第22卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 22, No. 3
1996 年 5 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 1996

短 文

线性模型参数 l_∞ 和 l_1 中心估计量的统一求法[1)]

王书宁　黄学俊　戴建设
（华中理工大学系统工程研究所　武汉　430074）

摘　　要

如同计算线性模型参数的 l_∞ 中心估计量一样，可以通过求解一组具有相同可行域的线性规划问题确定这些参数的 l_1 中心估计量. 据此设计了适用于这两种估计量的整体单纯形算法，可以避免在求解上述一组线性规划问题时重复搜索其可行域的任一顶点，达到节省计算量的目的.

关键词: 辨识，参数估计，未知但有界误差，集内不确定，中心估计，鲁棒估计.

1　引言

考虑线性模型

$$\boldsymbol{y} = \Phi\boldsymbol{\theta}^* + \boldsymbol{\rho} \tag{1}$$

的参数估计问题. 其中 $\boldsymbol{y} \in R^N$ 和 $\Phi \in R^{N\times n}$ 是已知的向量和矩阵; $\boldsymbol{\theta}^* \in R^n$ 是待估计的参数向量; $\boldsymbol{\rho} \in R^N$ 是未知的误差向量. 合理地假定 $\boldsymbol{\rho}$ 值，是解决该问题的基础. 近十余年来，由于鲁棒控制的需要，一种非概率型误差描述方法在系统辨识领域得到了广泛的重视，这就是所谓集内不确定（Set Membership Uncertainty 简称 SMU）或未知但有界误差（Unknown But Bounded Error 简称 UBBE）方法[1]. 该方法仅假定未知误差向量满足上界约束

$$\|\boldsymbol{\rho}\| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

其中 ε 是给定正数，据此可保证 $\boldsymbol{\theta}^*$ 属于由观测数据决定的可行参数域

$$\Theta \triangleq \{\boldsymbol{\theta} \mid \|\boldsymbol{y} - \Phi\boldsymbol{\theta}\| \leqslant \varepsilon, \boldsymbol{\theta} \in R^n\}. \tag{3}$$

于是对任何 $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in R^n$ 存在以下不等式:

$$\|\hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}\| \leqslant \max_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|. \tag{4}$$

1）本项研究得到国家自然科学基金、国家科委和浙江大学工业控制技术国家重点开放实验室的联合资助.
本文于 1993 年 12 月 19 日收到.

这样，通过极小化(4)式的右边就能得到一个具有较紧的估计偏差上界的估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^c$，它满足：

$$\|\boldsymbol{\theta}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}^c\| \leqslant \max_{\theta \in \Theta}\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^c\| = \min_{\hat{\theta} \in R^n} \max_{\theta \in \Theta}\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|. \tag{5}$$

此处 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^c$ 就是在 UBBE 框架下主要采用的所谓中心估计量.

在大多数 UBBE 文献中，一般把模型误差范数和参数估计误差范数分别取为 l_∞^w 和 l_∞，即

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_\infty^w = \max_{1 \leqslant t \leqslant N} \boldsymbol{w}_t|\boldsymbol{\rho}_t|; \qquad \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\boldsymbol{\theta}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i|. \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{w}_t$ 是仅依赖观测数据的正的权系数，而对某一向量加下标则表示该向量的相应分量. 在此条件下，可以采用下述公式计算中心估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{c\infty}$ 和估计误差上界[1]:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i^{c\infty} = 0.5(\boldsymbol{\theta}_i^{\max} + \boldsymbol{\theta}_i^{\min}), \; i = 1, \cdots, n, \tag{7}$$

$$\max_{\theta \in \Theta}\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{c\infty}\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} 0.5(\boldsymbol{\theta}_i^{\max} - \boldsymbol{\theta}_i^{\min}). \tag{8}$$

其中各 $\boldsymbol{\theta}_i^{\max}$ 和 $\boldsymbol{\theta}_i^{\min}$ 可通过求解下述 $2n$ 个线性规划问题来确定：

$$\boldsymbol{\theta}_i^{\max} = \max_{\theta \in \Theta}\boldsymbol{\theta}_i, \; \boldsymbol{\theta}_i^{\min} = \min_{\theta \in \Theta}\boldsymbol{\theta}_i, \; i = 1, \cdots, n. \tag{9}$$

近年来，由于 l_1 鲁棒控制方法的发展，估计误差范数采用

$$\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{\theta}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i| \tag{10}$$

的l_1中心估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{c1}$ 引起了人们的关注[2]. 为此，下面将对 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{c1}$ 提出一种较为可行的计算方法.

2 计算 l_1 中心估计量的基本定理

定理 1. 对任意的 $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in R^n$，存在以下关系：

$$\max_{\theta \in \Theta}\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|_1 = \max_{h \in H^n}\|\boldsymbol{\theta}(h) - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|_1. \tag{11}$$

其中 H^n 是由 2^n 个不同的 n 维向量组成的点集，各向量的每个分量或者是 1 或者是 −1，而 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{h})$ 是优化问题

$$\max_{\theta \in \Theta}\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{\theta} \tag{12}$$

的一个解.

推论 1. 线性规划问题

$$\min_{\hat{\theta} \in R^n} \max_{h \in H^n}\|\boldsymbol{\theta}(h) - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|_1 \tag{13}$$

的最优解就是 l_1 中心估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{c1}$，而该问题的最优目标值就是(5) 式右边的估计误差上界.

3 整体单纯形算法

由(9)和(12)式可知，计算 l_∞ 和 l_1 中心估计量的主要工作都是求解一组具有相同可

行域的线性规划问题．若采用单纯形法分别求解这些线性规划问题，就完全可能在求解过程中多次经过某些顶点，造成计算量的浪费．为此，这里设计了针对这样一组线性规划问题的整体单纯形算法．为叙述方便，假定所求解的问题已转化为如下一组标准线性规划问题：

$$\max_{x\in X} \boldsymbol{c}_k^T x,\ k\in M. \tag{14}$$

其中 $X=\{\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}=b,\ \boldsymbol{x}\geqslant 0,\ \boldsymbol{x}\in R^q\}$，$A\in R^{p\times q}$；$M=\{1,2,\cdots,\boldsymbol{m}\}$，并把目标为 $\boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{x}$ 的线性规划问题简称为问题 k．

对 X 的任一可行基矩阵 B，用 $\boldsymbol{x}(B)\in R^q$ 表示其对应的基本可行解，用 $g(B)\in R^q$ 表示 B 由 A 的哪些列向量组成，具体定义为

$$\boldsymbol{g}_i(B)=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 的第 } i \text{ 列向量在 } B \text{ 中},\\ 0, & \text{其它情况}.\end{cases}$$

采用这些符号，可以把整体单纯形算法叙述如下．

第一步．完成以下初始工作：1）任取指标 $r\in M$，令 $\bar{M}=M-\{r\}$；2）确定一个可行基矩阵 B 及其对应的问题 r 的单纯形表；3）令 $\boldsymbol{w}_k=\boldsymbol{g}(B)$, $f_k=\boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{x}(B)$, $\forall k\in\bar{M}$．

第二步．如果 B 是问题 r 的最优基矩阵，记录问题 r 的最优解 $x(B)$，转第五步；否则转第三步．

第三步．用普通单纯形算法确定使问题 r 的目标函数上升的新的可行基矩阵，仍用 B 表示．

第四步．对所有的 $k\in\bar{M}$，进行以下工作：1）计算 $\bar{f}_k=\boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{x}(B)$；2）如果 $\bar{f}_k>f_k$，令 $f_k=\bar{f}_k$，$\boldsymbol{w}_k=\boldsymbol{g}(B)$．然后转第二步．

第五步．令 $\bar{M}=\bar{M}-\{r\}$．如果 $\bar{M}$ 成为空集，说明已经获得所有线性规划问题的最优解，可停止迭代；否则确定满足以下方程的新的 r，

$$\|\boldsymbol{w}_r-\boldsymbol{g}(B)\|_1=\min_{k\in\bar{M}}\|\boldsymbol{w}_k-\boldsymbol{g}(B)\|_1. \tag{15}$$

转第六步．

第六步．在当前的单纯形表的基础上经过必要的基变换，产生由 $\boldsymbol{w}_r$ 指示的可行基矩阵(仍用 B 表示)对应的问题 r 的单纯形表．转第二步．

关于整体单纯形算法，现作以下说明：

1）由于该算法本质上是用单纯形法顺序求解有限个线性规划问题，所以只要不出现退化基矩阵，就可保证算法在有限次迭代后终止；

2）在不出现退化基矩阵的条件下，由于第四步采取的措施，可保证第三步产生的每个基矩阵对应的问题 r 的目标函数值一定大于以前出现过的任何可行基矩阵对应的该问题的目标函数值，从而使整个迭代过程不会重复搜索任何可行基矩阵，达到节省计算量的目的；

3）从 $\boldsymbol{g}(\cdot)$的定义可以看出，对任意两个可行基矩阵 B_1 和 B_2，$0.5\|\boldsymbol{g}(B_1)-\boldsymbol{g}(B_2)\|_1$ 就是 B_1 和 B_2 中不同列向量的个数，因此，通过(15)式决定新的 $\boldsymbol{w}_r$ 可以最大限度地减轻第六步的工作量．

4 结束语

本文给出了能简化计算线性模型参数的 l_1 中心估计量的基本定理，并提出了适用于 l_1 和 l_∞ 的整体单纯形算法，理论分析和仿真研究均表明，这一算法能够显著地减少计算量.

参 考 文 献

[1] Milanese M, Vicino A. Optimal estimation theory for dynamic systems with set membership uncertainty: an overview. *Automatica*, 1991, **27**(6): 997—1009.

[2] Jacobson C A, Nett C N. Worst case systems identification in l_1: optimal algorithms and error bounds. Proc. of American Control Conf., 1991.

COMPUTING l_1 AND l_∞ CENTRAL ESTIMATORS OF LINEAR MODELS' PARAMETERS WITH A GENERAL METHOD

WANG SHUNING HUANG XUEJUN DAI JIANSHE

(*Inst. of Sys. Engi., Huazhong Univ. of Sci. & Tech., Wuhan* 430074)

ABSTRACT

In this paper it has been shown that an l_1 central estimator of linear models' parameters can also be computed by solving a group of linear programming problems with the same feasible region similar to those for computing an l_∞ central estimator. Because of this fact, an unified simplex algorithm suitable for the computation of these two estimators is proposed. With this algorithm the repeated search of every vertex of this region can be avoided so that much computation can be saved.

Key words: Identification, parameter estimation, unknown but bounded error, set membership uncertainty, central estimator, robust estimation.