第22卷 第4期 自动化学报 Vol. 22, No. 4
1996年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1996

短文

应用最小二乘法辨识闭环系统[1)]

张颖 冯纯伯
（东南大学自动化研究所 南京 210096）

摘 要

研究了有色噪声扰动下闭环系统参数的无偏估计问题.基于偏差补偿最小二乘辨识方法，提出了一种用于闭环辨识的偏差补偿最小二乘法. 这种方法不需要对噪声建模，即可获得闭环系统前向通道和反馈通道传递函数中参数的渐近无偏估计.

关键词: 一致估计，最小二乘法，闭环系统.

1 引言

闭环系统的辨识问题一直受到人们的重视[1]. 目前提出的一些方法[1]，其辨识结果均依赖于辨识过程中对噪声的建模.

本文利用文[2]中的原理，通过对外部参考信号的滤波将某些已知零点嵌入到系统的前向和反馈通道中，然后利用这些零点提供的信息，消除最小二乘估计中噪声引起的偏差.

2 问题描述

图1表示单输入单输出闭环系统.

其中

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}, \tag{1}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}, \tag{2}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_p z^{-p}, \tag{3}$$

$$D(z^{-1}) = d_0 + d_1 z^{-1} + \cdots + d_q z^{-q}. \tag{4}$$

对系统做如下假定:

A.1 系统中所有信号均为平稳过程;

A.2 噪声 $v(k)$ 和 $w(k)$ 与 $r(k)$ 统计不相关;

---

1) 本文研究得到国家自然科学基金资助.
本文于1994年4月21日收到

A.3　$A(z^{-1}),B(z^{-1}),C(z^{-1})$ 和 $D(z^{-1})$ 均为稳定的多项式，且 $A(z^{-1})$和 $B(z^{-1})$，$C(z^{-1})$和 $D(z^{-1})$ 互质；

A.4　系统的模型参数 m,n,p,q 已知，不失一般性，设 $n>m$.

闭环辨识的任务是利用观测数据序列 $\{r(k),y(k),u(k)\}_{k=1}^{N}$，估计式(1)—(4)中各多项式中的系数，并希望得到它们的一致估计.

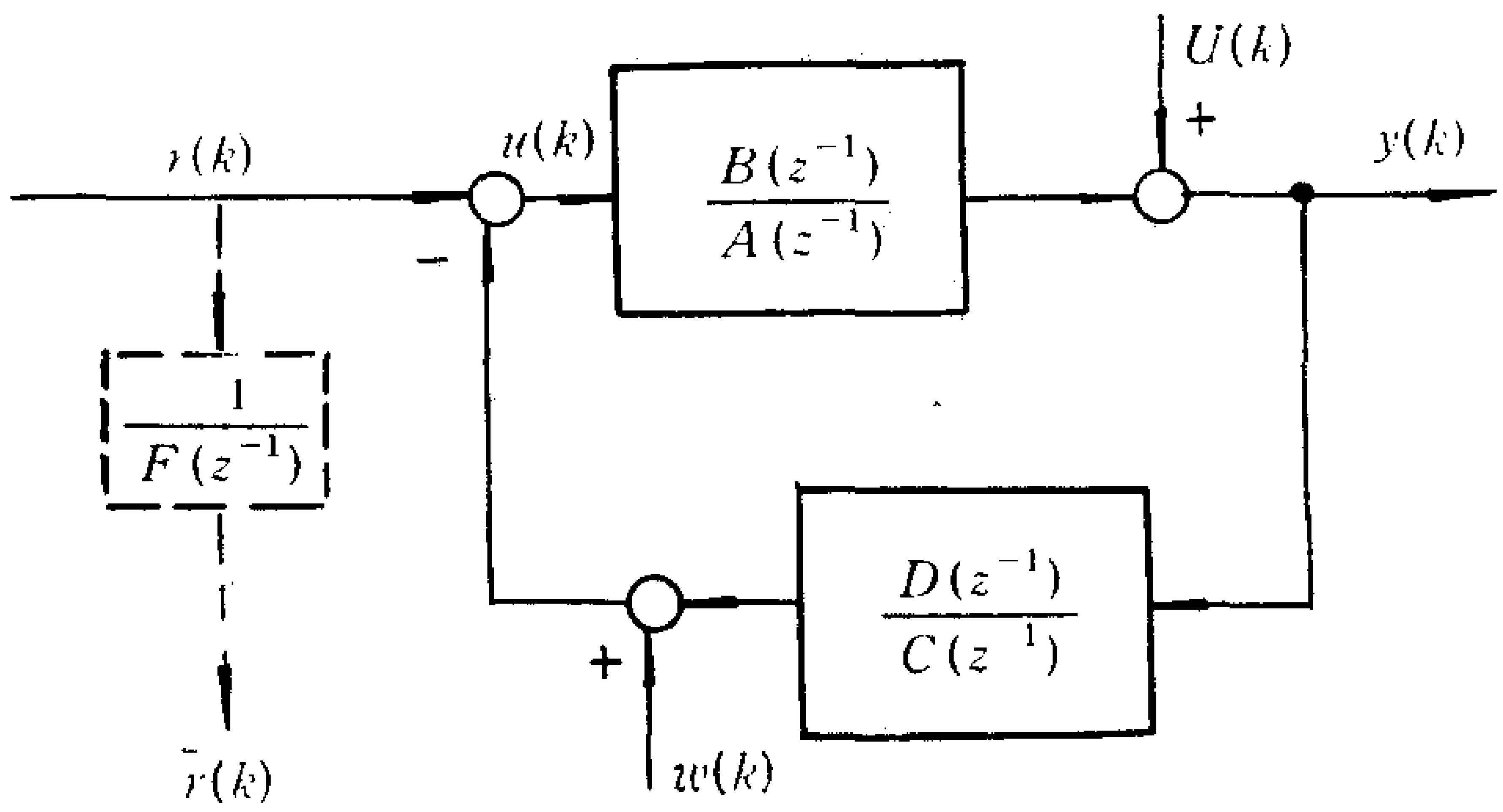

图 1　受有色噪声扰动的闭环系统

3　偏差补偿最小二乘法

基于文献[2]的原理，在系统的外部参考信号端引入一预滤器(见图 1)，即

$$\bar{r}(k)=\frac{1}{F(z^{-1})}r(k).$$

其中 $F(z^{-1})=1+f_1z^{-1}+\cdots+f_{n_f}z^{-n_f},n_f=\max(n+p,m+p)$，且 $F(z^{-1})$的 n_f 个稳定零点为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+p}$.

以 $\bar{r}(k)$ 为输入，$u(k)$ 和 $y(k)$ 为输出，则图 1 描述的闭环系统可写成

$$P(z^{-1})u(k)=\bar{Q}_1(z^{-1})\bar{r}(k)+\xi(k),\tag{5}$$

$$P(z^{-1})y(k)=\bar{Q}_2(z^{-1})\bar{r}(k)+\eta(k).\tag{6}$$

其中

$$P(z^{-1})=A(z^{-1})C(z^{-1})+B(z^{-1})D(z^{-1})$$
$$=1+p_1z^{-1}+\cdots+p_{n+p}z^{-n-p},\tag{7}$$

$$\bar{Q}_1(z^{-1})=A(z^{-1})C(z^{-1})F(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{2n+2p}\bar{q}_{1,i}z^{-i},\tag{8}$$

$$\bar{Q}_2(z^{-1})=B(z^{-1})C(z^{-1})F(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{m+n+2p}\bar{q}_{2,i}z^{-i}.\tag{9}$$

令

$$\bar{\theta}_1^{\mathrm{T}}=[p_1,\cdots,p_{n+p};\bar{q}_{1,1},\cdots,\bar{q}_{1,2n+2p}],\tag{10}$$

$$\bar{\theta}_2^{\mathrm{T}}=[p_1,\cdots,p_{n+p};\bar{q}_{2,1},\cdots,\bar{q}_{2,m+n+2p}],\tag{11}$$

$$\bar{\varphi}_1(k)=[-u(k-1),\cdots,-u(k-n-p),$$
$$\bar{r}(k-1),\cdots,\bar{r}(k-2n-2p)]^{\mathrm{T}},\tag{12}$$

$$\bar{\varphi}_2(k) = [-y(k-1),\cdots,-y(k-n-p),\bar{r}(k-1),\cdots,\ \bar{r}(k-m-n-2p)]^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

由(12)和(13)式可得

$$u(k) - r(k) = \bar{\varphi}_1^{\mathrm{T}}(k)\bar{\theta}_1 + \xi(k), \tag{14}$$

$$y(k) = \bar{\varphi}_2^{\mathrm{T}}(k)\bar{\theta}_2 + \eta(k). \tag{15}$$

这时系统参数的最小二乘估计及其渐近性质为

$$\hat{\bar{\theta}}_1^{LS}(N) = \bar{R}_1^{-1}(N)R_{1u}(N),\ \hat{\bar{\theta}}_2^{LS}(N) = \bar{R}_2^{-1}(N)\bar{R}_{2y}(N), \tag{16}$$

$$\lim_{N\to\infty}\bar{\theta}_1^{LS}(N) = \bar{\theta}_1 + \bar{R}_1^{-1}\bar{R}_\xi,\ \lim_{N\to\infty}\hat{\bar{\theta}}_2^{LS}(N) = \bar{\theta}_2 + \bar{R}_2^{-1}\bar{R}_\eta, \tag{17}$$

其中

$$\bar{R}_i = \lim_{N\to\infty}\bar{R}_i(N) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\bar{\varphi}_i(k)\bar{\varphi}_i^T(k),\quad i=1,2, \tag{18}$$

$$\bar{R}_\xi \triangleq E(\bar{\varphi}_1\xi) = [-r_{u\xi}(1),\cdots,-r_{u\xi}(n+p),0,\cdots,0]^{\mathrm{T}} \in R^{3n+3p}, \tag{19}$$

$$\bar{R}_\eta \triangleq E(\bar{\varphi}_2\eta) = [-r_{y\eta}(1),\cdots,-r_{y\eta}(n+p),0,\cdots,0]^{\mathrm{T}} \in R^{m+2n+3p}. \tag{20}$$

引入向量和矩阵

$$\beta = [\lambda_1^{2n+2p},\ \lambda_2^{2n+2p},\ \cdots,\ \lambda_{n+p}^{2n+2p}]^{\mathrm{T}} \in R^{(n+p)\times 1}, \tag{21}$$

$$H_1^T = \begin{bmatrix} 0, & \cdots, & 0, & \lambda_1^{2n+2p-1}, & \cdots, & \lambda_1, & 1 \\ 0, & \cdots, & 0, & \lambda_2^{2n+2p-1}, & \cdots, & \lambda_2, & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & \cdots, & 0, & \lambda_{n+p}^{2n+2p-1}, & \cdots, & \lambda_{n+p}, & 1 \end{bmatrix} \in R^{(n+p)\times(3n+3p)}, \tag{22}$$

$$H_2^T = \begin{bmatrix} 0, & \cdots, & 0, & \lambda_1^{m+n+2p-1}, & \cdots, & \lambda_1, & 1 \\ 0, & \cdots, & 0, & \lambda_2^{m+n+2p-1}, & \cdots, & \lambda_2, & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & \cdots, & 0, & \lambda_{n+p}^{m+n+2p-1}, & \cdots, & \lambda_{n+p}, & 1 \end{bmatrix} \in R^{(n+p)\times(m+2n+3p)}. \tag{23}$$

则由式(8),式(9)易知

$$H_1^T\bar{\theta}_1 = -\beta \ \text{和}\ H_2^T\bar{\theta}_2 = 0. \tag{24}$$

因此利用式(17)提供的渐近表示式,有

$$H_1^T\lim_{N\to\infty}\hat{\bar{\theta}}_1^{LS}(N) = H_1^T\bar{R}_1^{-1}\bar{R}_\xi - \beta, \tag{25}$$

$$H_2^T\lim_{N\to\infty}\hat{\bar{\theta}}_2^{LS}(N) = H_2^T\bar{R}_2^{-1}\bar{R}_\eta. \tag{26}$$

这两个式子提供了 $2(n+p)$ 个线性代数方程,它们唯一地确定了式(19)和(20)中的 $2(n+p)$ 个未知量,即

$$\bar{R}_\xi = K_1(H_1^T\bar{R}_1^{-1}K_1)^{-1}(H_1^T\lim_{N\to\infty}\hat{\bar{\theta}}_1^{LS}(N) + \beta), \tag{27}$$

$$\bar{R}_\eta = K_2(H_2^T\bar{R}_2^{-1}K_2)^{-1}(H_2^T\lim_{N\to\infty}\hat{\bar{\theta}}_2^{LS}(N), \tag{28}$$

其中 $K_1^T = [I_{n+p};0]^T \in R^{(n+p)\times(3n+3p)}$, $K_2^T = [I_{n+p};0]^n \in R^{(n+p)\times(m+2n+3p)}$, I_{n+p} 是 $n+p$ 阶单位阵,0 代表零矩阵.

于是参数 $\bar{\theta}_1$ 和 $\bar{\theta}_2$ 的渐近无偏估计可按下式获得:

$$\hat{\bar{\theta}}_1^{BELS}(N) = \hat{\bar{\theta}}_1^{LS}(N) - \bar{R}_1^{-1}(N)K_1(H_1^T\bar{R}_1^{-1}(N)K_1)^{-1}(H_1^T\hat{\bar{\theta}}_1^{LS}(N) + \beta), \tag{29}$$

$$\hat{\bar{\theta}}_2^{BELS}(N) = \hat{\bar{\theta}}_2^{LS}(N) - \bar{R}_2^{-1}(N)K_2(H_2^T\bar{R}_2^{-1}(N)K_2)^{-1}H_2^T\hat{\bar{\theta}}_2^{LS}(N). \tag{30}$$

由这两个式子以及式(8),(9)可获得多项式 $A(z^{-1})C(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})C(z^{-1})$ 中系数的估计. 再利用假设 $A.3$ 可从中推算出 $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$和 $C(z^{-1})$ 的估计. 最后利用 $P(z^{-1})$ 的估计及式(7)推算出 $D(z^{-1})$ 的估计.

与文[2]中叙述相同,可以证明按式(29)和(30)获得的估计 $\hat{\bar{\theta}}_i^{BELS}(N)$是其真值 $\bar{\theta}_i(i=$

1,2) 的一致估计. 因此,按上述步骤获得的多项式 $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$和 $D(z^{-1})$的估计也都是它们真值的一致估计.

4 仿真例子

考虑图 1 所示的系统,其中 $A(z^{-1}) = 1.0 - 1.425z^{-1} + 0.496z^{-2}$, $B(z^{-1}) = 0.173z^{-1} + 0.102z^{-2}$, $C(z^{-1}) = 1.0 - 1.5z^{-1} + 0.6z^{-2}$, $D(z^{-1}) = 3.485 - 5.422z^{-1} + 2.15z^{-2}$. 噪声 $v(k)$和 $w(k)$ 分别是有色噪声,它们分别由以下两个 MA 过程模拟, $v(k) = e(k) + 0.5e(k-1)$ 和 $w(k) = e(k) + 0.7e(k-1) + 0.8e(k-2)$,其中 $e(k)$ 是零均值单位方差白噪声. 此例中,滤波器 $F(z^{-1})$ 取成

$$F(z^{-1}) = (1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.6z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})(1 - 0.8z^{-1}).$$

表 1 给出了观测数据长度分别为 $N = 200$, $N = 500$, 和 $N = 1000$ 时参数估计值的均值及方差. 表中数据表明,利用本文提供的方法可在有色噪声扰动下获得高精度的闭环参数估计.

表 1　仿真结果

N	真值	200	500	1000
a_1	−1.425	−1.368±0.098	−1.389±0.067	−1.387±0.047
a_2	0.496	0.513±0.087	0.509±0.070	0.501±0.061
b_1	0.173	0.165±0.065	0.169±0.071	0.168±0.059
b_2	0.102	0.114±0.088	0.108±0.069	0.105±0.053
c_1	−1.5	−1.468±0.118	−1.488±0.085	−1.491±0.067
c_2	0.6	0.627±0.078	0.612±0.061	0.614±0.055
d_0	3.485	3.446±0.093	3.451±0.087	3.451±0.059
d_1	−5.422	−5.3861±0.091	−5.392±0.073	−5.414±0.084
d_2	2.15	2.181±0.079	2.098±0.063	2.111±0.064

参　考　文　献

[1] Gustavsson I, Ljung L, Söderström T. Identification of processes in closed-loop: identifiability and accuracy aspects. *Automatica*, 1977, **13**(2): 59—76.

[2] Feng Chunbo, Zheng Weixing. Identification of stochastic systems with correlated noise. IEE Proc.-D, 1991, **138** (5):484—492.

IDENTIFICATION OF CLOSED-LOOP SYSTEMS USING LEAST-SQUARE METHOD

Zhang Ying　Feng Chunbo

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096)

Abstract

This paper studies the problem of unbiasedly estimating the parameters of closed-loop system in the presence of colored noises. A new bias-eliminating least-square method is proposed, which can achieve consistent estimates of transfer function in forward and feedback paths even without the noise models.

Key words: Consistent estimation, least-square method, closed-loop system.