



# 一类受控 Petri 网的状态反馈逻辑的综合

陈浩勋

(西安交通大学系统工程研究所 710049)

## 摘 要

将 Holloway 和 Krogh 关于受控标记图的禁态控制方面的结果扩展到更广泛的一类受控 Petri 网——不可控子网为前后向无冲突的受控 Petri 网，并去掉了关于初始标记和禁态规范的限制。

关键词: Petri 网, 离散事件系统, 状态反馈控制。

## 1 引言

在 Petri 网框架下研究离散事件系统的控制初见于文[1,2]。Holloway 和 Krogh<sup>[3]</sup>对一类受控 Petri 网——受控标记图 (CMG) 的禁态控制问题提出了一种状态反馈逻辑的综合方法, 但是 CMG 不能描述具有资源冲突的系统。文[3]中所提出的方法要求所考察的 CMG 是安全的, 其禁态集条件满足所谓的 ppic 条件。

本文从三个方面扩展了文[3]的结果: (1)考虑比 CMG 更广泛的一类受控 Petri 网, 这类网不但能象 CMG 那样描述进程(事件)同步, 而且能描述可控的资源冲突行为; (2)所考虑的网不再要求是安全的; (3)去掉了文[3]中加在禁态集规范上的 ppic 条件。

## 2 基本概念和问题

受控 Petri 网 (CtlPN) 由五元组  $N = (P, T, E, C, B)$  描述, 其中  $P, C$  分别为状态库所集和控制库所集,  $T$  为变迁集,  $E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  为连接状态库所和变迁的有向弧集,  $B \subseteq (C \times T)$  为连接控制库所和受控变迁的有向弧集。图 1 给出了 CtlPN 的一个实例, 其中控制库所用矩形表示。

**定义 1.** 受控 Petri 网  $N$  的不可控子网为普通 Petri 网  $N_u = (P, T_u, E_u)$ , 其中  $T_u = \{t \in T \mid \forall c \in C, (c, t) \notin B\}$  为  $N$  的不可控变迁集,  $E_u = (E \cap (T_u \times P)) \cup (E \cap (P \times T_u))$ 。即  $N_u$  由  $N$  通过删除其所有控制库所及其相关联的可控变迁和弧得到。图 2 给出图 1 所示 CtlPN 的不可控子网。  $N_u$  可能有孤立的库所。

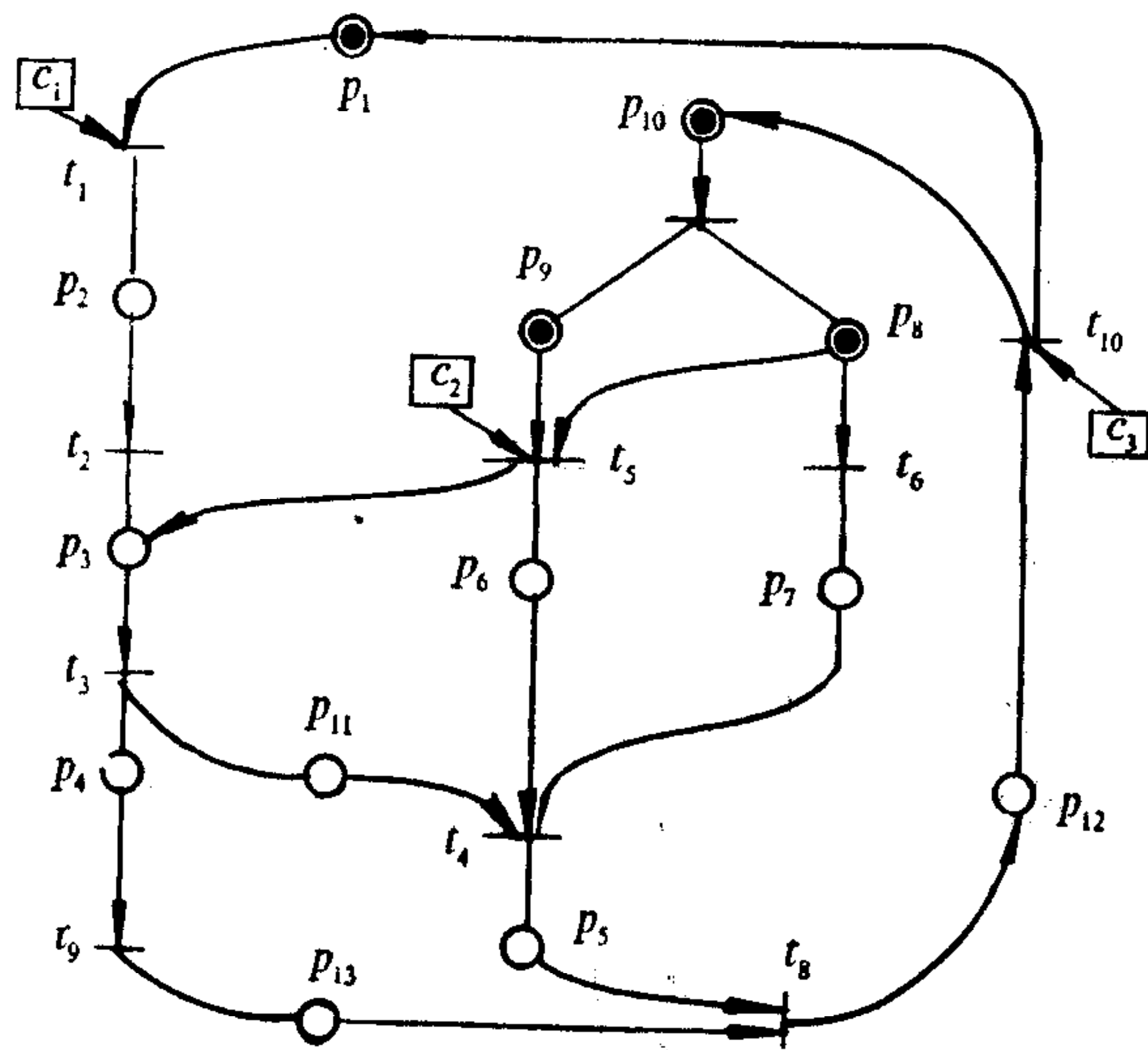


图 1 一个受控 Petri 网

**定义 2.** 一个普通 Petri 网称为是前后向无冲突网 (FBCF 网), 当且仅当它的每一个库所最多只有一个输入变迁和一个输出变迁.

图 2 所示网为 FBCF 网.

CtIPN  $N$  的控制是一映射  $u: C \rightarrow \{0, 1\}$ , 它置控制库所以 0 个或 1 个 token.  $N$  的一个变迁  $t$  在标记  $m(m: P \rightarrow Z, Z$  为非负整数集) 和控制  $u$  下可触发, 当且仅当  $m(p) \geq 1, \forall p \in P, (p, t) \in E$  (状态使能) 和  $u(c) = 1, \forall c \in C, (c, t) \in B$  (控制使能).

$N$  的(不确定性)状态反馈控制律为一映射  $U: \mathcal{M} \rightarrow 2^{\mathcal{U}}$ , 其中  $\mathcal{M}, \mathcal{U}$  分别为  $N$  的标记集和控制集.  $U$  把每一个标记映射成一个控制集合. 最大允许 (maximally permissive) 状态反馈律的定义见文献[3].

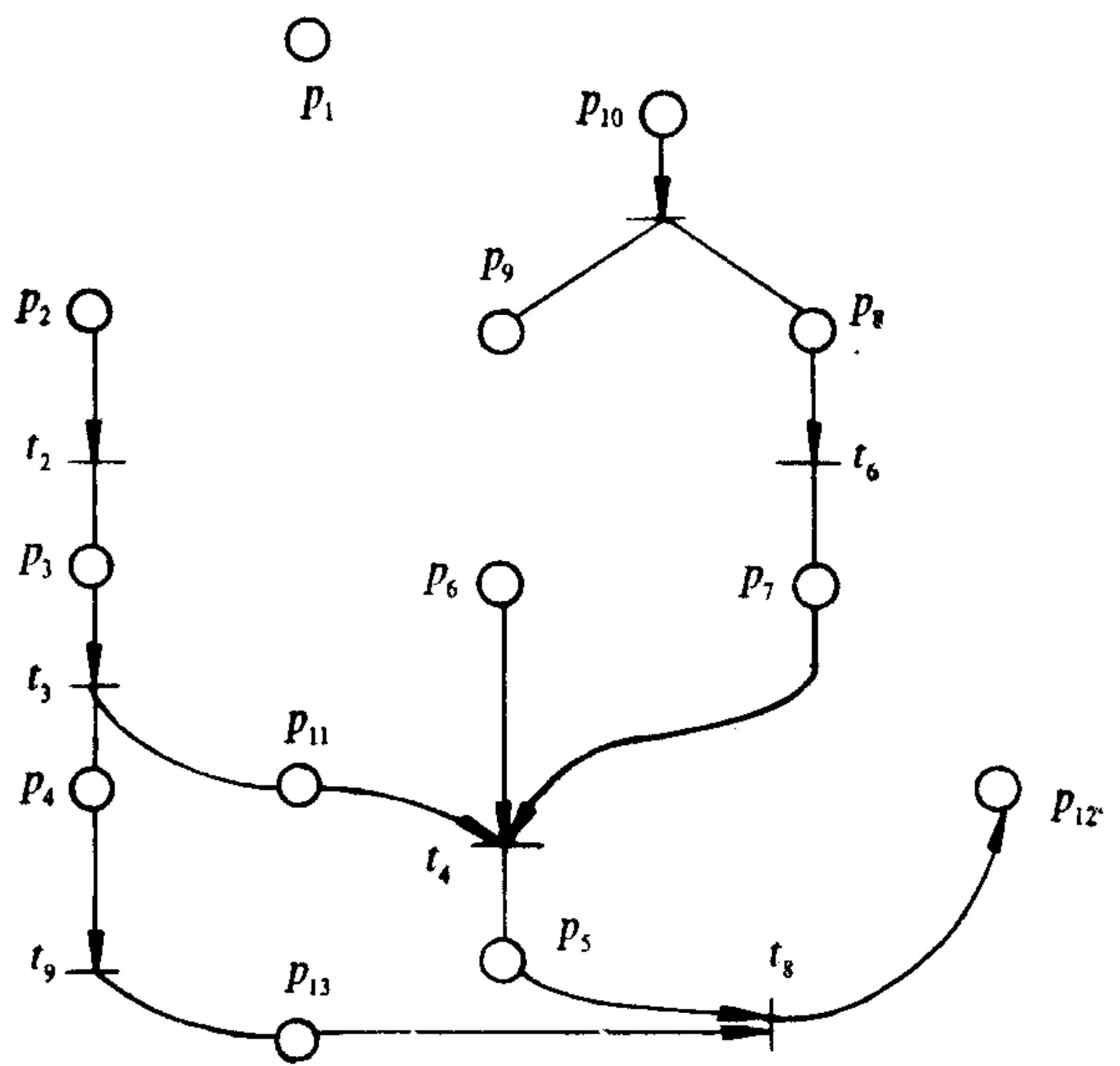


图 2 图 1 所示 CtIPN 的不可控子网.

本文所考虑 CtIPN  $N$  的禁止标记集(禁止状态集)为  $\mathcal{M}_g = \bigcup_{(w_i, k_i) \in \mathcal{F}} \mathcal{M}_{(w_i, k_i)}$ , 其

$$\mathcal{F} = \{(w_i, k_i), i = 1, 2, \dots, l\}, w_i: P \rightarrow Z, k_i \in Z; \mathcal{M}_{(w_i, k_i)} = \left\{ m \in \mathcal{M} \mid \sum_{p \in P} w_i(p) m(p) > k_i \right\}.$$

文[3]所考虑的禁态集为以上  $\mathcal{M}_g$  的特例.

### 3 FBCF 网的最大加权托肯和

以下讨论不可控子网为 FBCF 网、禁态集为  $\mathcal{M}_g$  的 CtlPN 的最大许可状态反馈律的综合问题。

设 FBCF 网  $N = (P, T, E)$ , 其中  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ,  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ ,  $E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ .  $A$  为  $N$  的邻接矩阵 (incidence matrix), 即  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $a_{ij} = 1$  若  $(t_i, p_j) \in E$ ,  $a_{ij} = -1$  若  $(p_j, t_i) \in E$ ,  $a_{ij} = 0$  其它情况.  $\mathcal{M}$  为  $N$  的标记集. 记

$$\mathcal{M}_0 = \{m \in \mathcal{M} \mid N \text{ 在标记 } m \text{ 时每一有向回路至少包含一个托肯}\}.$$

**引理 1.** 对 FBCF 网  $N$  及  $m_0 \in \mathcal{M}_0$ ,  $m \in R(N, m_0)$  当且仅当存在  $x \in \mathbb{Z}^m$  使  $m = m_0 + A^T x$ .

证明. FBCF 网显然也是 trap-circuit 网<sup>[4]</sup>, 故根据文[4]中定理 17, 要证明本引理, 只需证  $(N_x, m_{0x})$ <sup>[4]</sup> 所有 Siphons 都包含托肯即可.

**引理 2.** 若  $A$  是 FBCF 网  $N$  的邻接矩阵, 则  $[I_n, -A^T]$  是一个全  $\Delta$  模 (totally unimodular) 矩阵, 即  $[I_n, -A^T]$  的任一方子矩阵的行列式为 0, 1 或 -1. 其中  $I_n$  为  $n \times n$  的单位矩阵.

证明. 设  $D = [D_1, D_2]$  为  $[I_n, -A^T]$  的任一方子矩阵, 其中  $D_1, D_2$  分别为  $I_n$  和  $-A^T$  的子矩阵,  $D_1, D_2$  中可能有一个为空. 注意到  $-A^T$  的每一行最多只有二个非零元素 +1 或 -1,  $D_2$  的每一行也最多只有二个非零元素 +1 或 -1.

若  $D_1$  有一零列, 则  $|D| = 0$ ; 否则, 既然  $D_1$  的每一列都为单位向量, 有  $|D| = \pm |D'_2|$ , 其中  $D'_2$  为  $D_2$  的方子矩阵. 显然,  $D'_2$  的每行也最多只有二个非零元素 +1 或 -1.

若  $D'_2$  有一零行, 则  $|D'_2| = 0$ ; 若  $D'_2$  有一  $\Delta$  行 (恰有一非零元素 +1 或 -1 的行), 则按此行行列式展开得  $|D'_2| = \pm |D'_2'|$ , 其中  $D'_2'$  为  $D'_2$  的真子方矩阵.

重复以上过程, 将最终推得  $|D'_2| = 0, +1$  或  $-1$ , 或  $|D'_2| = \pm |D'_2''|$ , 其中  $D'_2''$  的每行均恰有二非零元素 +1 和 -1. 既然  $D'_2''(1, 1, \dots, 1)^T = 0$ , 得  $|D'_2''| = 0$ . 从而,  $|D| = 0, +1$  或  $-1$ .

**定理 1.** 设  $w \in \mathbb{Z}^n$ , 对 FBCF 网  $N$  及其初始标记  $m_0 \in \mathcal{M}_0$  成立

$$\max \{m^T w \mid m \in R(N, m_0)\} = \min \{m_0^T I \mid I \geq w, AI \leq 0\}, \quad (1)$$

其中  $R(N, m_0)$  为  $N$  从  $m_0$  出发的可达标记集.

证明. 既然  $m_0 \in \mathcal{M}_0$ , 根据引理 1,  $m \in R(N, m_0)$  当且仅当存在非负整向量  $x$  使  $m = m_0 + A^T x$ . 这样, (1) 式左边可归结为如下的线性规划问题:

$$\max J = c^T z, \text{ s. t. } Dz = m_0, z \geq 0. \quad (2)$$

其对偶问题为

$$\min L = m_0^T I, \text{ s. t. } D^T I \geq c, I \text{ 为自由向量.} \quad (3)$$

问题(3)和(1)式的右边等价. 因  $D$  是全  $\Delta$  模矩阵, 故线性规划问题(2), (3)的约束集合的所有极点的坐标均为整数. 从而, 应用对偶定理即得等式(1).

**定义 3.** 给定普通 Petri 网  $N$  及其邻接矩阵  $A$ , 一个非负整向量  $x$  称为是  $N$  的一个

$S$  一减, 当且仅当  $Ax \leq 0$ .

**定义 4.** 给定一个非负整向量  $w$ ,  $N$  的一个  $S$  一减  $x$  称为是由  $w$  生成的一个最小  $S$  一减, 当且仅当 1)  $x \geq w$ ; 2) 不存在满足 1) 的其它  $S$  一减  $\tilde{x}$  使  $\tilde{x} < x$ . 这是“ $\geq$ ”和“ $<$ ”分别为向量大于等于号和小于号.

以下用  $SD_{\min}(N, w)$  表示由  $w$  所生成的  $N$  的最小  $S$  一减的集合.

**推论 1.** 若  $w, N, m_0$  满足定理 1 中条件, 则

$$\max \{m^T w \mid m \in R(N, m_0)\} = \min_{I \in SD_{\min}(N, w)} m_0^T I. \quad (4)$$

## 4 最大允许状态反馈律的综合

考虑 CtlPN  $N$  及其不可控子网  $N_u$ 、禁态集  $\mathcal{M}_g$ . 设  $N_u$  为 FBCF 网. 引入谓词

$$P_i: P_i(m) = \begin{cases} 1, & m^T I \leq k_i, \\ 0, & \text{其它情况,} \end{cases} \text{ 对每个 } I \in SD_{\min}(N_u, w_i), i = 1, 2, \dots, l.$$

$$P' = \bigvee_{I \in SD_{\min}(N_u, w_i)} P_i, \quad P_a = \bigwedge_{i=1}^l P_i.$$

设  $\delta: 2^T \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  为  $N$  的状态转移函数. 记

$$T_c(m) = \{S \subseteq T \mid \text{变迁集 } S \text{ 在 } N \text{ 处于标记 } m \text{ 时是状态使能的}\},$$

$T_c(m, u) = \{S \subseteq T \mid \text{变迁集 } S \text{ 在 } N \text{ 处于标记 } m \text{ 和控制 } u \text{ 时是状态使能和控制使能的}\},$

$$T_a(m) = \{S \in T_c(m) \mid P_a(\delta(S, m)) = 1 \wedge (\forall S' \subseteq S, P_a(\delta(S', m)) = 1)\},$$

$$U_g: \mathcal{M} \rightarrow 2^u; \quad U_g(m) = \{u \in \mathcal{U} \mid T_c(m, u) \subseteq T_a(m)\}.$$

**定理 2.** 给定一个其不可控子网为 FBCF 网的 CtlPN  $N$  及禁态集  $\mathcal{M}_g$ , 以上所定义的  $U_g$  为此禁态控制问题的极大允许状态反馈律.

证明. 类似于文献[3]中相应定理.

从定理 2 知,  $N$  的极大允许禁态控制可分成离线和在线计算两部分来实现. 离线计算主要是计算  $SD_{\min}(N_u, w_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , 这可应用单纯形法求解线性不等式约束  $\{I \geq w_i, A_u I \leq 0\}$  的极点来实现(其中  $A_u$  为  $N_u$  的邻接矩阵). 在线计算主要是对谓词  $P_a$  进行评判.

值得注意的是, 当  $N$  为 CMG, 向量  $w_i, i = 1, 2, \dots, l$  的分量均为 0 或 1,  $P_i \triangleq \{p \in P \mid w_i(p) = 1\}$  满足文献[3]中所谓的 ppic 条件时,  $SD_{\min}(N_u, w_i)$  的计算可转化为文献[3]中  $\Pi_c(i, p), p \in P_i$  的计算.

## 参 考 文 献

- [1] Krogh BH. Controlled Petri nets and maximally Permissive feedback logic. In: Proc. of the 25th Annual Allerton Conference. University of Illinois, Urbana, 1987, 317—326.
- [2] Ichikawa A, Hiraishi K. Analysis and Control of discrete event systems represented by Petri nets. Discrete Event Systems: Models and Applications. Now York: Springer-Verlag, 1987. 125—145.

- [3] Holloway LE, Krogh B H. Synthesis of feedback control logic for a Class of Controlled Petri, *IEEE Trans. on Automatic Control*. 1990, 35(5):514—523.
- [4] Murata T. Petri nets: Properties, analysis and applications, In: Proc. of the IEEE. 1989, 77(4): 540—580.

## SYNTHESIS OF STATE FEEDBACK LOGIC FOR A CLASS OF CONTROLLED PETRI NETS

CHEN HAOXUN

(Systems Engineering Institute, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

### ABSTRACT

The previous work of Holloway and Krogh on the synthesis of feedback control logic for controlled marked graphs is extended to a more general class of controlled Petri nets whose uncontrolled subnets are forward and backward conflict-free nets, and the restrictions on initial markings and forbidden state set specifications of controlled marked graphs in their work are taken away.

**Key words:** Petri net, discrete event system, state feedback control.