第 22 卷 第 3 期
1996 年 5 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 22, No. 3
May, 1996

研究简报

由降阶模型设计全阶模型的 H^{∞} 鲁棒控制器[1)]

王炎生　陈宗基
(北京航空航天大学自动控制系　北京　100083)

关键词: 模型降阶, H^{∞} 鲁棒控制器,控制输入约束.

1 引言

近年来，具有良好鲁棒性的 H^{∞} 方法已经越来越多地应用于飞机控制系统设计研究中. 但由于像飞机这样的被控对象结构都比较复杂,其运动状态方程均是高阶的,不易直接进行控制律设计或用 H^{∞} 方法得到的控制器阶数太高,而导致实现困难. 因此，控制设计的第一步往往是将原全阶模型降阶,对降阶模型设计出 H^{∞} 鲁棒控制器，然后再与全阶模型闭合. 在全阶模型闭环仿真结果与设计指标相差不大时，这样的 H^{∞} 控制器[1-2]即被认可,而不能完全达到预期的闭环鲁棒性指标. 本文对有输出端乘性扰动不确定性的高阶系统,应用 Schur 平衡截尾方法[3]对其进行降阶，然后用带控制输入约束的 H^{∞} 方法[2]对降阶模型设计 H^{∞} 鲁棒控制器，并推导出全阶模型闭环与降阶模型闭环鲁棒性指标间的联系,从而得到保证全阶模型闭环设计指标的 H^{∞} 鲁棒控制器.

2 模型降阶和 H^{∞} 方法

考虑单位反馈控制系统:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v} - G\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u} = K\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z} = G\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

将其记为 $\Pi(G,K)$. 其中 G 为输入输出变量个数相等的对象; $\boldsymbol{v}$ 为外部输入; $\boldsymbol{y}$ 为控制器输入; $\boldsymbol{u}$ 为控制输入; $\boldsymbol{z}$ 为控制输出; K 为要设计的控制器. 假设真实的系统模型为 $\widetilde{G}$, 有控制输出端乘性扰动,即

$$\widetilde{G} = (I + \Delta)G, \tag{2}$$

其中 G 为高阶标称对象,在虚轴上无极点,阶数为 n.

首先对 G 进行降阶. 若 G 为稳定的，通过将 $G(s)$ 状态空间平衡实现中对应可控性

1) 航空科学青年基金和博士后科学基金资助课题. 本文曾在 1994 中国控制会议上宣读.
本文于 1993 年 12 月 30 日收到.

和可观性都小的状态去掉,而得到 k 阶 ($k<n$) 降阶系统 $\hat{G}$, 且有[3]

$$\|G-\hat{G}\|_\infty \leqslant 2(\sigma_{k+1}+\cdots+\sigma_n), \tag{3}$$

其中 $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_k > \sigma_{k+1} \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n > 0$, σ_i 为 $G(s)$ 的 Hankel 奇异值. 若 G 有不稳定极点,可只对其稳定部分降阶.

考虑降阶误差

$$G=\hat{G}+\delta, \tag{4}$$

其中 $\hat{G}$ 与 G 不稳定极点个数相同. 于是

$$\|\delta\|_\infty \leqslant 2(\sigma_{k+1}+\cdots+\sigma_n) \triangleq \mu(G,\hat{G}). \tag{5}$$

记 $P(W)=\{\Delta(s):\Delta(s)\in RH_\infty, \|\Delta W^{-1}\|_\infty<1$, 或者 $\Delta(s)\in RL_\infty$,

$$\eta(G_\Delta)=\eta(G),\ \|\Delta W^{-1}\|_\infty<1\}. \tag{6}$$

其中 $W(s)$ 为加权; $\eta(\cdot)$ 表示闭右半平面的极点个数; RL_∞ 为无虚轴极点的真实有理传递函数矩阵全体; RH_∞ 由真实有理稳定传递函数全体组成.

由文[4]第三章容易推导出下面的定理.

定理 1. (1) $\forall\Delta\in P(W)$, K 都能镇定加性扰动 $G_\Delta=G+\Delta$ 的充要条件是 K 镇定 G, 且 $\|WK(I+GK)^{-1}\|_\infty \leqslant 1$; (2) $\forall\Delta\in P(W)$, K 都能镇定输出端乘性扰动 $G_\Delta=(I+\Delta)G$ 的充要条件是 K 镇定 G, 且 $\|WGK(I+GK)^{-1}\|_\infty \leqslant 1$.

用带控制输入约束的 H^∞ 方法对 $\hat{G}$ 设计控制器 K, 即求控制器 K 使得系统 $\Pi(\hat{G},K)$ 内部稳定,且在 $\|\Phi\|_\infty \leqslant 1$ 的条件下极小化 $\|\Phi\|_\infty$, 其中

$$\Phi=\begin{bmatrix} W_1(I+\hat{G}K)^{-1} \\ W_2K(I+\hat{G}K)^{-1} \\ W_3\hat{G}K(I+\hat{G}K)^{-1}\end{bmatrix}, \tag{7}$$

$W_1(s)$, $W_2(s)$ 和 $W_3(s)$ 为加权函数矩阵. 应用 MATLAB 软件容易得到 H^∞ 控制器 $K(s)$ 的状态空间解[5].

3 主要结果

取 W_2 为常数对角阵,使得

$$\bar{\sigma}(W_2^{-1})\cdot\mu(G,\hat{G})<1, \tag{8}$$

其中 $\bar{\sigma}(\cdot)$ 表示最大奇异值.

由于 K 镇定 $\hat{G}$, $\|\Phi\|_\infty \leqslant 1$, 可知

$$\|W_2K(I+\hat{G}K)^{-1}\|_\infty \leqslant 1, \tag{9}$$

且由(5),(8)式还有

$$\|\delta W_2^{-1}\|_\infty \leqslant \|\delta\|_\infty\cdot\|W_2^{-1}\|_\infty \leqslant \mu(G,\hat{G})\cdot\bar{\sigma}(W_2^{-1})<1, \tag{10}$$

因此,根据定理 1 可知 K 能镇定 G. 这正是采用带控制输入约束 H^∞ 方法的主要原因.

记

$$S(G,K)=(I+GK)^{-1}, \tag{11}$$

$$T(G,K)=GK(I+GK)^{-1}, \tag{12}$$

$$\widetilde{W}_1(s)=(1-\mu(G,\hat{G})\bar{\sigma}(W_2^{-}))\cdot W_1(s), \tag{13}$$

$$\widetilde{W}_3^{-1}(s)=(W_3^{-1}(s)+\mu(G,\hat{G})\bar{\sigma}(W_2^{-1})\cdot I)/(1-\mu(G,\hat{G})\bar{\sigma}(W_2^{-1})), \tag{14}$$

则有
$$\bar{\sigma}(S(\hat{G},K)(j\omega)) \leqslant \bar{\sigma}(W_1^{-1}(j\omega)), \tag{15}$$
$$\bar{\sigma}(T(\hat{G},K)(j\omega)) \leqslant \bar{\sigma}(W_3^{-1}(j\omega)), \tag{16}$$
$$\bar{\sigma}(S(G,K)(j\omega)) \leqslant \bar{\sigma}(\widetilde{W}_1^{-1}(j\omega)), \tag{17}$$
$$\bar{\sigma}(T(G,K)(j\omega)) \leqslant \bar{\sigma}(\widetilde{W}_3^{-1}(j\omega)). \tag{18}$$

根据定理1,由(18)式可导出K镇定输出端乘性扰动:
$$\widetilde{G} = (I + \Delta)G,\ \Delta \in P(\widetilde{W}_3). \tag{19}$$
而由(17)式知闭环系统 $\Pi(G,K)$ 的鲁棒性能指标,即低频段的干扰抑制能力。于是，根据全阶模型闭环 $\Pi(G,K)$ 与降阶模型闭环 $\Pi(\hat{G},K)$ 设计指标间的联系(13)和(14)式，可得到完全满足全阶闭环系统 $\Pi(G,K)$ 的鲁棒性设 计指标要求的低阶 H^{∞} 控制器 K。

具体设计方法的步骤如下:

第一步。模型降阶。由 (1) 式描述的系统G的状态空间实现为 (A, B, C)，阶数为n。用平衡截尾降阶方法对 (A, B, C) 进行降阶,得到k阶 $(k < n)$ 降阶系统 $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$，$\hat{G}(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}$。若$G$是不稳定的，则将$G$的状态空间实现化成稳定和不稳定两部分之和,只对其稳定部分进行降阶，再与不稳定部分相加得到降阶系统 $\hat{G}$。此时，(5)式中的σ_i为稳定部分的 Hankel 奇异值。

第二步。加权选取。根据对 $\Pi(G, K)$ 鲁棒性设计指标、降阶误差 (5) 式及关系式 (13)—(14),选取合适的加权 $W_1(s), W_2, W_3(s)$。

第三步。应用 MATLAB 软件计算出 $K(s)$ 的状态空间实现,绘制闭环系统 $\Pi(G, K)$的奇异值 Bode 图,并对 $W_1(s)$ 的系数进行寻优。

第四步。通过频域和时域仿真评价闭环控制系统 $\Pi(G,K)$ 的鲁棒性指标。若不满意,则返回到第二步重新选取加权,再按步继续进行。

参　考　文　献

[1] Chiang R Y, Safonov M G *et al.* A fixed H^{∞} controller for supermaneuverable fighter performing the Herbst maneuver. *Automatica*, 1993, **29**(1): 111—128.

[2] Garg S. Robust integrated flight/propulsion control design for a STOVL aircraft using Hinfinity control design techniques. *Automatica*, 1993, **29**(1): 129—146.

[3] Safonov M G, Chiang R Y. A Schur method for balanced-trucation model reduction. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1989, **34**: 729—733.

[4] McFarlane D C, Glover K. Robust controller design using normalized coprime factor plant description. Lecture Notes in Control and Information, Berlin: Springer-Verlag, 1990, 138.

[5] Chiang R Y, Safonov M G. Robust-Control Toolbox, 1988, Math Works, Natick, MA, U.S.A.

DESIGN H^{∞} ROBUST CONTROLLER FOR FULL-ORDER MODEL FROM THE REDUCED-ORDER MODEL

Wang Yansheng　　Chen Zongji

(Dept. of Auto. Control, Beijing Univ. of Aero. & Astro., Beijing 100083)

Key words: Model reduction, H^{∞} robust controller, control input constraint.