}^{\mathrm{T}}(t)\bar{C}_i^{\mathrm{T}}[z_{i0}^{\mathrm{T}}, z_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, z_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.$$

同样 $\bar{B}_i^{\mathrm{T}}$, $\bar{C}_i^{\mathrm{T}}$ 也同(16)式类似。

将上述各式代入(19)式，并应用性质 5，注意到 $T_i(t)$ 是相互独立的，可得

$$\begin{aligned}[x_{i0}^{\mathrm{T}}, x_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, x_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = &\bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{A}_i^{\mathrm{T}}[x_{i0}^{\mathrm{T}}, x_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, x_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\ &+ \bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{B}_i^{\mathrm{T}}[u_{i0}^{\mathrm{T}}, u_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, u_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\ &+ \bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{C}_i^{\mathrm{T}}[z_{i0}^{\mathrm{T}}, z_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, z_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\ &+ [x_i^{\mathrm{T}}(0)0\cdots0]^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{20}$$

上式也能表示为

$$\begin{aligned}\bar{X}_i &= (I_{mn_i} - \bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{A}_i^{\mathrm{T}})^{-1}[(\bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{B}_i^{\mathrm{T}})\bar{U}_i + (\bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{C}_i^{\mathrm{T}})\bar{Z}_i + \bar{X}_i(0)] \\ &= \bar{\bar{B}}_{i1}\bar{U}_i + \bar{\bar{C}}_{i1}\bar{Z}_i + \bar{\bar{F}}_{i1}, \end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$\bar{X}_i = [x_{i0}^{\mathrm{T}}, x_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, x_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \qquad \bar{U}_i = [u_{i0}^{\mathrm{T}}, u_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, u_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$Z_i = [z_{i0}^{\mathrm{T}}, z_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, z_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \qquad \bar{X}(0) = [x_0^{\mathrm{T}}(0)0\cdots0]^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{\bar{B}}_{i1} = (I_{mn_i} - \bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{A}_i^{\mathrm{T}})^{-1}(\bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{B}_i^{\mathrm{T}}), \qquad \bar{\bar{C}}_{i1} = (I_{mn_i} - \bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{A}_i^{\mathrm{T}})^{-1}(\bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{C}_i^{\mathrm{T}}),$$

$$\bar{\bar{F}}_{i1} = (I_{mn_i} - \bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{A}_i^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{X}_i(0),$$

这里 I_{mn_i} 是 $mn_i \times mn_i$ 单位阵。利用性质 3，$x_i^{\mathrm{T}}(t)Q_i(t)x_i(t)$ 和 $u_i^{\mathrm{T}}(t)R_i(t)u_i(t)$ 用 Taylor 级数近似

$$x_i^{\mathrm{T}}(t)Q_i(t)x_i(t) = \bar{X}_i^{\mathrm{T}}\hat{T}_{n_i}(t)\hat{T}_{n_i}^{\mathrm{T}}(t)\bar{Q}_i^{\mathrm{T}}\bar{X}_i, \tag{22}$$

$$u_i^{\mathrm{T}}(t)Q_i(t)u_i(t) = \bar{U}_i^{\mathrm{T}}\hat{T}_{m_i}(t)\hat{T}_{m_i}^{\mathrm{T}}(t)\bar{R}_i^{\mathrm{T}}\bar{U}_i, \tag{23}$$

这里 $\hat{T}_{n_i}(t)$ 和 $\hat{T}_{m_i}(t)$ 如定义 1，以及 $\bar{Q}_i^{\mathrm{T}}$ 与 $\bar{A}_i^{\mathrm{T}}$ 得到的方法一样，类似有 $\bar{R}_i^{\mathrm{T}}$。再用级数展开 $\lambda_i(t)$

$$\lambda_i(t) = \hat{T}_{q_i}^{\mathrm{T}}(t)[\lambda_{i0}^{\mathrm{T}}, \lambda_{i1}^{\mathrm{T}}, \cdots, \lambda_{i(m-1)}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = \hat{T}_{q_i}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\lambda}_i. \tag{24}$$

同样 $\lambda_i^{\mathrm{T}}(t)z_i(t)$ 和 $\lambda_j^{\mathrm{T}}(t)L_{ji}(t)x_i(t)$

$$\lambda_i^{\mathrm{T}}(t)z_i(t) = \bar{\lambda}_i^{\mathrm{T}}\hat{T}_{q_i}^{\mathrm{T}}(t)\hat{T}_{q_i}^{\mathrm{T}}(t)\bar{Z}_i, \tag{25}$$

$$\lambda_j^{\mathrm{T}}(t)L_{ji}(t)x_i(t) = \bar{\lambda}_j^{\mathrm{T}}\hat{T}_{q_j}^{\mathrm{T}}(t)\hat{T}_{q_j}^{\mathrm{T}}(t)\bar{L}_{ji}^{\mathrm{T}}\bar{X}_i, \tag{26}$$

这里 $\bar{L}_{ji}^{\mathrm{T}}$ 类似于(16)式。现在将(22)—(26)式代入(5)式可得

$$L_i = \frac{1}{2}\left[\bar{X}_i^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{X}_i + \bar{U}_i^{\mathrm{T}}\hat{R}_i\bar{U}_i + 2\left(\bar{\lambda}_i^{\mathrm{T}}\bar{W}_{q_i}\bar{Z}_i - \sum_j \bar{\lambda}_j^{\mathrm{T}}\bar{W}_{q_j}\hat{L}_{ji}\bar{X}_i\right)\right], \tag{27}$$

这里(用性质 4)

$$\hat{Q}_i = \bar{W}_{n_i}\bar{Q}_i^{\mathrm{T}}, \quad \hat{R}_i = \bar{W}_{m_i}\bar{R}_i^{\mathrm{T}}, \quad \hat{L}_{ji} = \bar{L}_{ji}^{\mathrm{T}}, \tag{28}$$

式中 $\bar{W}_{n_i}, \bar{W}_{m_i}, \bar{W}_{q_i}$, 和 $\bar{W}_{q_j}$ 与(18)式类似。

现在将(21)式代入(27)式则有

$$\begin{aligned} L_i = \frac{1}{2}\Big[&(\bar{\bar{B}}_{i1}\bar{U}_i + \bar{\bar{B}}_{i1}\bar{Z}_i + \bar{\bar{F}}_{i1})^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i(\bar{\bar{B}}_{i1}\bar{U}_i + \bar{\bar{B}}_{i1}\bar{Z}_i + \bar{\bar{F}}_{i1}) + \bar{U}_i^{\mathrm{T}}\hat{R}_i\bar{U}_i \\ &+ 2\bar{\lambda}_i^{\mathrm{T}}\bar{W}_{q_i}\bar{Z}_i - 2\sum_j \bar{\lambda}_j^{\mathrm{T}}\bar{W}_{q_j}\hat{L}_{ji}(\bar{\bar{B}}_{i1}\bar{U}_i + \bar{\bar{B}}_{i1}\bar{Z}_i + \bar{\bar{F}}_{i1})\Big]. \end{aligned} \tag{29}$$

对于第二级给定的 λ_i^*，最优控制问题简化成求解 $\bar{U}_i$ 和 $\bar{Z}_i$ 使得 L_i 最小。由最优化的必要条件

$$\frac{\partial L_i}{\partial \bar{U}_i}=0,\quad \frac{\partial L_i}{\partial \bar{Z}_i}=0, \tag{30}$$

得到

$$(\bar{\bar{B}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{B}}_{i1}+\hat{R}_i)\bar{U}_i+\bar{\bar{B}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{C}}_{i1}\bar{Z}_i+\bar{\bar{B}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{F}}_{i1}-\sum_j \bar{\lambda}_j^{*\mathrm{T}}\bar{W}_{qj}\hat{L}_{ji}\bar{\bar{B}}_{i1}=0 \tag{31}$$

$$\bar{\bar{C}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{B}}_{i1}\bar{U}_i+\bar{\bar{C}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{C}}_{i1}\bar{Z}_i+\bar{\bar{C}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{F}}_{i1}+\bar{\lambda}_i^{*\mathrm{T}}\bar{W}_{qi}-\sum_j \bar{\lambda}_j^{*\mathrm{T}}\bar{W}_{qj}\hat{L}_{ji}\bar{\bar{C}}_{i1}=0 \tag{32}$$

整理得

$$\bar{U}_i=\bar{\bar{C}}_{i2}\bar{Z}_i+\bar{\bar{F}}_{i21},\ \bar{Z}_i=\bar{\bar{B}}_{i2}\bar{U}_i+\bar{\bar{F}}_{i22}, \tag{33}$$

式中

$$\bar{\bar{C}}_{i2}=-(\hat{R}_i+\bar{\bar{B}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{B}}_{i1})^{-1}\bar{\bar{B}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{C}}_{i1}, \tag{34}$$

$$\bar{\bar{F}}_{i21}=-(\hat{R}_i+\bar{\bar{B}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{B}}_{i1})^{-1}\left(\bar{\bar{B}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{F}}_{i1}-\sum_j \bar{\lambda}_j^{*\mathrm{T}}\bar{W}_{qj}\hat{L}_{ji}\bar{\bar{B}}_{i1}\right), \tag{35}$$

$$\bar{\bar{B}}_{i2}=-(\bar{\bar{C}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{C}}_{i1})^{-1}\bar{\bar{C}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{B}}_{i1}, \tag{36}$$

$$\bar{\bar{F}}_{i22}=-(\bar{\bar{C}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{C}}_{i1})^{-1}\left(\bar{\bar{C}}_{i1}^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i\bar{\bar{F}}_{i1}+\bar{\lambda}_i^{*\mathrm{T}}\bar{W}_{qi}-\sum_j \bar{\lambda}_j^{*\mathrm{T}}\bar{W}_{qj}\hat{L}_{ji}\bar{\bar{C}}_{i1}\right). \tag{37}$$

由(33)式，解

$$\bar{U}_i=(I_{mm_i}-\bar{\bar{C}}_{i2}\bar{\bar{B}}_{i2})^{-1}(\bar{\bar{C}}_{i2}\bar{\bar{F}}_{i22}+\bar{\bar{F}}_{i21}), \tag{38}$$

$$\bar{Z}_i=\bar{\bar{B}}_{i2}(I_{mm_i}-\bar{\bar{C}}_{i2}\bar{\bar{B}}_{i2})^{-1}(\bar{\bar{C}}_{i2}\bar{\bar{F}}_{i22}+\bar{\bar{F}}_{i21})+\bar{\bar{F}}_{i22}. \tag{39}$$

将(38),(39)式代入(21)式，得

$$\begin{aligned}\bar{X}_i=&\bar{\bar{B}}_{i1}(I_{mm_i}-\bar{\bar{C}}_{i2}\bar{\bar{B}}_{i2})^{-1}(\bar{\bar{C}}_{i2}\bar{\bar{F}}_{i22}+\bar{\bar{F}}_{i21})\\&+\bar{\bar{C}}_{i1}\bar{\bar{B}}_{i2}(I_{mm_i}-\bar{\bar{C}}_{i2}\bar{\bar{B}}_{i2})^{-1}(\bar{\bar{C}}_{i2}\bar{\bar{F}}_{i22}+\bar{\bar{F}}_{i21})+\bar{\bar{C}}_{i1}\bar{\bar{F}}_{i22}+\bar{\bar{F}}_{i1}.\end{aligned} \tag{40}$$

4.2 第二级协调

任务是改进 λ_i 以达到全局最优. 由(8),(27)式得

$$\nabla_{\lambda\pi}(\bar{\lambda})|_{\lambda_i=\lambda_i^*}=\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}}=\bar{W}_{qi}\left(\bar{Z}_i-\sum_j \hat{L}_{ij}\bar{X}_j\right)=e_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

式中 $\bar{Z}_i$ 和 $\bar{X}_j$ 分别是(39),(40)式的值. 按照协调规则有

$$\bar{\lambda}^{j+1}=\bar{\lambda}^j+\alpha^j\nabla_{\lambda\pi}(\bar{\lambda}). \tag{41}$$

关联误差如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{Error}&=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_f}\left(z_i-\sum_j L_{ij}x_j\right)^{\mathrm{T}}\left(z_i-\sum_j L_{ij}x_j\right)\mathrm{d}t\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{Z}_i-\sum_j \hat{L}_{ij}\bar{X}_j\right)^{\mathrm{T}}\bar{W}_{qi}\left(\bar{Z}_i-\sum_j \hat{L}_{ij}\bar{X}_j\right).\end{aligned} \tag{42}$$

一旦总的关联误差是充分小的，那么就求得了系统最优值. 最优轨迹按下式得到:

$$x_i(t)=\hat{T}_{n_i}^{\mathrm{T}}(t)\bar{X}_i^*,\ u_i(t)=\hat{T}_{m_i}^{\mathrm{T}}(t)\bar{U}_i^*,\ z_i(t)=\hat{T}_{q_i}^{\mathrm{T}}(t)\bar{Z}_i^*.$$

式中 $\bar{X}_i^*$, $\bar{U}_i^*$ 和 $\bar{Z}_i^*$ 由(38)—(40)式确定.

算法步骤: (1) 先预估 $\bar{\lambda}^*$ 值送给低级; (2) 计算(38)—(40)式，得出 $\bar{X}_i$, $\bar{U}_i$, $\bar{Z}_i$，但这并不是最优的，将其送到第二级协调; (3)由(41)式算出修正的 $\bar{\lambda}_i$ 再送入到第一级; (4)由(42)式计算关联总误差，如满足要求，则停止; 如不满足误差要求，返回到(2).

5 仿真例子

例.[3]

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^{\mathrm{T}}Qx+u^{\mathrm{T}}Ru)\mathrm{d}t,$$

约束为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10t & 1\\ 1 & -5t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}.$$

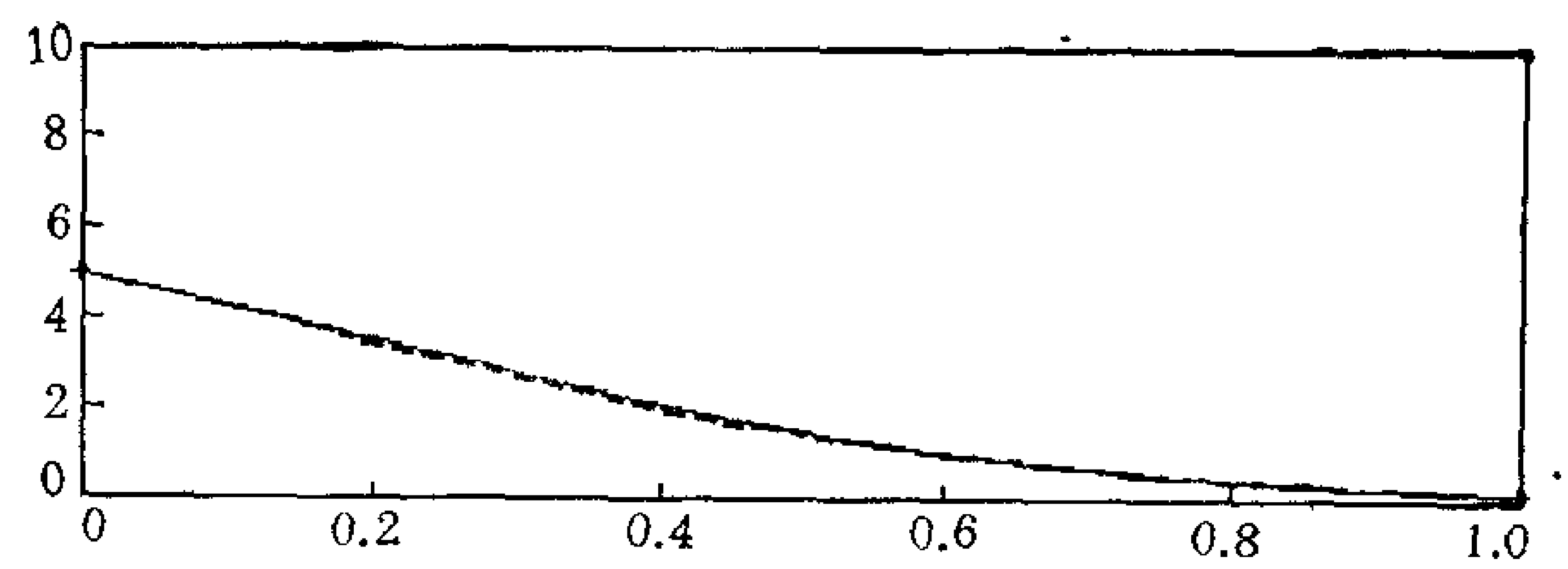
初始值

$$\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 10\end{pmatrix},$$

这里

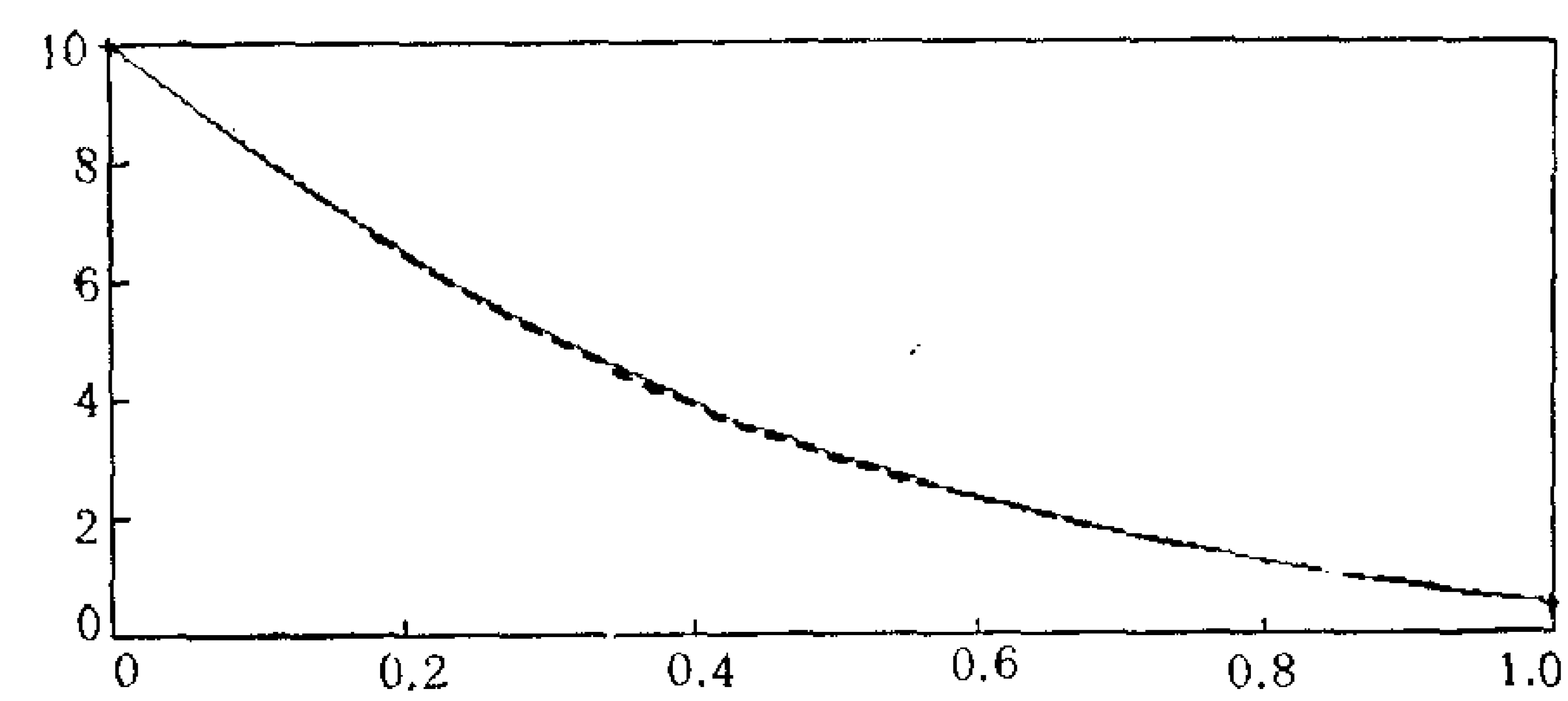
$$Q=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

将这个系统分解成两个子系统，然后每个变量用 Taylor 近似求解. 整个算法已由 PASCAL 语言编成，在 PC386 通过. 级数近似的项数多少，对最后的计算结果精度有影响，取近似项数太少，精度不够，太多又会增加计算量. 根据作者的经验，可在项数 6—15 之间选取. 整个递阶求解共用了 14 次迭代，误差达到 10^{-5}，最初迭代时，收敛较快，以后到第 9 次迭代，收敛慢下来，误差基本稳定在 10^{-5} 点上，出现这种情况的原因在于，目标协调法的第二级采用了梯度法，而梯度法在达到最优点附近时搜索相当缓慢. 得到的最



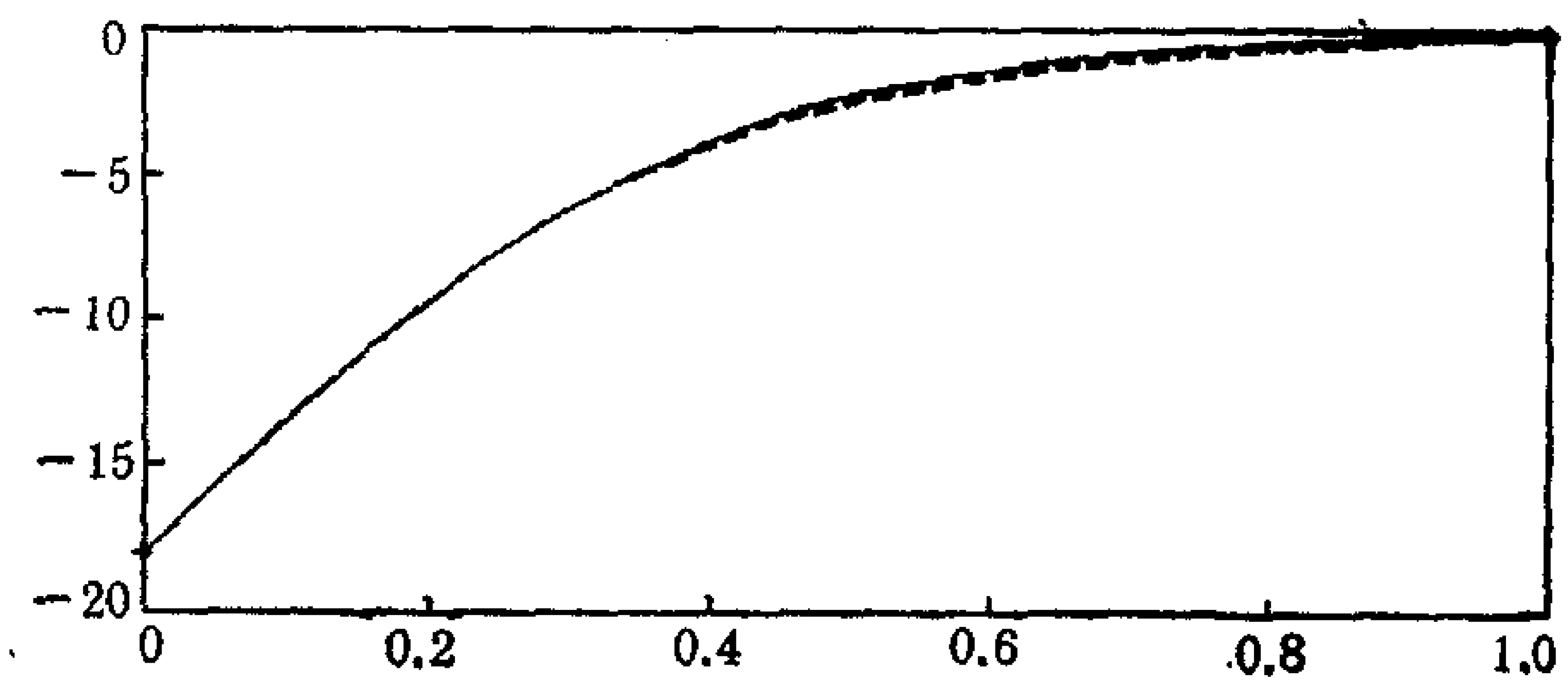
——文献[3]的结果　-----本文结果

图 1　最优状态 x_1



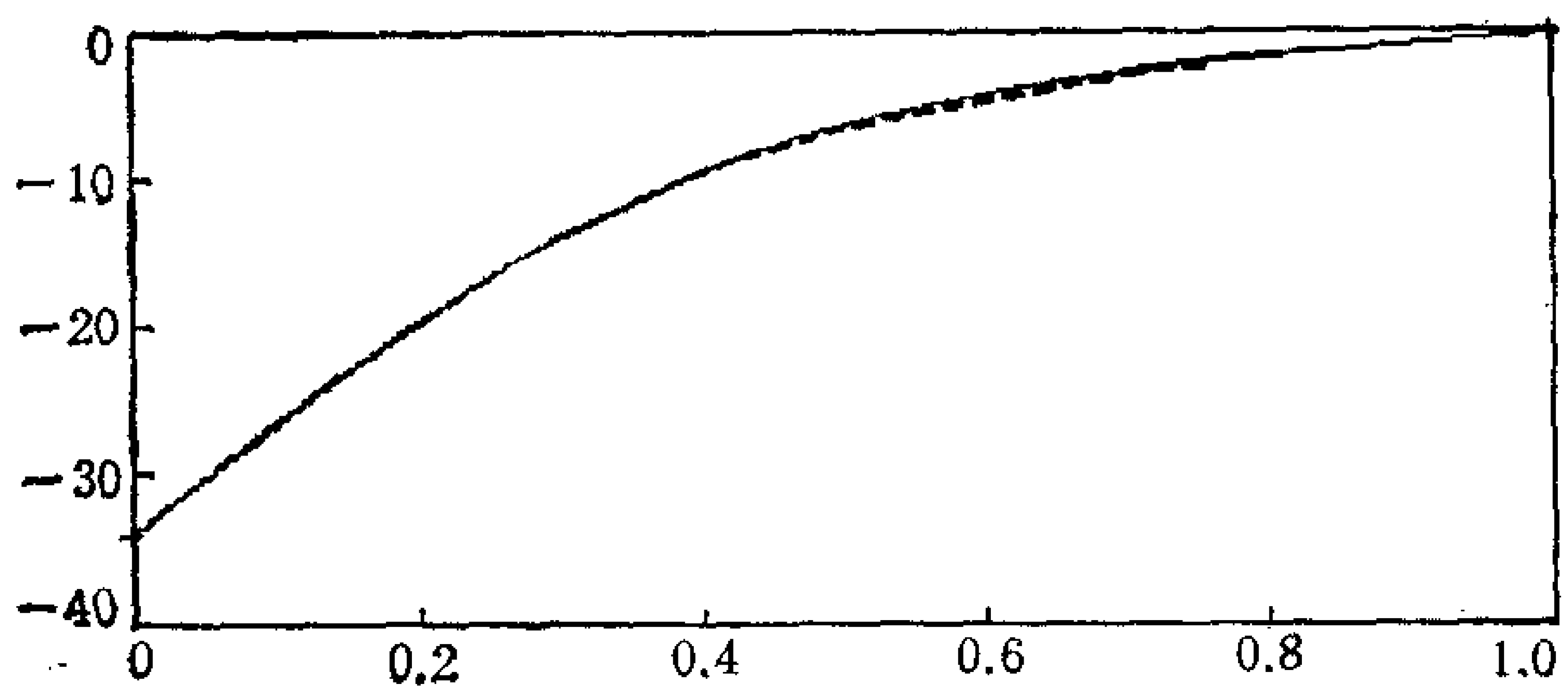
——文献[3]结果　-----本文结果

图 2　最优状态 x_2



——文献[3]结果 -----本文结果

图 3 最优控制 u_1



——文献[3]结果 -----本文结果

图 4 最优控制 u_2

优轨迹见图 1—4. 与文献[3]的结果相比是满意的. 需要注意的是本文的方法是对时变问题的求解,这个问题用通常的方法是相当麻烦的.

致谢 审者提出的建议丰富了本文的内容. 文中的某些结果采用了韩正之教授的建议. 在此，作者一并表示感谢.

参 考 文 献

[1] Razzaghi M and Arabshahi A. Optimal control of linear distributed-parameter systems via polynomial series. *Int. J. Systems Sci.*, 1989, **20**(7): 1141—1148.

[2] Razzaghi M and Razzaghi M, Taylor series analysis of time-varying multi-delay systems. *Int. J. Control*, 1989, **50**(1): 183—192.

[3] Zhu J M and Lu Y Z. Novel approach to hierarchical control via single-term Walsh series method. *Int. J. Systems Sci.*, 1988, **19**(9): 1859—1870.

[4] 黄苏南,唐功友. Legendre 级数在大系统递阶控制中的应用,青岛化工学院学报,1991,**12**(2): 66—73.

[5] 黄苏南,俞金寿. 泰勒级数在大系统递阶控制中的应用,自动化与仪器仪表,1992,(2): 15—18.

[6] Abramowitz M and Stecun I A. Handbook of mathematical functions (Washinton D. C., National bureau of Standards), 1967.

[7] Singh M G and Titli A. Hierarchical feedback control for large dynamical systems. *Int. J. Systems Sci.*, 1977, **8**(1): 31—47.

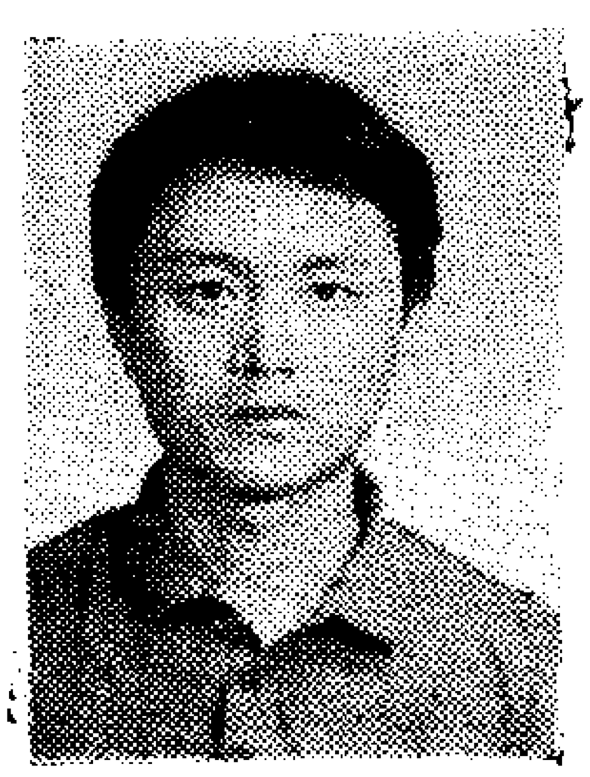
NEW APPROACH FOR SOLVING LARGE-SCALE LINEAR TIME-VARYING SYSTEMS

HUANG SUNAN　　SHAO HUIHE
(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University Shanghai 200030)

ABSTRACT

This paper presents a new method of hierarchical control for large-scale linear time-varying systems via the Taylor series. The algorithm is simple in form and computationally advantageous. An illustrative example shows the applicability of the proposed method in practice.

Key words: Large-scale systems, Taylor series, hierarchical control.



黄苏南　1962 年 12 月生. 1991 年 6 月毕业于华东理工大学自控系，获得硕士学位. 1994 年 6 月毕业于上海交通大学自控系，获博士学位. 主要研究领域：智能控制、鲁棒控制、大系统.

邵惠鹤　1960 年毕业于华东理工大学. 现任上海交通大学自动化研究所副所长、教授、博士生导师、中国自动化学会应用委员会和计算机应用委员会副主任、中国微生物学会生化过程模型化与控制学会副理事长. 承担多项“七五”、“八五”国家重点科技攻关项目，发表中外文学术论文 100 余篇，出版学术著作 10 部，获部市级科技进步奖 8 项. 当前研究领域为：工业过程建模与优化、多变量约束控制、广义推断控制、智能控制和神经网络等理论及其工业应用、计算机控制与优化集成系统等.