第22卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 22, No. 3
1996 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1996

短 文

具不定二次项的一般代数 RICCATI 方程解的存在性问题[1)]

陈善本 张福恩 张 铨 吴 林
(哈尔滨工业大学材料学院和航天学院 哈尔滨 150001)

摘 要

讨论具有不定二次项的一般代数 RICCATI 方程 (GARE) 的实对称镇定解的存在性问题. 利用 GARE 相应的微分方程解的性质,建立了 GARE 实对称镇定解存在性的充分条件.

关键词: 代数 RICCATI 方程,鲁棒最优控制,微分对策.

1 引言

在文献[1]中讨论不确定系统鲁棒最优控制的 H_∞ 状态反馈解和在文献[2]中讨论具 L_2 有界不确定性扰动系统时域 MAXMIN 优化问题解的存在性时,最终结论都导出了一个形如

$$A'P + PA + Q - PMP = 0 \tag{1}$$

的代数 RICCATI 方程的实对称镇定解的存在性问题,即满足式(1)的 $P = P'$ 并使 $\mathrm{Re}\lambda(A - MP) < 0$ 的存在性问题. 在文献[1,2]的结论中,二次项系数阵 $M = B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2'$ 因参数 η 的取值不同使M不具有确定的正、负定性. 在本文中,将讨论更一般的情形,只假设 $M = M'$, $Q = Q'$ 的 GARE 问题. "′"表示矩阵或向量的转置, $\mathrm{Re}\lambda(.)$ 表示特征值的实部. 许多控制问题,诸如不确定系统的镇定及鲁棒最优设计、线性二次微分对策和网络综合等问题的求解最终都可归结为 GARE 的求解的数学问题. 因此,对 GARE 问题的研究具有重要的理论意义. 这也是控制理论界广泛注意的一个难题. 许多学者在这个问题上作了大量努力,取得了许多重要结果. 然而,这些结论一般都是只针对M具有正定或负定,仅Q为不定的情形作出的. 对M和Q均不定甚至仅对M不定的一般情况解的问题仍在研究之中.

---

1) 本文受国家自然科学基金(69474014)资助.
本文于 1994 年 3 月 17 日收到.

2 引理准备

首先考虑(1)式的简化情况，设 $Q = Q_0 > 0$ 即

$$A'P + PA + Q_0 - PMP = 0,\ M = M'. \tag{2}$$

为建立(2)式的实对称解存在条件，先讨论(2)式相应的微分方程：

$$-\dot{P} = A'P + PA + Q_0 - PMP,\ P(T,T) = P_T \tag{3}$$

解的性质，有以下结论。

引理 2.1. 微分方程(3)在 $t\in[0, T]$ 上对所有的 $T < \infty$ 有解 $P(t, T)$ 的充要条件是

$$\phi_{21}(T-t)P_T + \phi_{22}(T-t) \tag{4}$$

在 $t\in[0,T]$ 上可逆。

这里 $\phi_{21}(T-t)$ 和 $\phi_{22}(T-t)$ 定义为

$$\exp(\tilde{A}(T-t)) \triangleq \begin{bmatrix} \phi_{11}(T-t) & \phi_{12}(T-t) \\ \phi_{21}(T-t) & \phi_{22}(T-t) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

式中 $\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A' & -Q \\ -M & A \end{bmatrix}$，$\phi_{ij}(T-t)\in R^{n\times n}, i,j = 1,2$.（证明略）

由于(3)式的时不变性，其解可用 $P(T-t)$ 表示。令 $s = T - t$，即

$$P(t,T) = P(T-t) = P(s).$$

终端条件记为 $P(T,T)\triangleq P_T = P(0), P(0,T) = P(T)\triangleq P_0$.

关于 $P(t,T)$ 的性质有如下结论。

引理 2.2. 假设 $P(t,T)$ 是(3)式在 $t\in[0,T]$ 上对所有 $T<\infty$ 和 $P_T = 0$ 的解，则 $P(t,T)$ 在正定意义下是随 t 的减少而增加的，即 $P(s)$ 随 s 增。

证明。参见线性二次微分对策问题及文献[4]的引理 A2.

引理 2.3. 假设(3)式是在 $t\in[0,T]$ 上对所有 $T<\infty$ 和 $P_T = 0$ 有解 $P(t,T)$，则当 $T\to\infty$，$P(t,T)$ 有一个与 T 独立的上界 $\bar{P}$. 且 $\bar{P}\geqslant 0$ 满足(2)式。

证明。参考线性二次微分对策问题(略)。

引理 2.4. 如果(3)式有实对称解 $\bar{P}$，则 $\bar{P}>0$（证明略）。

引理 2.5. 假设 $\bar{P} = \bar{P}'$ 是(2)式的解，而 $P(t,T)$ 是(3)式在 $t\in[0,T]$ 上对所有 $T<\infty$ 和 $P_T = 0$ 的解，则 $\bar{P}\geqslant P(t,T)$. 证明见文献[4]的引理 A3.

引理 2.6. 假设 $\bar{P} = \lim\limits_{t\to\infty} P(t,T)$ 是(2)式的非负定解，而 $P(t,T)$ 是(3)式在 $t\in[0, T]$ 上对所有 $T<\infty$ 和 $P_T = 0$ 的解，则 $\bar{P}$ 是(2)式的最小非负定解(证明略)。

引理 2.7. 假设 $\bar{P} = \bar{P}' > 0$ 是(2)式的最小正定解，记 $Q_0 = C'C$，并且

$$\begin{aligned} H(-i\omega, i\omega) &\triangleq 1 + C(-i\omega + A)^{-1}M(i\omega + A')^{-1}C' \\ &\geqslant \varepsilon C(-i\omega + A)^{-1}(i\omega + A')^{-1}C' \end{aligned} \tag{6}$$

对某 $\varepsilon > 0$ 成立，则 $\mathrm{Re}\lambda(A - M\bar{P}) < 0$.

证明。结合引理 2.1—2.6 及文献[5]可证。

3 主要结果

综合引理 2.1—2.7，有如下结论.

定理 3.1. 假设微分 RICCATI 方程(3)满足引理 2.1 条件，如果 $Q_0 = C'C > 0$ 或 $Q_0 = C'C \geqslant 0$ 且 (C, A) 可观测及(6)式成立，则代数 RICCATI 方程(2)有解 $\bar{P} = \bar{P}' > 0$，且满足 $\mathrm{Re}\lambda(A - M\bar{P}) < 0$.

证明. 对 $Q_0 > 0$，可利用引理 2.1—2.7，易推出该定理成立. 对 $Q_0 \geqslant 0$ 且(C,A)可观测，可参考文献[3]的定理 1 和推论 1 ($\bar{P}$ 是正定的充要条件是(C,A)可观). 显然，(2)式有解 $\bar{P} = \bar{P}' > 0$. 因此，定理 3.1 的结论仍成立.

利用定理 3.1，现在考虑(1)式的 GARE 问题，首先分解 $Q = Q_1 - Q_2$，$Q_1 = Q_1' \triangleq C_1'C_1 > 0$，$Q_2 = Q_2' \triangleq C_2'C_2 > 0$. 依此分解，显然有 (C_1, A)，(C_2, A) 可观. 因此可考虑如下方程:

$$A'P_1 + P_1A + C_1'C_1 - P_1MP_1 = 0, \tag{7}$$

$$A^{+\prime}X + XA^{+} - C_2'C_2 - XMX = 0. \tag{8}$$

式中 $A^+ = A - MP_1^+$，而 P_1^+ 是(7)式的最小正定解，满足 $\mathrm{Re}\lambda(A - MP_1^+) < 0$. 依定理 3.1，(7)式解 P_1^+ 的存在条件可由定理 3.1 给出，而(8)式可写成

$$A^{+\prime}(-X) + (-X)A^{+} + C_2'C_2 - (-X)(-M)(-X) = 0.$$

令 $\bar{X} = -X$，$\bar{M} = -M$，则上述方程变为

$$A^{+\prime}\bar{X} + \bar{X}A^{+} + C_2'C_2 - \overline{XMX} = 0. \tag{9}$$

可验证 (C_2, A^+) 可观. (9)式或(8)式的解存在条件也可由定理 3.1 给出.

记(9)式的最小正定解为 $\bar{X}^+$ 满足

$$\mathrm{Re}\lambda(A^+ - \bar{M}\bar{X}^+) < 0,$$

即(8)式有解 $X^- = -\bar{X}^+ < 0$ 满足

$$\mathrm{Re}\lambda(A^+ - MX^-) = \mathrm{Re}\lambda(A - M(P_1^+ + X^-)) < 0. \tag{10}$$

因此，如果 $P^+ = P_1^+ + X^-$ 是(1)式的解，则 P^+ 应满足

$$\mathrm{Re}\lambda(A - MP^+) < 0. \tag{11}$$

综合上述讨论有如下结论.

定理 3.2. 假设(7)，(8)式相应的微分方程(形式与式(3)类同)满足定理 3.1 相应条件，若对(7)式有

$$\begin{aligned}\bar{H}(-i\omega, i\omega) &\triangleq 1 + C_1(-i\omega - A)^{-1}M(i\omega - A')^{-1}C_1' \\ &\geqslant \varepsilon_1 C_1(-i\omega - A)^{-1}(i\omega - A')^{-1}C_1'\end{aligned} \tag{12}$$

对某 $\varepsilon_1 > 0$ 成立. 而对(8)式若有

$$\begin{aligned}\bar{H}(-i\omega, i\omega) &\triangleq 1 - C_2(-i\omega - A)^{-1}M(i\omega - A')^{-1}C_2' \\ &\geqslant \varepsilon_2 C_2(-i\omega - A)^{-1}(i\omega - A')^{-1}C_2'\end{aligned} \tag{13}$$

对某 $\varepsilon_2 > 0$ 成立，则(1)式有实对称解:

$$P^+ = P_1^+ - \bar{X}^+ = P_1^+ + X^- \text{ 满足 } \mathrm{Re}\lambda(A - MP^+) < 0.$$

这里 P_1^+ 是(7)式的解，且满足 $\mathrm{Re}\lambda(A-MP_1^+)<0$；$X^-$ 是(8)式的解，且满足 $\mathrm{Re}\lambda(A^+-MX^-)<0$。

证明。依 Q 的前述分解有 (C_1,A)，(C_2,A^+) 可观，因此，在定理 3.2 的条件下，利用定理 3.1，可有(7)，(8)式的解 P_1^+ 和 X^- 存在，并满足

$$\mathrm{Re}\lambda(A-MP_1^+)<0 \text{ 和 } \mathrm{Re}\lambda(A^+-MX^-)<0.$$

其余只须验证 $P^+=P_1^+\pm X^-$ 是(1)式的解即可。且 P^+ 的镇定性质由(9)式的解 $\bar{X}^+$ 验证。

4　一个等价问题

从 RICCATI 微分方程解的性质分析出发，得到了 GARE 的实对称镇定解存在的一个充分条件。就理想地解决来说，从微分方程出发讨论的条件，有时可能有验证上的困难。因此，对代数方程的直接验证条件仍有待进一步探讨。从本文的研究思路可以进一步证明：GARE 实对称镇定解的存在性与简化问题。讨论方程

$$PA+A'P+Q-PBB'P=0,\ Q=Q'$$

的非奇异实对称解的存在性具有等价性。这也是对 GARE 问题的一个有意义的变换。

参　考　文　献

[1] Doyle J, Glover K, Khargonekar P, Francis B. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problem, *IEEE Trans. Automa. Contr.*, 1989, **34**: 831—847.

[2] Chen S B. The robust optimal control of uncertain systems——State space method. *IEEE Trans. Automa. Contr.*, 1993, **38**: 951—957.

[3] Pachter M. Some properties of the value matrix in infinite-time linear quadratic differential games. *IEEE Trans. Automa. Contr.*, 1978, **23**: 746—748.

[4] Mageirou E F. Values and stratiegies for infinite-time linear quadratic games. *IEEE Trans. Automa. Contr.*, 1976, **21**: 547—550.

[5] Willems J C. Least squares stationary optimal control and the algebraic riccati equation. *IEEE Trans. Automa. Contr.*, 1971, **16**: 621—634.

ON THE EXISTENCE OF THE SOLUTION TO THE GENERAL ALGEBRAIC EQUATION WITH INDEFINITE QUADRATIC TERM

CHEN SHANBEN　ZHANG FUEN　ZHANG QUAN　WU LIN

(Material College & Aerospace College, HIT, Harbin 150001)

ABSTRACT

This paper considers the existence problem of real symmetric stabilized solutions to the general algebraic Riccati equation (GARE) with indefinite quadratic term matrix. The sufficient conditions of the existence of the solution to the problem are established by means of the properties of the solution to the differential equation corresponding to the GARE.

Key words: General algebraic Riccati equation, robust optimal control, linear differential games.