第22卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 22, No. 3
1996年5月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 1996

短文

多滞后时变区间动力系统的稳定性和衰减率[1)]

孙 继 涛
(华东冶金学院数学室　马鞍山　243002)

摘　　要

研究了多滞后时变区间动力系统的渐近稳定性和 α 指数稳定性，给出了其一致渐近稳定和 α 指数稳定的充分条件，推广和改进了文[1—4]的工作。

关键词: 滞后系统，区间动力系统，一致渐近稳定，α 指数稳定.

区间矩阵的稳定性曾被国内外不少学者研究过[5-8]。但是，具有滞后的区间动力系统的研究，由于困难较大，而少有成果[1]。文[1—2]在一定条件下研究了下列单滞后区间动力系统

$$\dot{x}(t)=N[P,Q]x(t)+N[C,D]x(t-\tau)(\tau\geqslant 0) \tag{1}$$

的稳定性问题。文[3]用矩阵测度研究了区间动力系统(1)的 α 指数稳定性，给出了系统(1) α 指数稳定的充分条件。文[4]用矩阵测度研究了下列具有滞后的时变区间动力系统

$$\dot{x}(t)=N[P,Q]x(t)+N[C(t),D(t)]x(t-\tau)$$

的一致渐近稳定性和 α 指数稳定性。

本文采用矩阵测度和比较定理，对多滞后时变区间动力系统

$$\dot{x}(t)=N[P,Q]x(t)+\sum_{i=1}^{m}N[P_i(t),Q_i(t)]x(t-\tau_i) \tag{2}$$

的一致渐近稳定性和 α 指数稳定性进行了研究，给出了多滞后时变区间动力系统(2)关于上述稳定性的充分条件，推广和改进了文[1—4]的工作。

系统(2)中的符号同文[7]，时滞 $\tau_i\geqslant 0$ 且 $\tau=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\tau_i$. $A(t)\in N[P(t),Q(t)]$ 是连续方阵。

定义1. 如果对任意给定的 $A\in N[P,Q]$ 和 $A_i(t)\in N[P_i(t),Q_i(t)]$，系统

1) 冶金部基础科学研究基金资助的项目。
本文于1994年3月3日收到.

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m}A_i(t)x(t-\tau_i) \tag{3}$$

的零解一致渐近稳定，则称多滞后时变区间动力系统(2)一致渐近稳定，记为 $N[P,Q;P_i(t),Q_i(t)]\in S^{(m+1)}$.

定义 2. 设 α 是某个正常数,如果存在一个正常数 K，使得对任意给定的 $A\in N[P,Q]$ 和 $A_i(t)\in N[P_i(t),Q_i(t)]$ 及 $\varphi_i(t)\in C([-\tau_i,0],R^n)$，总能使系统(3)的解满足:

$$\|x(t)\|\leqslant Ke^{-\alpha t}\|\varphi\|,\ t\geqslant 0,$$

则称多滞后时变区间动力系统(2)是具有衰减度 α 指数稳定的,简称 α 指数稳定的. 记为 $N[P,Q;P_i(t),Q_i(t)]\in \alpha S^{(m+1)}$. $\varphi_i(t)(-\tau_i\leqslant t\leqslant 0)$ 是系统(3)的初始函数.

定理 1. 如果对任意的 $A\in N[P,Q]$ 和 $A_i(t)\in N[P_i(t),Q_i(t)]$，均有 $k\in(0,1)$，使得 $k\mu_{\cdot}(A)+\sum_{i=1}^{m}\|A_i(t)\|_{\cdot}<0$ 成立，则多滞后时变区间动力系统(2)一致渐近稳定，即 $N[P,Q;P_i(t),Q_i(t)]\in S^{(m+1)}$.

证明. 对任意给定的 $A\in N[P,Q]$ 和 $A_i(t)\in N[P_i(t),Q_i(t)]$，设 $x(t)$ 是系统(3)的解，$|\cdot|_{\cdot}$ 是向量模，$\|\cdot\|_{\cdot}$ 是 $|\cdot|_{\cdot}$ 相应 $R^{n\times n}$ 中的诱导矩阵范数，$\mu_{\cdot}(\cdot)$ 是与它们相对应的矩阵测度. 则当 $t\geqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}|x(t)|_{\cdot}}{\mathrm{d}t}-\mu_{\cdot}(A)|x(t)|_{\cdot}-\sum_{i=1}^{m}\|A_i(t)\|_{\cdot}|x(t-\tau_i)|_{\cdot}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\left[|x(t+\varepsilon)|_{\cdot}-\|I+\varepsilon A\|_{\cdot}|x(t)|_{\cdot}-\varepsilon\sum_{i=1}^{m}\|A_i(t)\|_{\cdot}|x(t-\tau_i)|_{\cdot}\right]\\
&\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\left|x(t+\varepsilon)-(I+\varepsilon A)x(t)-\varepsilon\sum_{i=1}^{m}A_i(t)x(t-\tau_i)\right|_{\cdot}
\end{aligned}$$

由于(3)式成立,因此

$$\frac{\mathrm{d}|x(t)|_{\cdot}}{\mathrm{d}t}\leqslant\mu_{\cdot}(A)|x(t)|_{\cdot}+\sum_{i=1}^{m}\|A_i(t)\|_{\cdot}|x(t-\tau_i)|_{\cdot}.$$

注意到纯量微分差分方程

$$\dot{x}(t)=-ax(t)-\sum_{j=1}^{n}b_j(t)x(t-\tau_j)$$

的零解一致渐近稳定,如存在 $k\in(0,1)$，使得 $\sum_{j=1}^{n}|b_j(t)|<ak$ 成立. 这里 $b_j(t)$ 为连续函数.

由上述结果知,在定理 1 的条件下,系统

$$\dot{y}(t)=\mu_{\cdot}(A)y(t)+\sum_{i=1}^{m}\|A_i(t)\|_{\cdot}y(t-\tau_i) \tag{4}$$

的零解一致渐近稳定. 由多滞后微分差分方程的比较定理知,系统(4)的零解的一致渐近稳定性保证系统(3)的一致渐近稳定性. 再注意到 $A(t)$ 与 $A_i(t)$ 的任意性,可知定理 1 成立.　　　证毕.

记 $\mathring{A}=\lambda P+(1-\lambda)Q$, $\lambda\in[0,1]$，$\mathring{A}_i(t)=\lambda_iP_i(t)+(1-\lambda_i)Q_i(t)$，$\lambda_i\in[0,1]$,

则有 $\mu_\cdot(A) \leqslant \mu_\cdot(\mathring{A}) + \mu_\cdot(A - \mathring{A})$ 和 $\|A_i(t)\|_\cdot \leqslant \|\mathring{A}_i(t)\|_\cdot + \|A_i(t) - \mathring{A}_i(t)\|_\cdot$.

当 $\cdot = 1$ 或 ∞ 时，由 $\mu_\cdot(A)$ 及 $\|A(t)\|_\cdot$ 的定义知 $\mu_\cdot(A - \mathring{A}) \leqslant \max(1-\lambda,\lambda)\mu_\cdot(Q - P)$，$\|A_i(t) - \mathring{A}_i(t)\|_\cdot \leqslant \max(1-\lambda_i,\lambda_i)\|Q_i(t) - P_i(t)\|_\cdot$. 这样，由定理 1 可得

定理 2. 如存在 $\lambda \in [0,1]$，$\lambda_i \in [0,1]$ $(i = 1,2,\cdots,m)$ 和 $k \in (0,1)$，使得

$$k\mu_\cdot(\mathring{A}) + k\max(1-\lambda,\lambda)\mu_\cdot(Q-P) + \sum_{i=1}^{m}\max(1-\lambda_i,\lambda_i)\|Q_i(t) - P_i(t)\|_\cdot + \sum_{i=1}^{m}\|\mathring{A}_i(t)\|_\cdot < 0$$

成立，则多滞后时变区间动力系统(2)一致渐近稳定，即 $N[P,Q;P_i(t),Q_i(t)] \in S^{(m+1)}$. 这里 $\cdot = 1$ 或 ∞.

下面考察多滞后时变区间动力系统(2)的 α 指数稳定性问题. 在系统(3)中，令 $\boldsymbol{y}(t) = e^{\alpha t}\boldsymbol{x}(t)$，则得

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = (\alpha I + A)\boldsymbol{y}(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i(t)e^{\alpha\tau_i}\boldsymbol{y}(t - \tau_i). \tag{5}$$

这样，多滞后时变区间动力系统

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = N[\alpha I + P, \alpha I + Q]\boldsymbol{y}(t) + \sum_{i=1}^{m} N[e^{\alpha\tau_i}P_i(t), e^{\alpha\tau_i}Q_i(t)]\boldsymbol{y}(t - \tau_i)$$

的一致渐近稳定性蕴含多滞后时变区间动力系统(2)的 α 指数稳定性. 由定理 1 和 2 可得下面定理.

定理 3. 如果对任意的 $A \in N[P,Q]$ 和 $A_i(t) \in N[P_i(t),Q_i(t)]$，均有 $k \in (0,1)$，使得 $k\mu_\cdot(A) + k\alpha + \sum_{i=1}^{m} e^{\alpha\tau_i}\|A_i(t)\|_\cdot < 0$ 成立，则多滞后时变区间动力系统(2) α 指数稳定，即 $N[P,Q;P_i(t),Q_i(t)] \in \alpha S^{(m+1)}$.

定理 4. 如果存在 $\lambda \in [0,1]$, $\lambda_i \in [0,1]$ $(i = 1,2,\cdots,m)$ 及 $k \in (0,1)$，使得 $k\mu_\cdot(\mathring{A}) + k\max(1-\lambda,\lambda)\mu_\cdot(Q-P) + k\alpha + \sum_{i=1}^{m}\max(1-\lambda_i,\lambda_i)e^{\alpha\tau_i}\|Q_i(t) - P_i(t)\|_\cdot + \sum_{i=1}^{m} e^{\alpha\tau_i}\|\mathring{A}_i(t)\|_\cdot < 0$ 成立，则多滞后时变区间动力系统(2) α 指数稳定，即 $N[P,Q;P_i(t),Q_i(t)] \in \alpha S^{(m+1)}$. 这里 $\cdot = 1$ 或 ∞.

最近，文[9]得到的微分差分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \sum_{i=1}^{n} P_i(t)\boldsymbol{x}(t - \tau_i) = 0 \tag{6}$$

中，如果 i) $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n$，ii) 存在非负数 M_1, M_2, M_3, M_4，使得 t 充分大时，$|P_i(t)| \leqslant M_1$，$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) \geqslant M_2$，$\sum_{i=1}^{n-1}\int_{t-\tau_n}^{t-\tau_i} |P_i(s + \tau_i)|\mathrm{d}s \leqslant M_3$，$\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau_n}^{t} |P_i(s - \tau_n + \tau_i)|\mathrm{d}s \leqslant M_4$，且 $2M_3 + M_4 < 1$ 成立，则系统(6)的零解一致渐近稳定.

利用上述结果，与定理 1 类似可证.

定理 5. 设多滞后时变区间动力系统(2)中 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_m$，如果对任意的 $A \in N[P,Q]$ 和 $A_i(t) \in N[P_i(t),Q_i(t)]$，均存在 M_1 和 $M_2 \geqslant 0$，使得 t 充分大时

$\sum_{i=1}^{m}\|A_i(t)\|_{\cdot} \leqslant -\mu_{\cdot}(A)$，$|\mu_{\cdot}(A)|\tau_m + \sum_{i=1}^{m-1}\int_{t-\tau_m}^{t-\tau_i}\|A_i(s+\tau_i)\|_{\cdot}\mathrm{d}s \leqslant M_1$，$|\mu_{\cdot}(A)|\tau_m + \sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_m}^{t}\|A_i(s-\tau_m+\tau_i)\|_{\cdot}\mathrm{d}s \leqslant M_2$ 且 $2M_1+M_2<1$，则多滞后时变区间动力系统(2)一致渐近稳定，即 $N[P,Q;P_i(t),Q_i(t)] \in S^{(m+1)}$.

由定理 5 可得多滞后时变区间动力系统(2) α 指数稳定的如下充分条件.

定理 6. 设多滞后时变区间动力系统(2)中 $0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_m$，如果对任意的 $A \in N[P,Q]$ 和 $A_i(t) \in N[P_i(t),Q_i(t)]$，均存在 $M_1 \geqslant 0$ 和 $M_2 \geqslant 0$，使得 t 充分大时，$\sum_{i=1}^{m}e^{\alpha\tau_i}\|A_i(t)\|_{\cdot} \leqslant -\mu_{\cdot}(A)-\alpha$，$|\mu_{\cdot}(A)+\alpha|\tau_m + \sum_{i=1}^{m-1}\int_{t-\tau_m}^{t-\tau_i}e^{\alpha\tau_i}\|A_i(s+\tau_i)\|_{\cdot}\mathrm{d}s \leqslant M_1$，$|\mu_{\cdot}(A)+\alpha|\tau_m + \sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_m}^{t}e^{\alpha\tau_i}\|A_i(s-\tau_m+\tau_i)\|_{\cdot}\mathrm{d}s \leqslant M_2$ 且 $2M_1+M_2<1$，则多滞后时变区间动力系统(2) α 指数稳定，即 $N[P,Q;P_i(t),Q_i(t)] \in \alpha S^{(m+1)}$.

用定理 2 中的符号及类似于定理 2 的证明，由定理 5 和定理 6 可得二个更好应用的结果. 限于篇幅，这里从略.

参　考　文　献

[1] Liao Xiaoxin, Wang Xiaojun, Fu Yuli. Stability and decay rate of interval delay dynamical systems. *Appl. Math.——A J. of Chinese Universities*, 1992, **7**(3):391—402.

[2] 刘永清，唐功友. 大型动力系统的理论与应用，卷 3，华南理工大学出版社，1992 年.

[3] Zhang Yinping, Sun Jitao. Decay rate of interval delay dynamical system, *Adv. in Modelling & Analysis*, C, 1994, **44** (1):41—44.

[4] 张银萍，孙继涛. 单滞后区间动力系统的稳定性. 控制理论与应用，1994，**11**(3): 371—375.

[5] 孙继涛. 关于区间矩阵的稳定性. 自动化学报，1991，**17**(6): 745—748.

[6] Soh C B. Correcting argoun's approach for the stability of interval matrices. *Int. J. Control*, 1990, **51**(5):1151—1154.

[7] 孙继涛. 时变区间矩阵的稳定性. 应用科学学报，1994，**12**(1): 57—60.

[8] Xu D. Simple criteria for stability of interval matrices. *Int. J. Control*, 1985, **41**(1):289—295.

[9] 李龙图. 一阶线性中立型微分方程解的稳定性. 应用数学，1992，**5**(2): 59—63.

STABILITY AND DECAY RATE OF INTERVAL TIME-VARYING DYNAMICAL SYSTEM WITH MULTIDELAY

SUN JITAO

(Division of Math., East China Inst. of Metallurgy, Ma'anshan 243002)

ABSTRACT

In this paper, the sufficient conditions of uniformly asymptotically stability and uniformly asymptotically stability with decay rate α for a kind of interval time-varying dynamical system with multidelay are obtained, the results of paper [1—4] are improved and extended.

Key words: Delay system, interval dynamical system, uniformly asymptotically stability, α-stability.