第22卷 第3期 1996年5月 | 自 动 化 学 报 ACTA AUTOMATICA SINICA | Vol. 22, No. 3 May, 1996

研究简报

多项式 H_∞ 范数的一种解析算法

黄 永 宣
(西安交通大学信控系 西安 710049)

关键词: H_∞ 范数,多项式,解析算法.

1 引言

近年来，H_∞ 范数及其优化理论已经在控制理论与应用的许多领域中得到广泛地使用. 但是,现有的 H_∞ 范数的计算都是逐次逼近算法[1,2]，这种算法计算量大且比较繁琐. 因此，在某些实际应用中(如系统的在线辨识)难以满足计算时间短的要求. 例如，文献[1]提出的逐次逼近算法，计算 $c(z)=1-z-z^2$ 的 $\|c(z)\|_\infty$ 范数需要迭代 1500 次才能达到相对误差小于 0.00154. 为了大幅度减少计算量,并满足任意计算精度，本文提出一种计算多项式 H_∞ 范数的解析算法. 该算法只要计算与多项式阶次相同的数据，便可得到任意精度的结果.

2 $\|h(z)\|_\infty$ 范数的解析算法

设多项式 $h(z)$ 表示为

$$h(z)=h_0+h_1z+\cdots+h_nz^n,\ h_0\cdot h_n\neq 0. \tag{1}$$

取 $f(z)$ 为

$$f(z)=h(z)\cdot h(z^{-1})=\gamma_0+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j(z^j+z^{-j}). \tag{2}$$

其中

$$\gamma_0=\sum_{k=0}^{n}h_k^2,\qquad \gamma_j=\sum_{k=0}^{n}h_k\cdot h_{k+j}\ (h_k=0,k>n). \tag{3}$$

$\|h(z)\|_\infty$ 范数的定义由下式给出:

$$\begin{aligned}\|h(z)\|_\infty&=\sup_{|z|<1}|h(z)|=\operatorname*{ess\,sup}_{\theta\in[0,2\pi]}|h(e^{j\theta})|\\&=\operatorname*{ess\,sup}_{\theta\in[0,2\pi]}|h(e^{j\theta})\cdot h(e^{-j\theta})|^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{4}$$

于是,(2)式可以写成

本文于 1994 年 3 月 7 日收到.

$$f(e^{i\theta}) = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{n} 2\gamma_j \cos j\theta. \tag{5}$$

式中 $\cos j\theta$ 可以利用表 1 化成 $\cos\theta$ 的函数. 因此, $f(e^{i\theta})$ 也可以表示成 $\cos\theta$ 的一元函数,即

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= \gamma_0 + 2\gamma_1\cos\theta + 2\gamma_2\cos 2\theta + \cdots + 2\gamma_n\cos n\theta \\ &= (\gamma_0 - 2\gamma_2 + 2\gamma_4 - 2\gamma_6 + \cdots) + (2\gamma_1 - 6\gamma_3 + 10\gamma_5 \\ &\quad - 14\gamma_7 + \cdots)\cos\theta + (4\gamma_2 - 16\gamma_4 + 36\gamma_6 - 64\gamma_8 + \cdots)\cos^2\theta \\ &\quad + (8\gamma_3 - 40\gamma_5 + 112\gamma_7 - 240\gamma_9 + \cdots)\cos^3\theta + \cdots \\ &= f_0 + \sum_{l=1}^{n} f_l \cos^l\theta = f(\cos\theta). \end{aligned} \tag{6}$$

表 1 从 $\cos j\theta$ 到 $\cos\theta$ 的变换表

$\cos 2\theta$	$2\cos^2\theta - 1$
$\cos 3\theta$	$4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
$\cos 4\theta$	$8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$
$\cos 5\theta$	$16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$
$\cos 6\theta$	$32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$
$\cos 7\theta$	$64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$
$\cos 8\theta$	$128\cos^8\theta - 256\cos^6\theta + 160\cos^4\theta - 32\cos^2\theta + 1$
…	…

根据复变函数理论,因为 $h(e^{-i\theta})$ 是 $h(e^{i\theta})$ 的共轭函数,所以 $f(e^{i\theta})=h(e^{i\theta})\cdot h(e^{-i\theta})$ 是一个其值为正的实函数. 自变量 θ 在 $[0,2\pi]$ 取值. 对于 $\theta\in[0,2\pi]$, 如果能求出 $f(e^{i\theta}) = f(\cos\theta)$ 的极值点,则 $\|h(z)\|_\infty$ 范数就等于 $f(e^{i\theta})$ 的最大极值的平方根. 因此,现在的问题是求出 $f(e^{i\theta})$ 对 θ 的极值. 为此,取(6)式对 θ 微分,得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f(e^{i\theta})}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}f(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{\mathrm{d}f(\cos\theta)}{\mathrm{d}\cos\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta} \\ &= -\sin\theta(f_1 + 2f_2\cos\theta + 3f_3\cos^2\theta + \cdots + nf_n\cos^{n-1}\theta) \\ &= -\sin\theta(g_1 + g_2\cos\theta + g_3\cos^2\theta + \cdots + g_n\cos^{n-1}\theta) \\ &= -\sin\theta g(\cos\theta) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

式中 $g(\cos\theta) = g_1 + g_2\cos\theta + \cdots + g_n\cos^{n-1}\theta$, $g_i = i\cdot f_i (i = 1,2,\cdots,n)$. (7)式成立的条件是

(i) $\sin\theta = 0$, $\theta = 0, \pi$, $\cos\theta = \pm 1$; (8)

(ii) $g(\cos\theta) = 0$, 因为 $g(\cos\theta)$ 是 $\cos\theta$ 的 $n-1$ 次多项式,故有 $n-1$ 个解,设 $\cos\theta = \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}$ 是其解,即 $g(\lambda_i) = 0, i = 1,2,\cdots,n-1$.

将 $\cos\theta = 1,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}$ 代入(6)式,便得到 $f(\cos\theta)$ 的 n 个极值

$$f(1), f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_{n-1}). \tag{9}$$

于是, $\|h(z)\|_\infty$ 范数为

$$\begin{aligned} \|h(z)\|_\infty &= \operatorname*{ess\,sup}_{\theta\in[0,2\pi]} |h(e^{i\theta})\cdot h(e^{i\theta})|^{\frac{1}{2}} \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{\theta\in[0,2\pi] \\ \cos\theta}} |f(\cos\theta)|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \max_{-1,1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}} \{f(-1)^{\frac{1}{2}}, f(1)^{\frac{1}{2}}, f(\lambda_1)^{\frac{1}{2}}, \cdots, f(\lambda_{n-1})^{\frac{1}{2}}\}. \tag{10}$$

3　示例分析

为了说明该算法，下面分析一个示例。

例. 已知 $h(z) = 1 - z - z^2$，求 $\|h(z)\|_\infty$ 范数.

根据(2)—(10)式，有

$$f(z) = h(z) \cdot h(z^{-1}) = 3 - (z^2 + z^{-2}),$$

$$f(e^{j\theta}) = 5 - 4\cos^2\theta,$$

$$\frac{df(\cos\theta)}{d\theta} = -\sin\theta \cdot (-8\cos\theta) = 0,$$

$$\cos\theta = \pm 1,\ \cos\theta = 0,\ f(\pm 1) = 1,\ f(0) = 5,$$

$$\|h(z)\|_\infty = \max_{1,0}\{1^{\frac{1}{2}}, 5^{\frac{1}{2}}\} = \sqrt{5}.$$

4　结束语

本文所提出的算法具有简单明了、计算量少的特点，同时因为是解析算法，可以得到任意精度.

在前面的分析中，只考虑了标量多项式的情况．但它很容易推广到标量有理函数的情况中．至于在矩阵多项式中的推广应用，尚在研究之中.

参　考　文　献

[1] Guo L, Xia L G, Liu Y. Recursive algorithm for computation of the H_∞-norm of polynomials, *IEEE Trans. Auto. contr.*, 1988, **33**: 1155—1157.

[2] Wu N E, Gu G. Discrete Fourier transform and H_∞ approximation. *IEEE Trans. Auto. contr.* 1990, **35**; 1044—1046.

ANALYTICAL ALGORITHM FOR THE COMPUTATION OF THE H_∞-NORM OF POLYNOMIALS

Huang Yongxuan

(*Dept. of Information & control Engr., Xi'an Jiaotong Univ., Xi'an* 710049)

Key words: H_∞-norm, polynomials, analytical algorithm.