第22卷 第3期 自动化学报 Vol. 22, No. 3
1996年5月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1996

短文

# 时变不确定性线性系统的鲁棒跟踪控制器设计

彭晓红　宁永臣　张福恩
(哈尔滨工业大学控制工程系　哈尔滨　150001)

**摘　　要**

研究含时变不确定性线性系统的鲁棒跟踪问题,通过选取矩阵$N$构造广义匹配条件,对于满足和不满足广义匹配条件的不确定系统，分别得到了实际跟踪结果和$\varepsilon$跟踪结果. 最后给出的设计实例表明了本设计方法的有效性.

**关键词**: 鲁棒跟踪,鲁棒控制,广义匹配条件.

## 1　引言及问题描述

跟踪控制在飞行器导航、工业过程控制中有着广泛的应用. 由于系统模型中的不确定性因素，鲁棒跟踪近来受到国内外广大学者的关注[1-4]. 文[1,2]研究了时不变不确定线性系统的鲁棒渐近跟踪控制,文[3,4]探讨了时变不确定线性系统的鲁棒跟踪控制.

本文研究含时变不确定性线性系统的鲁棒跟踪控制，其不确定性可以在较大的范围内变化. 通过选取矩阵$N$构造广义匹配条件. 基于 Riccati 方程，设计线性状态反馈控制器,使系统输出鲁棒跟踪某一参考模型的输出.

考虑如下不确定线性系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = [A + \Delta A(\boldsymbol{r}(t))]\boldsymbol{x} + [B + \Delta B(\boldsymbol{s}(t))]\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{q}(t)), \tag{1.1a}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}. \tag{1.1b}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n,\boldsymbol{u}\in R^m,\boldsymbol{y}\in R^p$, $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{q}(t))$ 为加性扰动，$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{q}(t))\in R^n$; $\Delta A(\cdot)$ 和 $\Delta B(\cdot)$ 代表系统的时变不确定性; 假定系统的变参数向量 $\boldsymbol{r}(t)\in \Phi$, $\boldsymbol{s}(t)\in \Psi$ 和 $\boldsymbol{q}(t)\in \Omega$ 均为 Lebesgue 可测，$\Phi,\Psi$ 及 $\Omega$ 均为 $R^n$ 中有界紧集; $A,B$ 及 $C$ 为系统相应阶数的标称矩阵，且$(A,B)$可控. 文中$\|\cdot\|$对向量表示欧氏范数,对于矩阵表示其诱导范数.

这里要解决的问题是,对于系统(1.1)设计线性状态反馈控制器,使系统输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 鲁棒跟踪参考输入 $\boldsymbol{y}_m(t)$. 假定 $\boldsymbol{y}_m(t)$ 是如下参考模型的输出:

本文于1994年3月2日收到.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_m = A_m \boldsymbol{x}_m, \qquad \boldsymbol{y}_m = C_m \boldsymbol{x}_m, \tag{1.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}_m \in R^{n_m}$，$\boldsymbol{y}_m \in R^p$，并假定系统(1.2)的状态有界.

对于欲跟踪模型(1.2)，假设存在矩阵 $G \in R^{n \times n_m}$，$H \in R^{m \times n_m}$ 满足如下矩阵方程[3]:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GA_m \\ C_m \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

对于含时变不确定性线性系统，一般不能得到渐近跟踪[3]. 有关 $\boldsymbol{y}(t)$ 鲁棒跟踪 $\boldsymbol{y}_m(t)$ 的实际跟踪和 $\varepsilon$ 跟踪的定义见文献[3,4].

## 2 广义匹配条件

**假设 I.** 存在可逆矩阵 $N \in R^{m \times m}$ 和连续函数矩阵 $E(\cdot)$ 及 $D(\cdot)$ 满足如下条件:

1) $\Delta A(\boldsymbol{r}(t)) = BND(\boldsymbol{r}(t))$，$\Delta B(\boldsymbol{s}(t))N = BNE(\boldsymbol{s}(t))$; (2.1)

2) $2I + E(s) + E^T(s) \geqslant \delta I$，$\delta > 0, \forall s \in \Psi$; (2.2)

3) $BN$ 满秩且 $(A, BN)$ 可稳定; (2.3)

4) $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{q}(t)) = BN\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}(t))$，$\forall \boldsymbol{q}(t) \in \Omega$. (2.4)

如果系统(1.1)满足式(2.1)和(2.2)，则称系统(1.1)的不确定性满足广义匹配条件. 应当说明，通常选 $N$ 为对角阵，当 $N = I$ 时，式(2.1)及(2.2)即为普通的匹配条件[4].

由式(2.2)可知，若不确定性参数的变化范围太大，普通匹配条件中的正定性条件则难以满足，故选取 $N$ 的原则应是使 $E(s)$ 满足(2.2)式.

例如，考察不确定性 $\Delta B(s) = BW$，其中

$$W = \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad |s| \leqslant 3.$$

若取 $N = I$，则 $E(s) = W$，此时式(2.2)不成立，而且普通的匹配条件也不成立；但若取 $N = \mathrm{diag}\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$，则 $E(s) = \frac{1}{2}W$，$\Delta BN = BNE(s)$，式(2.2)成立.

如果要使不确定性 $\Delta B(s)$ 满足普通的匹配条件，需要缩小不确定性参数的变化范围，此时 $|s| < 2$. 可见广义匹配条件能够处理的不确定性参数的变化范围更大一些. 因此，如果系统的不确定性不满足普通的匹配条件，可以设法选取矩阵 $N$，使其满足广义匹配条件.

## 3 鲁棒跟踪控制器设计

基于广义匹配条件，有下面鲁棒跟踪结果.

**定理 3.1.** 若系统(1.1)满足假设 I，$p \leqslant m$，且被跟踪模型(1.2)能使方程(1.3)有解，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在线性控制器:

$$\boldsymbol{u} = K\boldsymbol{x} + (H - KG)\boldsymbol{x}_m, \quad K = -\gamma NN^T B^T P, \tag{3.1}$$

使系统(1.1) $\varepsilon$ 跟踪模型(1.2)的输出 $\boldsymbol{y}_m(t)$. 即系统(1.1)能实际跟踪 $\boldsymbol{y}_m(t)$. 其中 $G$ 和 $H$

由方程(1.3)得到．$Q$为大于 $D^TD$ 的正定矩阵，$P$ 为 Riccati 方程

$$PA + A^TP - \xi PBNN^TB^TP + Q = 0 \tag{3.2}$$

的正定解，$\xi = \gamma\delta - 2$，控制器参数 $\gamma > 2/\delta$．

证明．引入变量 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - G\boldsymbol{x}_m$，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - H\boldsymbol{x}_m$，由式(1.1)，(1.2)及(1.3)得到误差动态方程：

$$\dot{\boldsymbol{z}} = [A + \Delta A(r)]\boldsymbol{z} + [B + \Delta B(s)]\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{q},\boldsymbol{x}_m). \tag{3.3}$$

其中 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{q},\boldsymbol{x}_m) = BN[(DG + EN^{-1}H)\boldsymbol{x}_m + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})] \triangleq BNF(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{q},\boldsymbol{x}_m)$．

显然，系统(3.3)满足广义匹配条件，在控制(3.1)作用下，误差方程可写为

$$\dot{\boldsymbol{z}} = (A + BND - \gamma BNN^TB^TP - \gamma BNEN^TB^TP)\boldsymbol{z} + BNF. \tag{3.4}$$

由于 $(A, BN)$ 可稳定，Riccati 方程(3.2)有唯一正定解矩阵 $P$．为考察误差动态系统的稳定性，取 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^TP\boldsymbol{z}$，沿式(3.4)的轨线求 $\dot{V}(\boldsymbol{z})$ 得

$$\begin{aligned}\dot{V}(z) = \boldsymbol{z}^T[&PA + A^TP + PBND + (PBND)^T - \gamma PBN(2I + E \\ &+ E^T)N^TB^TP]\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}^TPBNF + F^TN^TB^TP\boldsymbol{z}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

由于参考模型(1.2)的状态有界，存在 $N_1 > 0$ 使 $\|\boldsymbol{x}_m\| \leqslant N_1$．记 $\bar{F} = \max\{\|F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{q},\boldsymbol{x}_m)\|,\ \boldsymbol{r} \in \Phi,\ \boldsymbol{s} \in \Psi,\ \boldsymbol{q} \in \Omega,\ \|\boldsymbol{x}_m\| \leqslant N_1\}$，则由式(3.5)有

$$\boldsymbol{z}^TPBNF + F^TN^TB^TP\boldsymbol{z} \leqslant \boldsymbol{z}^TPBNN^TB^TP\boldsymbol{z} + \bar{F}^2. \tag{3.6}$$

考虑到 $PBND + (PBND)^T \leqslant PBNN^TB^TP + D^TD$，由式(2.2)，(3.2)得

$$\dot{V}(z) \leqslant z^T[-Q + D^TD + (\xi + 2 - \gamma\delta)PBNN^TB^TP]z + \bar{F}^2. \tag{3.7}$$

令 $L = Q - D^TD$，取 $\gamma > 2/\delta$，$\xi = \gamma\delta - 2$，由式(3.7)得

$$\dot{V}(z) \leqslant -z^Tlz + \bar{F}^2. \tag{3.8}$$

类似于文[4]中的定理证明方法，易知系统(1.1)实际跟踪参考模型的输出 $\boldsymbol{y}_m(t)$．证毕．

若系统(1.1)的不确定性不满足广义匹配条件，可将 $\Delta A(\boldsymbol{r}(t))$ 及 $\Delta B(\boldsymbol{s}(t))$ 分解成匹配部分和不匹配部分之和的形式：

$$\Delta A(\boldsymbol{r}(t)) = BND(\boldsymbol{r}(t)) + \bar{A}(\boldsymbol{r}(t)),\ \boldsymbol{r} \in \Phi, \tag{3.9}$$

$$\Delta B(\boldsymbol{s}(t))N = BNE(\boldsymbol{s}(t)) + \bar{B}(\boldsymbol{s}(t)),\ \boldsymbol{s} \in \Psi. \tag{3.10}$$

其中 $E(\boldsymbol{s}(t))$ 满足式(2.2)．由此得以下推论．

**推论 3.1.** 若系统(1.1)的不确定性有式(3.9)及(3.10)的分解，$BN$ 满秩且被跟踪模型(1.2)能使方程(1.3)有解，$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{q}) = BN\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$，如下 Riccati 方程对给定的正定阵$Q$及$\bar{\gamma} \geqslant \gamma$ 存在一个正定解 $P$：

$$PA + A^TP + \bar{\gamma}PWP + U(P) + Q - \xi PBNN^TB^TP = 0,\ \xi > 0. \tag{3.11}$$

其中 $U(P)$ 为对称矩阵；$W$为常数矩阵；$U(P)$ 及$W$满足如下关系式：

$$P\bar{A}(\boldsymbol{r}) + \bar{A}^T(\boldsymbol{r})P \leqslant U(P),\ \forall \boldsymbol{r} \in \Phi, \tag{3.12}$$

$$W + \bar{B}(\boldsymbol{s})N^TB^T + BN\bar{B}^T(\boldsymbol{s}) \geqslant 0,\ \forall \boldsymbol{s} \in \Psi, \tag{3.13}$$

则存在控制律：

$$\boldsymbol{u}(t) = K\boldsymbol{x}(t) + (H - KG)\boldsymbol{x}_m(t),\ K = -\gamma NN^TB^TP \tag{3.14}$$

使系统(1.1)能 ε 跟踪模型(1.2)的输出 $\boldsymbol{y}_m$．其中 $\xi = \gamma\delta - 2$，$\gamma > 2/\delta$，$\varepsilon = \|C\|\bar{F}[\Delta_P/\lambda_{\min}(L)]^{\frac{1}{2}}$，$\Delta_P = \lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)$，$L = Q - D^TD$．

推论的证明与定理 3.1 类似，故略．

# 4 设计实例

考察如下系统:

$$\dot{x} = [A + \Delta A]x + [B + \Delta B]u + d(q),\ y = Cx, \tag{4.1}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \Delta B = \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$d(q) = \left[\frac{1}{2}, 0\right]^T$, $C = [1, 0]$. 系统的不确定性参数 $s$ 满足 $|s| \leqslant 3$. 欲跟踪的模型为

$$\dot{x}_m = A_m x_m,\ y_m(t) = C_m x_m(t). \tag{4.2}$$

其中 $A_m = \mathrm{diag}\{-1, -1\}, C_m = [1, 0]$. 当 $t \geqslant t_0 = 1$ 时,有 $\|x_m(t)\| \leqslant 1$.
显然,该系统不满足普通的匹配条件,其原因是不确定性参数变化范围太大. 若取

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},\quad E(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{s}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

则 $\Delta BN = BNE(s)$, 即系统(4.1)满足广义匹配条件,这里 $\delta = \frac{1}{2}$. 解方程(1.3)得 $G = I_{2\times 2}$, $H$ 为零矩阵, $\bar{F} = 1$.

取 $\xi = 1$, $\gamma = 6$, 解 Riccati 方程(3.2)得到正定解矩阵 $P = \mathrm{diag}\{0.2426,\ 0.2481\}$, 控制器 $u(t) = -\mathrm{diag}\{0.364, 0.093\}[x(t) - x_m(t)]$, 此时该系统将 $\varepsilon = 1.4302$ 跟踪参考模型(4.2)的输出 $y_m(t)$, 且随着 $Q$ 的增大, $\varepsilon$ 将单调减少. 由定理 3.1 可知系统(4.1)能实际跟踪模型(4.2)的输出.

同时,系统(4.1)满足文[4]中"秩 1"条件. 依照文[4]的方法, 取 $\gamma = 1$, $\eta = 2$, $Q = \frac{1}{2} I_{2\times 2}$, 经计算得到

$$M_f = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\quad P = \begin{bmatrix} 0.8536 & 0 \\ 0 & 0.8536 \end{bmatrix}.$$

在控制向量 $u(t) = -\mathrm{diag}\{0.8536, 0.8536\}[x(t) - x_m(t)]$ 作用下,系统(4.1)可以 $\varepsilon = 1.414$ 跟踪模型(4.2)的输出 $y_m(t)$. 但是随着 $Q$ 的增大,在保证正定矩阵 $P$ 存在的前提下,跟踪误差也增大,得不到实际跟踪的结论.

可见本设计方法更广泛、更有效,能够处理的不确定性参数变化范围更广.

## 参 考 文 献


[1] Schmitendorf W E, Barmish B R. Robust asymptotic tracking for linear system with unknown parameters. *Automatica* 1986, **22**: 355—360.

[2] Schmitendorf W E. Methods for obtaining robust tracking control laws. *Automatica*, 1987, **23**: 675—677.

[3] Hopp T H, Schmitendorf W E. Design of a linear controller for robust tracking and model following. *ASME J. of Dynamic Sys., Meas. and Control*, 1990, **112**: 552—558.

[4] 倪茂林,谌颖. 含时变不确定性线性系统的鲁棒跟踪控制. 自动化学报, 1993, **19**(5): 513—519.

# DESIGN OF ROBUST TRACKING CONTROLLERS FOR TIME-VARYING UNCERTAIN LINEAR SYSTEMS

PENG XIAOHONG　　NING YONGCHEN　　ZHANG FUEN

(*Dept. of Control Engr., Harbin Inst. of Tech., Harbin* 150001)

ABSTRACT

This paper considers the robust tracking control problems for time varying uncertain systems. By a matrix N, the generalized matching condition is formulated out. For uncertain linear systems whose uncertainties satisfy the generalized condition and the systems that do not satisfy this condition, practical tracking results and ε tracking results are obtained respectively. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness of the method proposed in this paper.

**Key words:** Robust tracking, robust control, generalized matching condition.

(上接 384 页)

征集特邀议题:

大会欢迎提出有关特邀议题的建议．建议内容应包括议题题目、至少 5 名发言人及其论文题目和符合格式要求的论文摘要．

关键时间:

| | |
|---|---|
| 即刻 | 表示参加会议的意向(可向秘书处索取会议首轮通知) |
| 1996.07.31 | 摘要及特邀议题建议截止期 |
| 1996.10.15 | 文章入选通知 |
| 1997.01.15 | 提交全文截止期 |
| 1997.01.15 | 大会程序及最后通知 |
| 1997.04.15 | 首次注册 |
| 1997.6.16—18 | 大会 |

大会秘书处、投稿处及问讯处:

通讯地址:

Secretariat
8th IFAC Symposium on Transportation Systems
Department of Production and Management Engineering
Tcchnical University of Crctc
University Campus
Counoupidiana, 73100 CHANIA
GREECE

Tel: +30-821-69549, +30-821-69324
Fax: +30-821-69410, +30-821-69568
Email: ts97@dssl. tuc gr