第 22 卷 第 5 期
1996 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 22, No. 5
Sep., 1996

短 文

一种区间系统鲁棒稳定补偿器设计的映射方法

林 岩

（中国人民大学信息学院 北京 100872）

摘 要

研究了一类区间系统的四条棱边同时稳定的问题，利用保形映射及 Nevanlinna-Pick 插值定理提出了一个可行的补偿器设计方法.

关键词: 区间系统，鲁棒稳定性，补偿器.

1 引言

考虑如下分子多项式固定的 SISO 正则区间系统:

$$\begin{cases} G_p(s,q)=\dfrac{n_p(s)}{d_p(s,q)}=\dfrac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}, \quad m\leqslant n, \\ q\in Q=\{q:q=[a_0,a_1,\cdots,a_n]^T, a_i\in[a_i^-,a_i^+], i=0,1,\cdots,n\}. \end{cases} \tag{1}$$

本文讨论当 $n_p(s)$ 与 $d_p(s,q)$ 无不稳定零极对消时，如何设计固定正则补偿器 $G_c(s)$，使单位反馈系统 $G_c(s)G_p(s,q)(1+G_c(s)G_p(s,q))^{-1}$ 对所有 $q\in Q$ 鲁棒稳定. 研究这一问题的意义首先在于区间系统具有现实的工程意义，其次，到目前为止，SISO 参数扰动系统的鲁棒稳定补偿器设计除最小相位等个别情形外[1-5]，并无有效方法.

2 主要结果

定义 1. 对于区间多项式 $d_p(s,q)$，$q\in Q$，称其如下多项式为 Kharitonov 多项式[6]:

$$\begin{aligned} d_1(s)&=a_0^-+a_1^-s+a_2^+s^2+a_3^+s^3+\cdots, & d_2(s)&=a_0^-+a_1^+s+a_2^+s^2+a_3^-s^3+\cdots, \\ d_3(s)&=a_0^++a_1^-s+a_2^-s^2+a_3^+s^3+\cdots, & d_4(s)&=a_0^++a_1^+s+a_2^-s^2+a_3^-s^3+\cdots. \end{aligned} \tag{2}$$

引理 1[7]. 一个固定补偿器 $G_c(s)\triangleq x_c(s)/y_c(s)$ 使区间系统 (1) 对所有 $q\in Q$ 鲁棒稳定，当且仅当如下四条棱边对所有 $\lambda\in[0,1]$ 为胡尔维茨多项式:

本文于 1994 年 2 月 15 日收到

$$\begin{cases} x_c(s)n_p(s)+y_c(s)[(1-\lambda)d_a(s)+\lambda d_b(s)]=0, \\ (a,b)=(1,2),(1,3),(3,4),(2,4). \end{cases} \tag{3}$$

引理 2. 区间多项式 $d_p(s,q)$, $q\in Q$, 之四个 Kharitonov 多项式有如下性质: 1) $d_2(s)-d_1(s)=d_4(s)-d_3(s)$, $d_3(s)-d_1(s)=d_4(s)-d_2(s)$; 2) 如 $d_p(s,q),q\in Q$,之首项系数满足 $a_n^+>a_n^-$, 则

$$\deg(d_3(s)-d_1(s))\begin{cases} >\deg(d_2(s)-d_1(s)), & n \text{ 为偶数}, \\ <\deg(d_2(s)-d_1(s)), & n \text{ 为奇数}. \end{cases} \tag{4}$$

证明. 直接由(2)式验证即可.

假设 1. 区间系统(1)满足: 当 n 为偶数时,有 $a_n^+>a_n^-$;当 n 为奇数时,有 $a_n^+=a_n^-$ 及 $a_{n-1}^+>a_{n-1}^-$.

因此,根据引理 2、假设 1,只需讨论 $\deg(d_3(s)-d_1(s))>\deg(d_2(s)-d_1(s))$ 一种情形即可.

假设 2. 多项式 $n_p(s)$ 及多项式 $(d_3(s)-d_1(s))$ 均无临界稳定根.

定理 1. 如对区间系统 $G_p(s,q)$,假设 1,2 成立,那末, 若存在两个同阶的胡尔维茨多项式 $\delta_1(s),\delta_3(s)$ 满足

1) 插值条件

$$\frac{\delta_3(s)}{\delta_1(s)}=\begin{cases} 1, & \text{如 } s \text{ 为 } (d_3(s)-d_1(s)) \text{ 在 } \boldsymbol{C}^+ \text{之根}, \\ d_3(s)/d_1(s), & \text{如 } s \text{ 为 } n_p(s) \text{ 在 } \boldsymbol{C}^+ \text{之根}, \end{cases} \tag{5}$$

以及当 $\deg(d_3(s)-d_1(s))=n-1$ 时的补充插值条件

$$\delta_3(s)/\delta_1(s)|_{s=\infty}=d_3(s)/d_1(s)|_{s=\infty}; \tag{5'}$$

2) 如下不等式对所有 $\omega\in\boldsymbol{R}$ 及 $\lambda\in[0,1]$ 成立:

$$\frac{\delta_3(j\omega)}{\delta_1(j\omega)}\neq\frac{d_3(j\omega)-[(1-\lambda)d_a(j\omega)+\lambda d_b(j\omega)]}{d_1(j\omega)-[(1-\lambda)d_a(j\omega)+\lambda d_b(j\omega)]}, \tag{6}$$

$$(a,b)=(1,2),(1,3),(3,4),(2,4),$$

则一定存在一个正则补偿器 $G_c(s)$ 使该系统鲁棒稳定.

证明. 因篇幅所限,仅给出主要思路.

1) 当条件 1)成立时,令

$$\begin{cases} x_c(s)=(\Delta_1(s)d_3(s)-\Delta_3(s)d_1(s))/n_p(s)(d_3(s)-d_1(s)), \\ y_c(s)=(\Delta_3(s)-\Delta_1(s))/(d_3(s)-d_1(s)), \end{cases} \tag{7}$$

则由文献[3]易知, $G_c(s)\triangleq x_c(s)/y_c(s)$ 为使子系统 $n_p(s)/d_1(s),n_p(s)/d_3(s)$ 同时稳定的补偿器. 这里, $\Delta_i(s)\triangleq e_{13}^-(s)\delta_i(s),i=1,3$, $e_{13}^-(s)$ 为 $(d_3(s)-d_1(s))$ 中所有稳定根组成的首一多项式;

2) 当条件 2)成立时,注意到假设 2,可证(6)式等价于对所有 $\omega\in\boldsymbol{R}$, $\lambda\in[0,1]$ 及 $(a,b)\in\{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4)\}$,有如下不等式成立:

$$x_c(j\omega)n_p(j\omega)+y_c(j\omega)[(1-\lambda)d_a(j\omega)+\lambda d_b(j\omega)]\neq 0, \tag{8}$$

于是, 由零点分离定理[8]及引理 1, 可知 $G_c(s)$ 使系统对所有 $q\in Q$ 鲁棒稳定. 正则补偿器的构造可见文献[9].

在定理 1 中，令 $u(\omega) \triangleq j[d_3(j\omega) - d_1(j\omega)]/[d_2(j\omega) - d_1(j\omega)]$，可推得(6)式等价于如下不等式对所有 $\omega \in \boldsymbol{R}, \lambda \in [0,1]$成立：

$$\frac{\delta_3(j\omega)}{\delta_1(j\omega)} \neq \begin{cases} -(1-\lambda)/\lambda, & (9.1) \\ 1 + j\dfrac{1}{\lambda}u(\omega), & (9.2) \\ 1\Big/\left[1 - j\dfrac{1}{\lambda}u(\omega)\right], & (9.3) \\ [1 + j(1-\lambda)u(\omega)]/[1 - j\lambda u(\omega)]. & (9.4) \end{cases}$$

记 $u_{\min} = \inf\limits_{\omega \geqslant 0} u(\omega)$，并注意到 $u(\omega)$ 为关于 ω 的奇函数，则不难验证，(9.1)—(9.4)式右边各式分别属于以下集合：

$$\begin{cases} H_1 \triangleq \{-(1-\lambda)/\lambda : \lambda \in [0,1]\} = (-\infty, 0], \\ H_2 \triangleq \{1 + ju(\omega) : u(\omega) \in (-\infty, -u_{\min}] \cup [u_{\min}, +\infty)\}, \\ H_3 \triangleq \{1/[1 - ju(\omega)] : u(\omega) \in (-\infty, -u_{\min}] \cup [u_{\min}, +\infty)\}, \\ H_4 \triangleq \{[1 + j(1-\lambda)u(\omega)]/[1 - j\lambda u(\omega)] : u(\omega) \in (-\infty, -u_{\min}] \cup \\ \qquad\qquad [u_{\min}, +\infty)\}. \end{cases} \tag{10}$$

令

$$H \triangleq \bigcup_{k=1}^{4} H_k, \tag{11}$$

则由(10)式可知，不用借助计算机即可方便地绘出域 H。图 1 为根据(10)式所绘典型域 H 的图形。

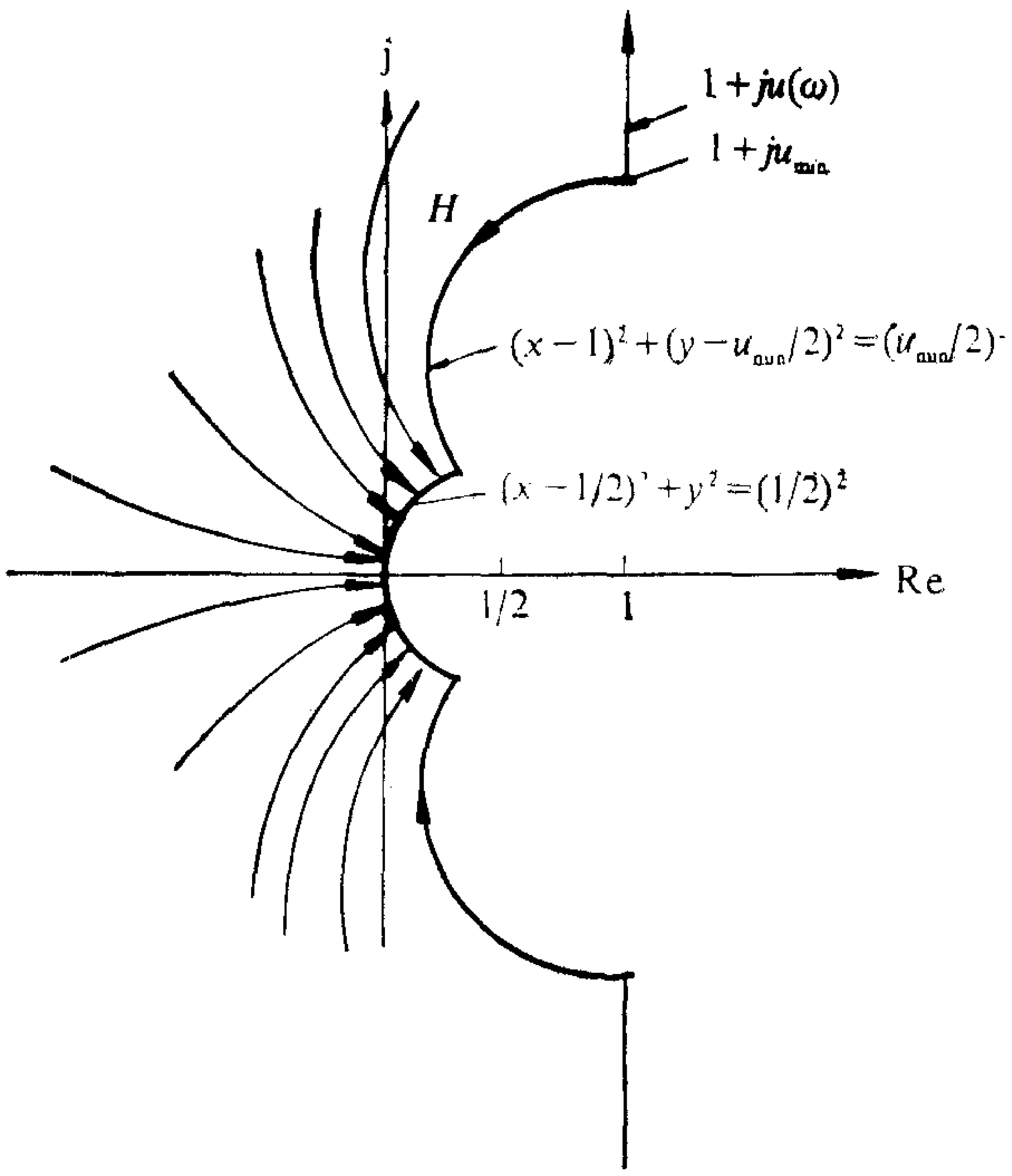

图 1　典型域 H 图形

为求满足定理 1 之 $\delta_1(s)$，$\delta_3(s)$，设 H^c 为 H 之补，$\widetilde{H}^c \subseteq H^c$ 为一单连域，考虑如图 2 所示的变换图。这里，$\overline{D}$，D 分别表示闭和开的单位圆盘，$\varphi: \boldsymbol{C}^+ \to \overline{D}$，$\theta: \widetilde{H}^c \to D$ 均为保形映射。首先利用 Nevanlinna-Pick 插值定理[10]求得 $h(s)$（如问题有解），再求得 $F(s) = \theta^{-1} \circ h \circ \varphi$。可证明，当 φ，θ^{-1} 均为实有理函数时，必有

$$\begin{array}{ccc} C^+ & \xrightarrow{F} & \widetilde{H}^c \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\theta \\ \overline{D} & \xrightarrow{h} & D \end{array}$$

图 2　变换图

$$F(s) = \delta_3(s)/\delta_1(s). \tag{12}$$

3 举例

考虑如下非最小相位不稳定区间系统：

$$G_p(s,q) = (s-6)(s+4)/\{[1,2]s^2 + [2,5]s + [-1,1]\}.$$

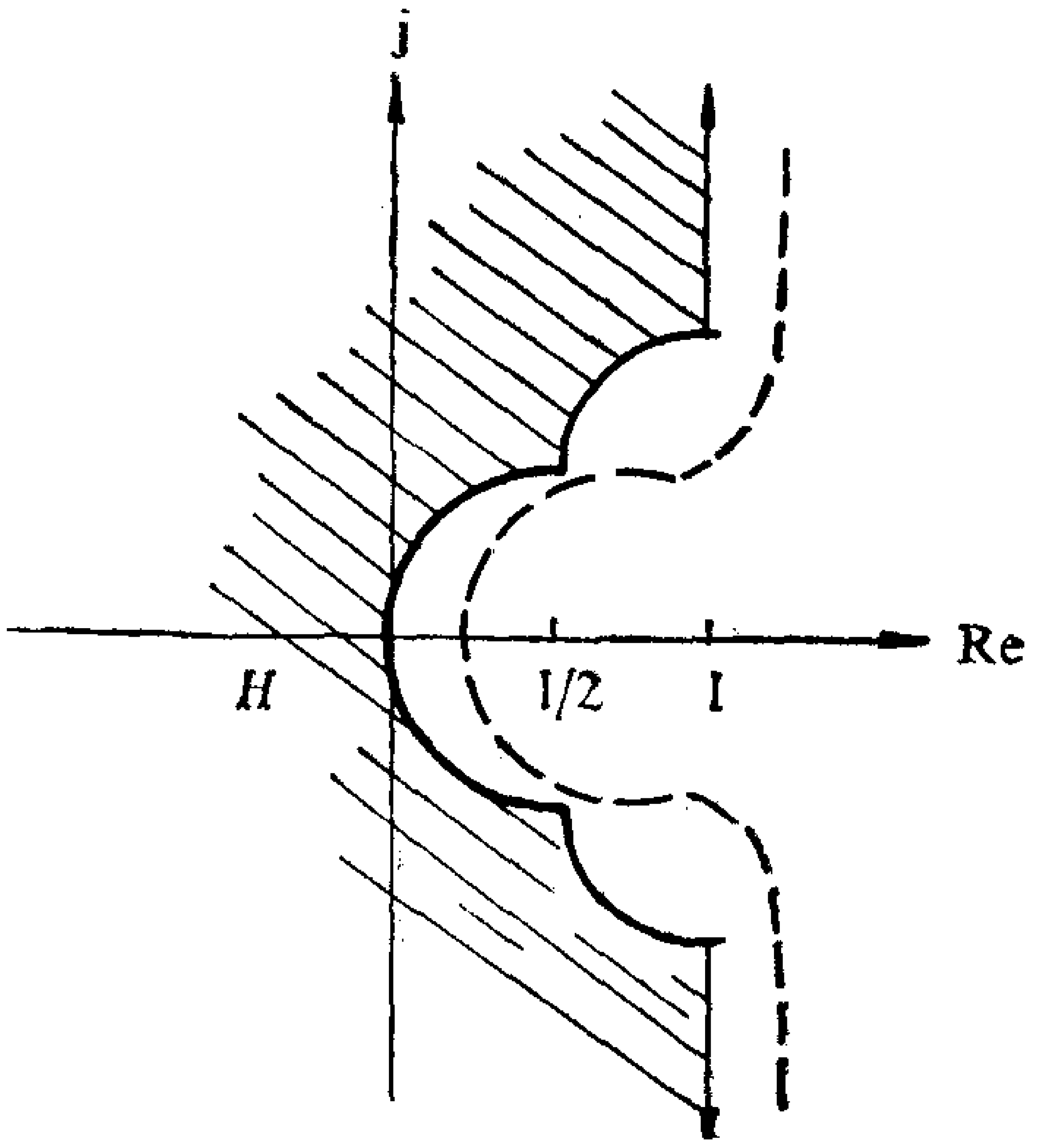

图 3 例中 H^c, $\widetilde{H}^c$ 图形

按(10)式绘得域H如图 3 所示。取

$$\varphi(s) = (s-1)/(s+1)$$

及

$$\theta^{-1}(s) = (8-2s-5s^2)/10(1-s).$$

由 $\theta^{-1}: D \to \widetilde{H}^c$ 得到 $\widetilde{H}^c$ 为图 3 中虚线右侧的区域。利用 Nevanlinna-Pick 插值定理算得

$$h(s) = (2.1738s - 1.0054)/(s - 2.2111).$$

进而，算得

$$F(s) = \theta^{-1} \circ h \circ \varphi = \delta_3(s)/\delta_1(s) = \frac{(0.7738s^2 + 9.9172s + 1.1535)}{(2.8818s^2 + 7.6794s + 0.1024)}.$$

由(7)式，得补偿器为

$$G_c(s) = x_c(s)/y_c(s) = \frac{-(1.3342s^2 + 1.9528s + 0.1480)}{2.1080(s+0.3526)(s+4)}.$$

本文讨论了设计鲁棒稳定补偿器使一个区间系统的四条棱边同时稳定的问题。现有的结果[2-5]仅能解决一条棱边的稳定情形，而多于四条棱边的稳定情形则尚待研究。

参 考 文 献

[1] Wei K, Yedavalli R K. Robust stubilizability for linear systems with both parameter variation and unstructured uncertainty. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1989, **AC-34**: 149—156.

[2] Khargonekar *et al.* Non-Eucliolian metrics and the robust stabilization of systems with parameter uncertainty. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1985, **AC-30**: 1005—1013.

[3] Ghosh B K. A new approach to simultaneous system design, Part II: Non-switching gain and dynamic feedback compensation by algebraic geometric methods. *SIAM Contr.* and *Optimizations.* 1988, **26**: 919—963.

[4] Olbrot A W, Nikodem M. Robust stabilization: Some extensions of the gain morgin maximization problem. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1994, **AC-39**: 652—657.

[5] Olbrot A W, Nikodem M. Robust stabilization of SISO systems with linear dependence on uncertain parameter. In: Proc. 31st IEEE Conf. Decision Contr., Tucson, 1992, 329—331.

[6] Kharitonov V L. Asymptotic stability of equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differencial'nye Uravnenija*, 1978, **14**: 2086—2088.

[7] Chapellat H, Bhattachayya S P. Ageneralization of Kharitonov's theorem: Robust stability of interval plants. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1989, **AC-34**: 306—311.

[8] Frazer R A, Duncan W J. On the criteria for stability for small motions. In: Proc. Roy. Soc. London, Ser, 1929, **A124**: 642—654.

[9] Wei K, Barmish B R, Making a polynomial Hurwitz inrariant by choice of feedback gains. *Int. J. Control*, 1989, **50**: 1039—1056.

[10] Delsarte P H *et al*. On the role of the Nevanlinna-Pick problem in circuit and system theory. *Circuit Theory and Applications*, 1981, **9**: 177—187.

ROBUST STABILIZABILITY FOR A CLASS OF INTERVAL PLANTS

LIN YAN
(*People's University of China, Beijing* 100872)

ABSTRACT

This paper investigates the problem of robust stabilizability for a class of interval plants. For the case where only four edges are considered, the paper derived a sufficient condition under which the four edges can be simultaneously stabilized by a proper compensator.

Key words: Interval plants, robust stabilizability, compensators.