第 22 卷 第 3 期 自 动 化 学 报 Vol. 22, No. 3
1996 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1996

短 文

仿射非线性联级系统的全局光滑镇定

费树岷 高为炳

(北京航空航天大学第七研究室 北京 100083)

摘 要

研究一般的仿射非线性联级系统的全局光滑可镇定. 在其一子系统为光滑反馈无源的条件下，运用无源性原理和动力学系统的极限集理论，给出了整个联级系统全局镇定的充分条件,拓展了现有的全局镇定结果. 最后给出两个例子予以说明.

关键词: 无源系统，KYP 性质,正实性,全局光滑镇定.

1 引言

非线性系统全局镇定问题，较之局部镇定要困难的多. 在过去的几十年里人们主要是从输入输出角度研究系统的输入输出稳定性 (IOS)[1,2]. 对耗散系统研究其无源性、稳定性[3-5]以及非线性系统的无源性与 KYP 性质的等价性[4]. 基于线性系统传递函数的输出零点概念，由 Isidori 等学者于 80 年代初提出并积极倡导的零动态概念，导致仿射非线性系统的反馈等价正则型系统[6-9]. 非线性正则型系统在讨论系统的性质时有着广泛的应用. 对镇定问题而言,局部最小相位系统已证明是局部可镇定的. 然而，对全局镇定,全局最小相位系统却得不到全局可镇定性,原因之一是，全局最小相位系统可能出现尖点现象 (Peaking Phenomenon)[6,9,10]. 为此,文[4,6]提出了一种特殊的全局正则型:

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x,y),\\ \dot{\xi} = A\xi + Bu,\\ y = C\xi.\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 (A,B) 可控. 同时给出反馈等价于(1.1)式的条件,但要求太强. 文[11]研究了带反馈正实条件的联级系统全局镇定问题,并给出二个很有意义的例子.

本文考虑如下形式的联级系统:

$$\begin{cases}\dot{x} = f_0(x,\xi) + F(x,\xi)y, & (1.2a)\\ \dot{\xi} = f(\xi) + G(\xi)u, & \\ y = h(\xi). & (1.2b)\end{cases}$$

其中 $x \in R^n, \xi \in R^r, u, y \in R^m$ 各向量函数或矩阵均为光滑的.

本文于 1993 年 12 月 6 日收到.

假设 1. 存在光滑正定的适定函数 $V(x)$，使 $L_{f_0}V \leqslant 0, \forall(x,\xi)\in R^{n+r}$. 这里适定是指 $\forall a > 0, \{x \mid V(x) \leqslant a\}$ 为紧集.

2 基本概念和定义

考虑如下非线性系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

定义 2.1. 式(2.1)称为是无源的，简称 (h,f,G) 是无源的，如果存在非负函数 V，称为库函数 (storage function)，使

$$V(x(t)) - V(x^0) \leqslant \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.2}$$

成立. 其中 $x(t) = \varphi(t,x^0,u)$ 为式(2.1)过 x^0 的解；$y(t) = h(x(t))$；“T” 表示转置.

定义 2.2. (h,f,G) 称为是严格无源的，如果它是无源的，带有库函数 V，且存在正定函数 $S(x)$，使

$$V(x(t)) - V(x^0) = \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_0^t S(x(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{2.3}$$

无源性是与正实性紧紧相连的. 相对于线性系统的正实引理，仿射非线性系统有 Kalman-Yacubovitch-Popov 引理 (KYP).

定义 2.3. 如果存在非负可微函数 $V(x), V(0) = 0$，使 $L_fV \leqslant 0$，$L_GV = h^T$，称 (h,f,G) 具有 KYP 性质.

KYP 性质与无源性的联系如下：

命题 2.1.[4] (h,f,G) 是无源的，且带有可微库函数当且仅当 (h,f,G) 具有 KYP 性质.

定义 2.4. 如果存在光滑函数 $\alpha: R^n \longmapsto R^m, \alpha(0) = 0$，使 $(h, f + G\alpha, G)$ 是无源的，带有光滑正定的适定库函数，则 (h,f,G) 称为是光滑反馈无源的.

定义 2.5. 如果存在光滑函数 $\alpha: R^n \longmapsto R^m, \alpha(0) = 0$，使 $(h, f + G\alpha, G)$ 是无源的，带光滑正定的适定库函数且 $\dot{x} = f(x) + G(x)\alpha(x)$ 的零解全局渐近稳定，(h,f,G) 称为是稳定光滑反馈无源的.

定义 2.6. 如果存在光滑函数 $\alpha: R^n \longmapsto R^m, \alpha(0) = 0$，使 $(h, f + G\alpha, G)$ 是严格无源的，带有光滑正定的适定库函数，(h,f,G) 称为是光滑反馈严格无源的.

注 2.1. 文[11]中定义的反馈正实性 (FPR) 仅相当于这里的定义 2.5 而非定义 2.4，故对线性系统而言定义 2.4 比文[11]中 FPR 定义要弱.

3 主要结论

考虑系统(1.2)，记 $\Delta = R^n \times \{\xi \mid h(\xi) = 0\}$，$\forall \alpha: R^{n+r} \longmapsto R^m$，$\alpha \in C^k (k \geqslant 1)$，用 $\varphi_0^\alpha(t,x^0,\xi^0)$ 表示系统 $\dot{x} = f_0(x,\xi), \dot{\xi} = f(\xi) + G(\xi)\alpha(x,\xi)$ 过点 (x^0,ξ^0) 的解. 若 φ_0^α 有界，记 $\Omega = \cup\{(x,\xi) \mid \varphi_0^\alpha$ 的 ω-极限点，$\alpha \in C^k, k \geqslant 1$，$(x^0,\xi^0) \in R^{n+r}\}$，求和仅

对那些有界的 φ_0^a 而言.

定理 3.1. 设式 (1.2) 满足假设 1，如果 $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{f},G)$ 是光滑反馈无源的且 $\Delta\cap\Omega=\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\}$，则式(1.2)是全局光滑可镇定的.

证明. 设光滑函数 $\boldsymbol{\alpha}:R^r\longmapsto R^m$, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, 使 $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{f}+G\boldsymbol{\alpha},G)$ 是无源的，带光滑正定的适定库函数. 由命题 2.1 知，存在光滑正定的适定函数 $V_1(\boldsymbol{\xi})$, $V_1(\mathbf{0})=0$, 使 $L_{f+G\alpha}V_1\leqslant 0$, $L_GV_1=\boldsymbol{y}^T$. 取 $W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=V(\boldsymbol{x})+V_1(\boldsymbol{\xi})$ (V 取自假设 1)，令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}$ 为新的输入，则W为光滑正定的适定函数，$W(\mathbf{0},\mathbf{0})=0$，且

$$\begin{aligned}\dot W_{(1.2)}&=L_{f_0}V+L_FV_{\boldsymbol{y}}+L_{f+G\alpha}V_1+L_GV_{1\boldsymbol{v}}\\&=L_{f_0}V+L_{f+G\alpha}V_1+\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{v}+(L_FV)^T).\end{aligned}$$

如果取 $\boldsymbol{v}=-(L_FV)^T-\boldsymbol{y}$，则

$$\dot W_{(1.2)}=L_{f_0}V+L_{f+G\alpha}V_1-|\boldsymbol{y}|^2\leqslant-|\boldsymbol{y}|^2.$$

显然，$\dot W_{(1.2)}=0$ 当且仅当 $L_{f_0}V=0$, $L_{f+G\alpha}V_1=0$, $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$. 若 $\gamma:t\longmapsto(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\xi}(t))\in\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\,|\,\dot W_{(1.2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=0\}$ 为闭环(1.2)的解曲线，则 $(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\xi}(t))\in\Delta$, $\boldsymbol{x}(t)$ 满足 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{\xi}(t))$. 如果$M$为 $(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{\xi}(t))$ 的 ω-极限集，则 $M\subset\Omega\cap\Delta=\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\}$. 由常微分方程知识得 $(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{\xi}(t))\to M$ (当 $t\to+\infty$)，而 $\dot V=L_{f_0}V+L_FV\boldsymbol{y}$, $\dot V_1=L_{f+G\alpha}V_1-L_FV\boldsymbol{y}-|\boldsymbol{y}|^2$, 所以 $V(\boldsymbol{x}(t))=\text{const}$, $V_1(\boldsymbol{\xi}(t))=\text{const}$. 由连续性知 $\lim\limits_{t\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t))=V(\mathbf{0})=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}V_1(\boldsymbol{\xi}(t))=V_1(\mathbf{0})=0$, 故 $V(\boldsymbol{x}(t))\equiv0$, $V_1(\boldsymbol{\xi}(t))\equiv0$, 从而 $\boldsymbol{x}(t)\equiv\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\xi}(t)\equiv\mathbf{0}$. 证毕.

定理 3.2. 设式(1.2)满足假设 1，且是全局最小相位的. 如果 $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{f},G)$ 是光滑反馈严格无源的，则式(1.2)是全局光滑可镇定的.

证明. 设光滑函数 $\boldsymbol{\alpha}:R^r\longmapsto R^m$, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, 光滑正定的适定函数 $V_1(\boldsymbol{\xi})$ 以及正定函数 $S(\boldsymbol{\xi})$, 使

$$V_1(\boldsymbol{\xi}(t))-V_1(\boldsymbol{\xi}^0)=\int_0^t\boldsymbol{y}^T(\tau)\boldsymbol{v}(\tau)\mathrm{d}\tau-\int_0^tS(\boldsymbol{\xi}(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{3.1}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 为 $\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})+G(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})+G(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{v}$ 过 $\boldsymbol{\xi}^0$ 的解. 可见 $\dot V_1=L_{f+G\alpha}V_1+L_GV_1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v}-S(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{v}$. 如果令 $\boldsymbol{v}=-(L_FV)^T$, $W=V(\boldsymbol{x})+V_1(\boldsymbol{\xi})$ (V 取自假设 1)，则

$$\begin{aligned}\dot W_{(1.2)}&=\dot V+\dot V_1=L_{f_0}V+L_FV_{\boldsymbol{y}}+L_{f+G\alpha}V_1+L_GV_1(-L_FV)^T\\&=L_{f_0}V-S(\boldsymbol{\xi})+L_FV\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^T(-L_FV)^T=L_{f_0}V-S(\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

从而，$\dot W_{(1.2)}=0$ 当且仅当 $L_{f_0}V=0$, $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$, 故 $\dot W_{(1.2)}=0$ 意味着 $\boldsymbol{y}=0$, $\dot V=0$. 若 $\gamma:t\longmapsto(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{\xi}(t))\in\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\,|\,\dot W_{(1.2)}=0\}$ 为闭环(1.2)的解曲线，则 γ 为有界的，且 $\boldsymbol{y}(t)\equiv\mathbf{0}$, $V(\boldsymbol{x}(t))=\text{const}$, $\boldsymbol{x}(t)$ 为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}(t),\mathbf{0})$ 的解. 由假设 $\boldsymbol{x}(t)\to0$ (当 $t\to\infty$)，故有 $\Delta\cap\Omega=\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\}$，从而定理结论成立. 证毕.

4 例子研究

考虑以下二例:

$$\begin{cases}\dot{x} = -(1+\phi(\xi_1,\xi_2))x^3 - xy^3, \\ \dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = u,\end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases}\dot{x} = -(1+\phi(\xi_1,\xi_2)+\alpha\xi_1^2+2\beta\xi_1\xi_2+\gamma\xi_2^2)x^3, \\ \dot{\xi}_1 = \xi_2,\ \dot{\xi}_2 = u.\end{cases} \tag{4.2}$$

其中 ϕ 为光滑函数，$\phi(0,0)+1>0$，$|\phi(\xi_1,\xi_2)|\leqslant 1$，$\forall(\xi_1,\xi_2)\in R^2$，参数 $c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma$ 为常数。

文[11]着重讨论了上二例中 $\phi\equiv 0$ 的情形。当 $\phi\not\equiv 0$ 时，文[11]中结论已不再适用。利用本文的结果可以得到以下定理。

定理 4.1. 式(4.1)是全局光滑可镇定的当且仅当下例条件之一成立：

i) $c_1c_2\geqslant 0$，$c_1\neq 0$ 或者 $c_i=0$，$i=1,2$；

ii) $c_2\neq 0$，$c_1=0$ 且 $c_2>0$ ($c_2<0$) 时，$\phi(\xi_1,0)=-1$ 无正解(负解)。

定理 4.2. 式(4.2)是全局光滑可镇定的当且仅当下列条件之一成立：

i) $\alpha>0$；

ii) $\alpha=0$，$\beta\leqslant 0$ 或 $\beta>0$，对任意 $\xi_1\in R$，$\phi(\xi_1,0)+1\neq 0$；

iii) $\alpha<0$，$\gamma>0$ 或 $\alpha<0, \gamma\leqslant 0$，$\beta\leqslant -\sqrt{\alpha\gamma}$.

限于篇幅证明略。

从定理 4.1，4.2 可以看出，式(4.1)，(4.2)中特殊的线性子系统使得当 $\phi(\xi)=\phi(\xi_2)$ 时，$\phi\not\equiv 0$ 与 $\phi\equiv 0$ 的光滑镇定性是一样的。当 $\phi\equiv 0$ 时，用定理 3.1 一样可以讨论，这说明本文的结果完全包含了文[11]的结果，从而，包含了现有的全局镇定结果。

参　考　文　献

[1] Sontag E D. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1989, **34**: 435—443.

[2] Sontag E D. Further facts about input to state stabilization. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1990, **35**: 473—476.

[3] David J H. Dissipative nonlinear systerns: Basic properties and stability analysis. Proc. of 31st CDC, Tucson, Arizona, Dec. 1992, 3259—3264.

[4] Byrnes C I, Isidori A, Willems J C. Passivity feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1991, **36**: 1228—1240.

[5] Isidori A. Dissipative inequalities in nonlinear H_∞-control. Proc. of 31st CDC, Tucson, Arizona, Dec. 1992, 3265—3270.

[6] Byrncs C I, Isidori A. Asymptotic stabilization of minimum phasc nonlinear systems. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1991, **36**: 1122—1137.

[7] Isidori A. Nonlinear control systems. 2nd Edition, Springer-Verlag, 1989.

[8] Isidori A. Moog C, Luca De. A sufficient condition for full linearization via dynamic feedback. Proc. of 26th CDC, 1986, 203—208.

[9] Sussmann H J. Limitations on the stabilizability of global minimum phase systems. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1990, **35**: 117—119.

[10] Sussmann H J, Kokotovic P V. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1991, **36**: 424—440.

[11] Kokotovic P V, Sussmann H J. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. *Syst. and Conlr. Lett.*. 1989, **13**: 125—133.

THE GLOBAL SMOOTH STABILIZATION FOR AFFINE NONLINEAR CASCADED SYSTEMS

FEI SHUMIN GAO WEIBING

(*The 7th Res. Division, Beijing Univ. of Aero. & Astro., Beijing* 100083)

ABSTRACT

In this paper, the global stabilization of the general nonlinear cascaded systems is studied. Under the assumption that a subsystem is smooth feedback passive, the sufficient condition that the nonlinear cascaded systems are globally stabilizable is given by using the passivity principle and the limit set theory of dynamic systems. This condition extends the existing results of global stabilization. Finally, two examples are given.

Key words: Passive systems, KYP property, positive real, global smooth stabilization.