第22卷 第5期　　自 动 化 学 报　　Vol. 22, No. 5
1996 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Sep., 1996

含结构参数扰动的线性连续系统的鲁棒约束方差控制[1)]

王子栋　郭　治
(南京理工大学自控系　南京　210094)

摘　　要

考虑含结构参数扰动的线性连续随机系统的鲁棒约束方差控制设计问题，即寻找状态反馈控制器，使受扰系统不仅具有期望的稳定裕度，而且其每个状态分量的稳态方差不大于各自预先给定的上界. 给出了具有这种性能的鲁棒控制器的存在条件及解析表达式，并以数值例子说明文中设计方法的直接性与有效性.

关键词: 线性连续随机系统，参数扰动，约束方差控制，鲁棒控制.

1　引言

在随机控制问题中，系统的性能指标常常表现为系统状态方差的上界的形式，如大型空间结构的振动特性[1]（包括稳定性和振动水平）、目标在给定区域内的滞留特性[2,3]（包括滞留时间、滞留概率、穿越频率）、激光通信系统的暂态特性[3]（包括马尔柯夫参数等）. 基于这样的工程背景而形成的约束方差控制问题，近年来引起众多学者的浓厚兴趣. 解决问题的主要思想是设计控制器，使闭环系统的状态方差不大于预先指定值，从而满足控制系统的性能指标要求. 传统的设计方法，如 LQG，H^∞，L_1 设计等，对于这类约束方差设计问题都是间接的，有时甚至不可行. 主要原因是这些方法并不能保证每个状态方差分别满足预先给定的约束. 80 年代末形成现已日趋完善的协方差控制理论[4-6]，则为满足约束方差要求的控制系统设计提供了一种直接有效的方法.

在过去的 20 年中，鲁棒反馈系统的分析与设计一直是控制理论的中心课题之一. 关于稳定鲁棒控制器设计问题，已有大量的成果，而性能鲁棒控制器设计问题的成果则少得多. 在有关约束方差控制的文献中，一般都是假定系统模型是精确的（文献 [7] 只考虑了稳定鲁棒性），但实际上建模过程中不可避免地存在着建模误差，而这将直接影响控制系统的稳定性. 因此，如何设计性能鲁棒控制器，使参数受扰系统不仅具有期望的稳定裕度，而且能保持其期望性能（即系统的稳态方差始终不大于预先指定值），则是亟待解决的问题. 本文基于以上分析，考虑线性连续随机系统在结构参数扰动下的鲁棒约束方差控

1）国家自然科学基金、高等学校博士点学科专项科研基金及南京理工大学科研发展基金资助课题.
本文于 1993 年 11 月 16 日收到

制问题.

2 问题的描述

考虑如下连续不确定线性定常随机系统:

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(\sigma)]x(t) + Bu(t) + Dw(t). \tag{1}$$

这里状态 $x(t) \in R^{n_x}$, 控制输入 $u(t) \in R^{n_u}$, 噪声输入 $w(t) \in R^{n_w}$. $w(t)$ 为零均值高斯白噪声过程,且协方差为 $W > 0$. A, B, D 为适维常数阵,且 D 满足 $DWD^T > 0$. $\Delta A(\sigma)$ 为表示结构扰动的实值矩阵函数, σ 为一不确定参数向量,属于一紧集.

假定参数扰动具有如下时不变结构[8]:

$$\Delta A(\sigma) = MF(\sigma)N, \tag{2}$$

其中 $F(\sigma) \in R^{i \times j}$ 是未知矩阵函数, M, N 为适维已知常数矩阵. 对 $F(\sigma)$, 假定

$F(\sigma) \in \mathscr{F} = \{F(\sigma): F(\sigma)F^T(\sigma) \leqslant I$, $F(\sigma)$ 的所有元素都是 Lebesgue 可测$\}$. (3)

若 $F(\sigma) \in \mathscr{F}$, 则称 $\Delta A(\sigma)$ 或 $F(\sigma)$ 是可允许的.

若状态反馈控制律为

$$u(t) = Gx(t), \tag{4}$$

则闭环系统成为

$$\dot{x}(t) = [A_c + \Delta A(\sigma)]x(t) + Dw(t), \quad A_c = A + BG. \tag{5}$$

若闭环矩阵 $A_c + \Delta A(\sigma)$ 稳定,则由下式定义的闭环系统的稳态状态协方差矩阵

$$X \triangleq \lim_{t \to \infty} E[x(t)x^T(t)], \tag{6}$$

存在且满足如下连续 Lyapunov 方程:

$$[A_c + \Delta A(\sigma)]X + X[A_c + \Delta A(\sigma)]^T + DWD^T = 0. \tag{7}$$

鲁棒约束方差控制问题详述如下:

设计状态反馈控制器 G, 使下列性能指标同时得到满足

1) 闭环系统 (5) 对所有可允的扰动 $\Delta A(\sigma)$ 渐近稳定, 且具有期望的稳定裕度 $\delta(\delta > 0)$, 即 $A_c + \Delta A(\sigma) + \delta I$ 渐近稳定;

2) 闭环系统各状态分量的稳态方差满足给定约束,即有

$$[X]_{ii} \leqslant \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n_x. \tag{8}$$

这里 $[X]_{ii}$ 表示 X 的第 i 个对角元素, 即第 i 个状态分量的稳态方差. 期望方差约束 $\sigma_i^2 (i = 1, 2, \cdots, n_x)$ 可由实际系统性能要求确定. 但应不小于由传统的最小方差控制获得的最小方差.

3 主要结果

定理 1. 给定期望裕度 $\delta > 0$, 若存在参数 $\varepsilon > 0$ 使代数矩阵方程

$$A_cQ + QA_c^T + 2\delta Q + \varepsilon MM^T + \varepsilon^{-1}QN^TNQ + DWD^T = 0 \tag{9}$$

有正定解 $Q>0$，则有如下结论：

1）闭环系统（5）对所有可允的 $F(\sigma)$ 具有期望稳定裕度 δ，即 $A_c+\Delta A(\sigma)+\delta I$ 渐近稳定；

2）闭环系统稳态协方差 X 存在且满足

$$X\leqslant Q. \tag{10}$$

证明.（1）若存在 $\varepsilon>0$ 使方程（9）有解 $Q>0$，则由 $F(\sigma)F^{\mathrm{T}}(\sigma)\leqslant I$ 以及

$$\begin{aligned}&[\varepsilon^{\frac{1}{2}}MF(\sigma)-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}QN^{\mathrm{T}}][\varepsilon^{\frac{1}{2}}MF(\sigma)-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}QN^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\\&\quad=\varepsilon MF(\sigma)F^{\mathrm{T}}(\sigma)M^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}QN^{\mathrm{T}}NQ-[\Delta A(\sigma)Q+Q\Delta A^{\mathrm{T}}(\sigma)]\geqslant 0,\end{aligned}$$

可知

$$\Delta A(\sigma)Q+Q\Delta A^{\mathrm{T}}(\sigma)\leqslant\varepsilon MM^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}QN^{\mathrm{T}}NQ.$$

令 $\Phi=\varepsilon MM^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}QN^{\mathrm{T}}NQ-[\Delta A(\sigma)Q+Q\Delta A^{\mathrm{T}}(\sigma)]\geqslant 0$，则方程（9）成为

$$A_cQ+QA_c^{\mathrm{T}}+2\delta Q+\Phi+[\Delta A(\sigma)Q+Q\Delta A^{\mathrm{T}}(\sigma)]+DWD^{\mathrm{T}}=0$$

或

$$[A_c+\Delta A(\sigma)+\delta I]Q+Q[A_c+\Delta A(\sigma)+\delta I]^{\mathrm{T}}+\Phi+DWD^{\mathrm{T}}=0, \tag{11}$$

由假设 $DWD^{\mathrm{T}}>0$ 及上式可知，存在正定阵 Q 使

$$[A_c+\Delta A(\sigma)+\delta I]Q+Q[A_c+\Delta A(\sigma)+\delta I]^{\mathrm{T}}<0.$$

故由 Lyapunov 稳定性理论，对所有可允的 $\Delta A(\sigma)$，$A_c+\Delta A(\sigma)+\delta I$ 渐近稳定，从而结论 1）得证。

2）因闭环矩阵 $A_c+\Delta A(\sigma)$ 渐近稳定，故由（6）式定义的协方差阵 X 存在且满足（7）式，将（11）式减去（7）式得

$$[A_c+\Delta A(\sigma)](Q-X)+(Q-X)[A_c+\Delta A(\sigma)]^{\mathrm{T}}+\Phi+2\delta Q=0.$$

上式等价于[9]

$$Q-X=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{[A_c+\Delta A(\sigma)]t}(\Phi+2\delta Q)\mathrm{e}^{[A_c+\Delta A(\sigma)]^{\mathrm{T}}t}\,\mathrm{d}t\geqslant 0,$$

即 $X\leqslant Q$，从而结论 2）得证.

注. 若对鲁棒性无要求（即 $M=0$ 或 $N=0$）且对稳定裕度无要求（即 $\delta=0$），则方程（9）退化为（7）式，而鲁棒约束方差控制问题退化为一般的约束方差控制问题[4—6].

由定理 1 知，代数矩阵方程（9）融合了动态特性约束和鲁棒稳态特性约束，通过如下方法可达到鲁棒设计目的：对闭环系统（5），若稳态方差约束 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n_x)$ 及稳定裕度 $\delta(\delta>0)$ 给定，选择适当的正定阵 Q，使之满足

$$[Q]_{ii}\leqslant\sigma_i^2\qquad(i=1,2,\cdots,n_x). \tag{12}$$

然后对这样的正定阵 Q 及稳定裕度 δ，寻找使方程（9）成立的控制器 G. 若这样的控制器 G 存在且可求，则由定理 1 可知，闭环系统稳定裕度为 δ 且有

$$[X]_{ii}\leqslant[Q]_{ii}\leqslant\sigma_i^2\qquad(i=1,2,\cdots,n_x).$$

从而本文所考虑的鲁棒约束方差控制问题得到解决. 这样，鲁棒约束方差控制问题实际上可转化为如下辅助的 Q-矩阵配置问题：

1）找到满足（12）式的正定阵 Q 可配置（即存在控制器 G 使方程（9）有正定解 Q）的充要条件；

2）若正定阵 Q 可配置，找到其相应（即使得方程 (9) 具有解 Q）控制器的解析表达式。

定理 2. 对给定的稳态方差约束 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n_x)$ 及稳定裕度 δ，满足 (12) 式的正定阵 Q 为可配置的充要条件是：存在参数 $\varepsilon>0$，使

$$(I-BB^+)(AQ+QA^{\mathrm T}+2\delta Q+\varepsilon MM^{\mathrm T}+\varepsilon^{-1}QN^{\mathrm T}NQ+DWD^{\mathrm T})(I-BB^+) = 0 \tag{13}$$

成立，这里 B^+ 表示 B 的 Moore-Penrose 广义逆。进一步，若正定阵 Q 是可配置的，则所有配置该正定阵 Q 的控制器 G 可表示为

$$G=-\frac{1}{2}B^+(AQ+QA^{\mathrm T}+2\delta Q+\varepsilon MM^{\mathrm T}+\varepsilon^{-1}QN^{\mathrm T}NQ+DWD^{\mathrm T}) \cdot(2I-BB^+)Q^{-1}+B^+SBB^+Q^{-1}+Z-B^+BZ, \tag{14}$$

其中 Z 为任意适维矩阵，S 为任意适维斜对称矩阵(即 $S=-S^{\mathrm T}$)。

对矩阵 B 进行奇异值分解，有

$$B=U\begin{bmatrix}\Sigma_B & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{\mathrm T}=[U_{B1}U_{B2}]\begin{bmatrix}\Sigma_B & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{B1}^{\mathrm T}\\ V_{B2}^{\mathrm T}\end{bmatrix}, \tag{15}$$

其中 U,V 为正交矩阵（即 $UU^{\mathrm T}=U^{\mathrm T}U=I$，$VV^{\mathrm T}=V^{\mathrm T}V=I$），$\Sigma_B$ 为 B 的所有非零奇异值组成的对角阵，$\Sigma_B\in R^{r_B\times r_B}$，$r_B=\operatorname{rank}B$。

由 (15) 式有

$$BB^+=U_{B1}U_{B1}^{\mathrm T},\quad I-BB^+=U_{B2}U_{B2}^{\mathrm T}, \tag{16}$$

$$U^{\mathrm T}(I-BB^+)U=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}. \tag{17}$$

上式中矩阵的分块情况同 (15) 式。

定理 2 的证明．注意到 $A_c=A+BG$，将方程 (9) 重写为

$$BGQ+(BGQ)^{\mathrm T}+K=0, \tag{18}$$

其中 $K\triangleq AQ+QA^{\mathrm T}+2\delta Q+\varepsilon MM^{\mathrm T}+\varepsilon^{-1}QN^{\mathrm T}NQ+DWD^{\mathrm T}$。

方程 (18) 等价于[10]

$$BG=-\frac{1}{2}(K+L)Q^{-1}, \tag{19}$$

其中 L 为某些斜对称阵($L=-L^{\mathrm T}$)。则 Q 是可配置的，当且仅当有斜对称阵 L 和 $\varepsilon>0$ 使方程 (19) 有解 G，即存在 L 及 ε 使下式成立[11]：

$$(I-BB^+)(K+L)=0. \tag{20}$$

上式等价于

$$U^{\mathrm T}(I-BB^+)UU^{\mathrm T}(K+L)U=0 \tag{21}$$

或

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_{11}+L_{11} & K_{12}+L_{12}\\ K_{21}+L_{21} & K_{22}+L_{22}\end{bmatrix}=0, \tag{22}$$

其中 $K_{ij}\triangleq U_{Bi}^{\mathrm T}KU_{Bj}$，$L_{ij}\triangleq U_{Bi}^{\mathrm T}LU_{Bj}$。

(22)式等价于

$$K_{22}+L_{22}=0,\quad K_{21}+L_{21}=0. \tag{23}$$

因 $K_{22}=K_{22}^{\mathrm{T}}$，$L_{22}=-L_{22}^{\mathrm{T}}$，则存在$L$使 (23) 式成立当且仅当

$$K_{22}=0, \tag{24}$$

亦即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}(U^{\mathrm{T}}KU)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}=0, \tag{25}$$

或

$$U^{\mathrm{T}}(I-BB^{+})U\cdot(U^{\mathrm{T}}KU)\cdot U^{\mathrm{T}}(I-BB^{+})U=0, \tag{26}$$

上式等价于

$$(I-BB^{+})K(I-BB^{+})=0, \tag{27}$$

即为 (13) 式. 从而定理 2 的前半部分得证.

若存在 $\varepsilon>0$，使 (27) 式或 (24) 式满足,则使 (19) 式有解G的斜对称阵L可表示为

$$L=[U_{B1} \quad U_{B2}]\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{B1}^{\mathrm{T}} \\ U_{B2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}=U_B\begin{bmatrix} L_{11} & K_{21}^{T} \\ -K_{21} & 0 \end{bmatrix}U_B^{\mathrm{T}}, \tag{28}$$

这里 L_{11} 为任意适维斜对称阵. 不妨将 L_{11} 表示为

$$L_{11}=U_{B1}^{\mathrm{T}}HU_{B1},\ H\ \text{为任意适维斜对称阵}, \tag{29}$$

注意到 $U_B=[U_{B1} \quad U_{B2}]$ 及 (16) 式和 K_{21} 的定义, (28) 式即为

$$L=BB^{+}HBB^{+}-KBB^{+}+BB^{+}K. \tag{30}$$

又式 (19) 关于G的通解为[11]

$$G=-\frac{1}{2}B^{+}(K+L)Q^{-1}+(I-BB^{+})Z, \tag{31}$$

其中 Z 为任意适维矩阵.

将 (30) 式代入 (31) 式即得

$$G=-\frac{1}{2}B^{+}K(2I-BB^{+})Q^{-1}+B^{+}SBB^{+}Q^{-1}+(I-BB^{+})Z, \tag{32}$$

其中 $S=-\frac{1}{2}H$ 为任意斜对称阵. 此即 (14) 式. 证毕.

由定理 2，可得到鲁棒约束方差控制问题的解.

定理 3. 给定稳态方差约束 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n_x)$ 及稳定裕度 $\delta>0$. 若有正定阵Q满足式 (12) 及可配置条件 (13)，则所考虑的鲁棒约束方差控制问题的解可由 (14) 式获得.

方程 (13) 虽给出了正定阵Q可配置的充要条件,但在工程应用中更希望能从(13)式直接构造出可配置正定阵，进而由 (14) 式直接求取相应的控制器 G，但方程 (13) 为一含参数 $\varepsilon>0$ 的关于Q的非线性代数矩阵方程,从中直接求解Q比较困难,类似的问题也存在于文献 [4,5,12] 中. 为此，可采用如下待定参数法构造 Q：令 $Q=(q_{ij})_{n_x\times n_x}$，其中 $q_{ij}=q_{ji}$ 以及 $\varepsilon>0$ 为待定参数,然后由 (13) 式确定各待定参数. 注意到 $I-BB^{+}$ 通常是对角元素为 0 或 1 的对角阵,且工程应用中模型阶数经简化后一般较低,上面的构造方法是可行的.

4 数值例子

考虑如下双积分器系统：$\dot{x}(t)=[A+\Delta A(\sigma)]x(t)+Bu(t)+Dw(t)$,

其中
$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ W=0.25I_2,$$
$$\Delta A(\sigma)=MF(\sigma)N=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\sigma&0\\0&\sin\sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.5\end{bmatrix}.$$
设计反馈控制器，使 1）闭环系统对可允的 $\Delta A(\sigma)$ 渐近稳定，且稳定裕度 $\delta=0.5$；2）闭环系统的稳态协方差满足 $[X]_{11}\leqslant 1.025$，$[X]_{22}\leqslant 4.327$。

令 Q 具有如下形式：
$$Q=\begin{bmatrix}q_{11}&q_{12}\\q_{12}&q_{22}\end{bmatrix},$$
代入可配置条件 (13) 中，可得 $2q_{12}+q_{11}+0.25\varepsilon+0.25\varepsilon^{-1}(q_{11}^2+q_{12}^2)+0.25=0$。相应于指标要求 2)，选择 $q_{11}=1$，$\varepsilon=0.474$，$q_{12}=-1.896$。为使 Q 正定，再选择 $q_{22}=4$，从而
$$Q=\begin{bmatrix}1&-1.896\\-1.896&4\end{bmatrix}.$$
在式 (14) 中取 $S=0$，$Z=0$，并将 $A,B,D,W,Q,M,N,\delta,\varepsilon$ 代入可得
$$G=[-5.81158,\ -4.59259].$$
经验证，闭环矩阵 $A+\Delta A(\sigma)+BG$ 的极点为：$-2.2963+0.25\sin\sigma\pm0.7339i$，显然其实部在 $[-2.5463,\ -2.0463]$ 之间，指标要求 1) 得到满足。再经仿真实验（用 PC-Matlab 仿真软件包进行），$[X]_{11}$ 最大为 0.9124，$[X]_{22}$ 最大为 3.8716，从而指标要求 2) 也得到满足。

参 考 文 献

[1] Skelton R E and DeLorenzo M L. Space structure control design by variance assignment. *J. Guidance and Control*, 1985, **8**(4):454—462.

[2] Kim S, Meerkov S M and Runolfsson T. Aiming control: design of residence probability controllers. *Automatica*, 1992, **28**(3):557—564.

[3] 徐　刚，陈学敏，郭　治. 一类工程系统的 q 马尔柯夫输出协方差配置控制. 自动化学报，1991，**17**(6): 669—675.

[4] Hotz A F and Skelton R E. Covariance control theory. *Int. J. Contr.*, 1987, **46**(1):13—32.

[5] Hsieh C and Skelton R E. All covariance controllers for linear discrete-time systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1990, **35**(8):908—915.

[6] Skelton R E and Iwasaki T. Liapunov and covariance controllers. *Int. J. Contr.*, 1993, **57**(3): 519—536.

[7] Zhu G, Corless M and Skelton R E. Robustness properties of covariance controllers. In: Proc. Allerton. Conf., 1989, Monticello, Illinois.

[8] Khargonekar P P, Petersen I R and Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H_∞ control theory. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1990, **35**(3):356—361.

[9] 何关钰. 线性控制系统理论. 沈阳：辽宁人民出版社. 1982.

[10] Barnett S and Storey C. Analysis and synthesis of stability matrix. *J. Differ. Equa.*, 1967, **3**(5):414.

[11] Ben-Israel A and Greville T N E. Generalized inverse: theory and application. John Wiley and Sons. Inc. 1974.

[12] Wang Zidong, Chen Xuemin and Guo Zhi. Controller design for continuous systems with variance and circular pole constraints. *Int. J. Systems Science, to appear*, 1995, **25**(5): 1249—1256.

ROBUST CONSTRAINED VARIANCE CONTROL FOR LINEAR CONTINUOUS SYSTEMS WITH STRUCTURED PARAMETER PERTURBATION

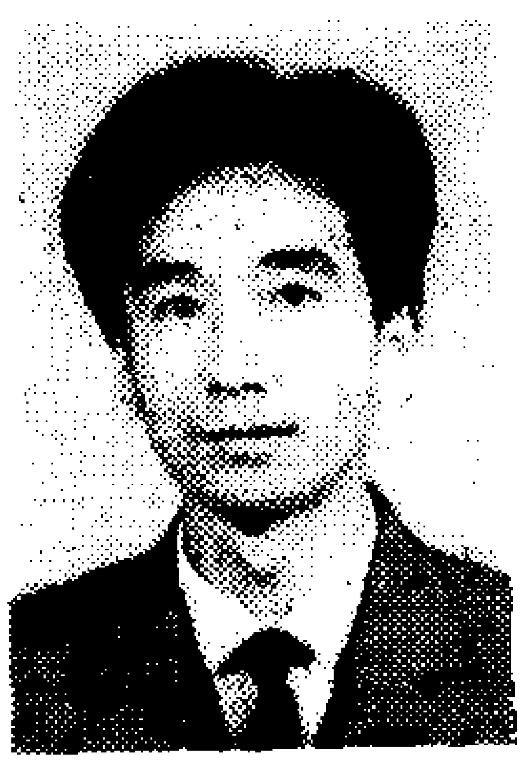
WANG ZIDONG GUO ZHI

(*Dept. of Automatic Control., Nanjing Univ. of Sci. & Tech., Nanjing* 210014)

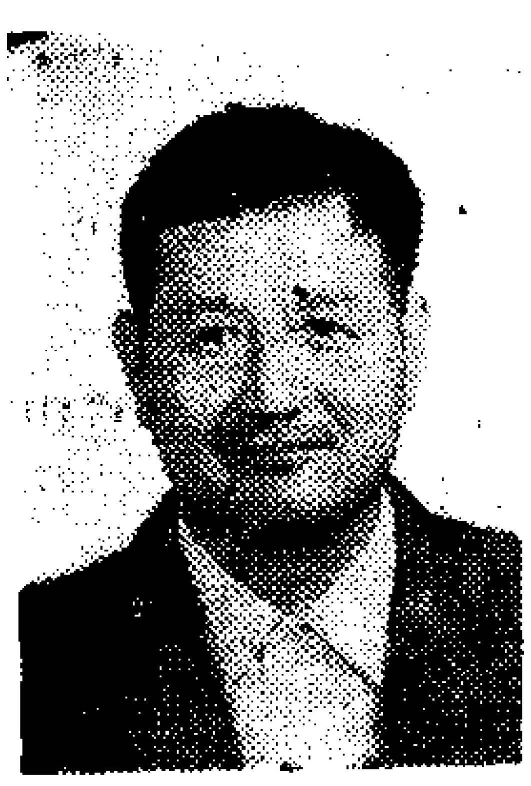
ABSTRACT

In this paper the problem of robust constrained variance control for linear continuous stochastic systems with structured parameter perturbation is considered. The purpose of this problem is to find the state feedback controllers such that the perturbed systems have the expected stability margin, and the steady-state variance for each state is not more than the prespecified value, simultaneously. The conditions for the existence of the performance robust controllers are given and the explicit expression is also provided. A numerical example is presented to show the directness and effectiveness of the design method.

Key words: Linear continuous stochastic systems, parameter perturbation, onstrained variance control, robust control.



王子栋 1966年生. 1986年于苏州大学数学系获数学专业学士学位，1988年于上海中国纺织大学获应用数学专业硕士学位，1994年于南京理工大学自动控制系获自动控制专业博士学位，同年晋升为副教授. 主要兴趣为线性及非线性控制系统综合设计的时域方法及其工程应用.



郭 治 1937年生. 1961年毕业于哈尔滨军事工程学院. 现为国务院学位委员会学科评议组成员，南京理工大学信息学院教授. 主要研究领域为：滤波与随机控制，兵器火力控制.