第22卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 22, No. 3
1996 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1996

短 文

离散系统的鲁棒约束方差估计及应用
——模型噪声强度不确定情形[1)]

王子栋　　郭治
(南京理工大学自动控制系　南京　210094)

摘　　要

考虑离散随机系统在模型噪声强度不确定及估计误差方差受约束情形下的一类鲁棒状态估计问题，即希望找到这样的滤波增益，使得当模型噪声强度在一定范围内变动时，每个状态分量的估计误差方差始终不大于预先指定值. 文中给出了这种滤波增益的设计方法，并以一类机动目标跟踪问题为例，说明这种设计方法的直接性与有效性.

关键词: 离散随机系统，状态估计，鲁棒估计.

1 引言

在状态估计领域中，常常遇到的问题是，指标要求是以状态分量估计误差的方差或其上限的形式给出的. 对这类约束方差状态估计问题，使用传统方法往往效果不佳，有时甚至很困难. 如，最小方差状态估计在工程应用中常常达不到所希望的可靠度，因为某些状态分量的估计误差方差的允许值并不一定要求最小. 另外，由于此时滤波增益唯一，因而很难再满足其它指标要求(如鲁棒性)，这也将导致其应用效果不尽人意. 再如，加权最小方差估计[1]，是使状态估计的误差方差的一个加权和最小. 然而，使加权和最小并不能保证每个分量满足要求. 对给定的各分量估计误差的方差约束，这种方法并不能保证满足要求的权系数存在.

文献[2]提出了一种称之为误差协方差配置 (ECA) 理论的状态估计方法，其基本思想是设计滤波增益，使状态估计的稳态误差协方差配置至指定值. 并给出了误差协方差矩阵可配置的充要条件. 在工程实践中，测量噪声的统计特性比较容易获知，而系统模型噪声则不然. 如在机动目标跟踪问题中，模型噪声强度意味着目标的机动性，其值很难精确获知. 遗憾的是，ECA 理论不再适用于噪声强度变动下的约束方差估计，因为误差协方差的可配置条件直接依赖于系统的模型噪声强度值.

---

1) 高等学校博士点学科专项科研基金资助课题.
本文于 1993 年 9 月 3 日收到.

有鉴于此,本文研究这样一类鲁棒状态估计问题,即设计滤波增益,使得当模型噪声强度在一定范围内变动时,每个状态分量的估计误差方差始终小于或等于各自预先给定值.

2 问题的描述

考虑如下时不变离散随机系统

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+v(k) \tag{1a}$$

及测量方程

$$y(k)=Cx(k)+w(k), \tag{1b}$$

这里 $x(k)\in R^n$ 为状态;$u(k)\in R^m$ 为确定性输入; $y(k)\in R^p$ 为测量输出. 模型噪声 $v(k)$ 和测量噪声 $w(k)$ 为不相关的零均值高斯白噪声序列,且强度分别为 $V>0$ 和 $W>0$. 初始状态 $x(0)$具有均值 $\bar{x}(0)$和协方差 $P(0)$,且与 $v(k)$ 和 $w(k)$ 不相关.

状态估计向量满足

$$\hat{x}(k+1)=A\hat{x}(k)+Bu(k)+K(y(k)-C\hat{x}(k)), \tag{2}$$

其估计误差的稳态协方差为

$$P=\lim_{k\to\infty}P(k)=\lim_{k\to\infty}E[e(k)e(k)^T],e(k)=x(k)-\hat{x}(k).$$

假设 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$ 为第 i 个状态分量估计误差的方差约束,$\bar{V}$ 为模型噪声强度的可能最大值,则本文的目的可表述如下: 设计适当的滤波增益 K,使得当模型噪声强度 V 在 0 和 $\bar{V}$ 之间变动时(即 $0\leqslant V\leqslant\bar{V}$),下式始终成立

$$[P]_{ii}\leqslant\sigma_i^2\ (i=1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

这里,$[P]_{ii}$ 表示矩阵 P 的第 i 个对角元素. 误差方差约束 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$ 不应小于由传统的最小方差估计获得的最小方差.

3 主要结果及证明

由方程(1),(2)可得

$$e(k+1)=(A-KC)e(k)+v(k)-Kw(k), \tag{4}$$

$$P(k+1)=(A-KC)P(k)(A-KC)^T+KWK^T+V. \tag{5}$$

若 $A-KC$ 稳定(即其极点皆位于单位圆内),则在稳态时,(5)式可成为

$$P=(A-KC)P(A-KC)^T+KWK^T+V. \tag{6}$$

其解 P 满足 $P=P^T\geqslant 0$.

选取如下的正定矩阵 Y,满足

$$[Y]_{ii}\leqslant\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n). \tag{7}$$

利用矩阵 Y,方程(6)可表示为

$$\begin{aligned}&(P-Y)-(A-KC)(P-Y)(A-KC)^T+Y\\&-(A-KC)Y(A-KC)^T-KWK^T-V=0.\end{aligned} \tag{8}$$

由 Lyapunov 稳定性理论可知,若

$$Y-(A-KC)Y(A-KC)^T-KWK^T-V>0 \tag{9}$$

成立,则由 $A-KC$ 的稳定性,有

$P-Y<0$, $[P]_{ii}<[Y]_{ii}\leqslant\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$.

进一步,若

$$Y-(A-KC)Y(A-KC)^T-KWK^T-\bar{V}>0 \tag{10}$$

成立,则当 $0\leqslant V\leqslant\bar{V}$ 时,(9)式自然满足. 为此,只需选择适当的 K,使 $(A-KC)$ 稳定,且(10)式成立,即可完成鲁棒设计任务.

由矩阵求逆的 Frobenius 反演公式,易得

引理 1. 定义 $K_Y=AYC^T(CYC^T+W)^{-1}$,则(10)式等价于

$$Y-\bar{V}-A(Y^{-1}+C^TW^{-1}C)^{-1}A^T>(K-K_Y)(CYC^T+W)(K-K_Y)^T. \tag{11}$$

假设

$$Y-\bar{V}-A(Y^{-1}+C^TW^{-1}C)^{-1}A^T>0 \tag{12}$$

成立,则总可选取 $Q>0$,使不等式

$$Y-\bar{V}-A(Y^{-1}+C^TW^{-1}C)^{-1}A^T-Q\geqslant 0 \tag{13}$$

成立,且(13)式不等号左端的秩不大于 p.

由方程

$$Y-\bar{V}-A(Y^{-1}+C^TW^{-1}C)^{-1}A^T-Q=(K-K_Y)(CYC^T+W)(K-K_Y)^T \tag{14}$$

成立,或等价地由方程

$$Y=(A-KC)Y(A-KC)^T+KWK^T+\bar{V}+Q \tag{14'}$$

成立,可以得到不等式(11),(10)及(9),而且因 Y 正定,由 Lyapunov 稳定性理论及(14′)式,可知 $A-KC$ 稳定. 至此,可得如下结论: 对给定的满足(7)式的 $Y>0$,若(12)式成立,则方程(14)或(14′)的解 K 恰为所求的鲁棒滤波增益.

下面由(14)式求解 K. 定义

$$LL^T=Y-\bar{V}-A(Y^{-1}+C^TW^{-1}C)^{-1}A^T-Q, \tag{15}$$

$$TT^T=CYC^T+W. \tag{16}$$

其中 $L\in R^{n\times p}$,$T\in R^{p\times p}$. 则(14)式可写成

$$LL^T=(K-K_Y)TT^T(K-K_Y)^T.$$

从而有

$$LU=(K-K_Y)T.$$

其中 U 为任意适维正交阵,即 $UU^T=I$. 则

$$K=AYC^T(CYC^T+W)^{-1}+LUT^{-1}. \tag{17}$$

定理. 若存在正定阵 Y 满足(7),(12)二式, 则由(17)式所确定的滤波增益 K 可使得当模型噪声强度 V 在 0 和 $\bar{V}$ 之间变动时,状态估计误差的稳态方差始终满足(3)式.

说明 1. 可以看出,条件(7),(12)很容易验证,且鲁棒滤波增益 K 也容易计算, 而不需要求解任何 Riccati 方程或 Lyapunov 方程及其它递推方程.

说明 2. 从上面的推导过程不难发现,由于 Y,Q,U 选取的不唯一性,将很可能导致解的不唯一. 在具体设计时可利用这些自由度达到新的指标要求, 如滤波的过渡过程品质要求等,这方面的成果将另文发表. 具体设计时,因模型经简化后阶数一般较低, 可通

过数值搜索法求取满足(7),(12)二式的正定阵 Y,并得到K的集合.

4 应用举例

在机动目标跟踪问题中,总是期望无论被跟踪目标在一定范围内如何机动,其预测位置始终位于一预先给定的有效区域中. 本文所提出的鲁棒约束方差估计方法, 为这类工程问题的解决提供了一条行之有效的新途径.

设目标作等速直线运动,状态 $x=(x_1\dot{x}_1)^T$,其中 x_1 和 $\dot{x}_1$ 分别为位置和速度分量. 目标状态方程及测量方程为:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(k)+v(k),\ \bar{V}=\begin{bmatrix}0.15 & 0\\ 0 & 0.09\end{bmatrix},$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(k)+w(k), W=I_2.$$

现需设计滤波增益 K,使得当模型噪声强度 V 在 0 和 $\bar{V}$ 之间变动时,下式始终成立:

$$[P]_{11}\leqslant 1.9125, [P]_{22}\leqslant 1.5238.$$

由(7),(12),(13)式,有

$$Y=\begin{bmatrix}1.9 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}0.00483 & 0\\ 0 & 0.01\end{bmatrix}.$$

再由 K_Y 的定义及(15),(16)式,可得

$$K_Y=\begin{bmatrix}0.6552 & 0.6\\ 0 & 0.6\end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix}8.5757 & 2.3476\\ 0.8571 & 0.2555\end{bmatrix}, T=\begin{bmatrix}1.7029 & 0\\ 0 & 1.5811\end{bmatrix}.$$

取正交阵 $U=I$,将 K_Y、L、T、U 代入(17)式,得

$$K=\begin{bmatrix}5.6911 & 2.0848\\ 0.5033 & 0.7616\end{bmatrix}.$$

5 结论

对于线性离散随机系统在模型噪声强度不确定及估计误差方差受约束情形下的一类鲁棒状态估计问题,基于 Lyapunov 稳定性理论,给出了期望滤波增益的设计方法, 并简单说明了这种设计方法在机动目标跟踪问题中的应用. 从而为解决这类在工程实践中应用广泛,且极具理论价值的状态估计问题提供了一条直接有效的新途径.

参 考 文 献

[1] Stengel R F. Stochastic optimal control: theory and application. John Wiley and Sons, New York:1986.

[2] Yaz E, Skelton R E. Continuous and discrete state estimation with error covariance assignment. Proc. 30th IEEE CDC, Brighton: England, 1991, 3091—3092.

ROBUST CONSTRAINED VARIANCE ESTIMATION FOR DISCRETE SYSTEMS WITH MODEL NOISE INTENSITY UNCERTAINTY AND ITS APPLICATION

WANG ZIDONG　　GUO ZH

(Department, of Automatic Control, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

ABSTRACT

In this paper, the problem of robust state estimation for linear stochastic systems with model noise intensity uncertainty and state estimation error variance constraints is considered. The goal of this problem is to find the filter gain such that the estimation error variance of each state is less than or equal to the prescribed value. when the model noise intensity varies in a certain range. The design method for such a filter gain is given in the present paper. An example, dealing with the problem of tracking maneuvering targets, is provided to demonstrate the directness and effectiveness of this method.

Key words: Discrete stochastic systems, state estimation, robust estimation.