第22卷 第5期 自动化学报 Vol. 22, No. 5
1996年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1996

仿射非线性奇异系统的分析[1)]

刘晓平 鲁守银
(东北大学自控系 沈阳 110006)

摘　　要

从机器人控制中抽象出一类仿射非线性广义系统，给出此类系统的简化条件及方法，讨论了它的输出跟踪问题，并推出了可稳的充分条件.

关键词: 奇异系统，非线性系统，机器人控制.

1 引言

广义系统是一类较正常系统 $[\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})]$ 更广的系统，可由隐含微分方程描述，即

$$F(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})=0,$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 是状态变量，$\boldsymbol{u}\in R^r$ 是控制变量. 有时也可以表示为微分代数方程形式，即

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u}),\ 0=f_2(\boldsymbol{x},\lambda,\boldsymbol{u}).$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 是状态变量，$\boldsymbol{u}\in R^r$ 是控制变量，$\boldsymbol{\lambda}\in R^m$ 是约束乘子. 本文将研究仿射型非线性广义系统，即

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}+p(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda}, \tag{1}$$

$$0=q_i(\boldsymbol{x}),\quad i=1,\cdots,m, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x})+d(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda}. \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 是状态变量，$\boldsymbol{u}\in R^r$ 是控制变量，$\boldsymbol{\lambda}\in R^m$ 是约束乘子，$\boldsymbol{y}\in R^r$ 是输出变量，$f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$, $p(\boldsymbol{x})$, $q_i(\boldsymbol{x})$, $h(\boldsymbol{x})$ 和 $d(\boldsymbol{x})$ 均为足够可微函数. 一些机器人控制问题中涉及到奇异系统. 一般来说，机器人本身是一个强偶合的多变量控制系统，通常由非线性常微分方程来描述. 但是，当机器人执行任务过程中，常常因终端执行器同对象及环境接触而产生接触力，因而对机器人施加了某些限制，这些限制通常由非线性代数方程来描述，使机器人的控制模型成为一个非线性微分代数方程，即非线性广义系统. 机器人控制问题中存在着非线性广义系统问题，本文的目的就是从机器人控制系统中抽象一类仿射非线性广义系统，然后对这类系统的输出跟踪问题进行研究. 最后再将结论用于机器人的控制. 一方面为非线性广义系统的分析控制与设计提供一套方法；另一方面为机器

1) 国家自然科学基金、辽宁自然科学基金、辽宁博士启动基金资助课题，本文初稿曾在1994年中国控制会议宣读.
本文于1994年5月19日收到

人的控制提供一种新的途径，以便为非线性广义系统理论的建立和应用做一些初步性工作。

2 机器人控制问题中的广义系统

在机器人控制问题中，受限机器人，移动机器人及机器人的协调控制需用非线性广义系统来描述。

2.1 受限机器人

受限机器人的运动方程一般形式如下[1]：

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau + \Phi_q^{\mathrm{T}}(q)\lambda, \tag{4}$$

$$\Phi(q) = 0, \tag{5}$$

其中 q 是关节坐标，τ 是关节控制力，λ 是约束乘子，$\Phi(q)$ 是对机器人的约束。若令 $x_1 = q$，$x_2 = q$，$u = \tau$，则方程 (4),(5) 可等价地表示成

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{6}$$

$$\dot{x}_2 = f(x_1,x_2) + g(x_1,x_2)u + p(x_1,x_2)\lambda, \tag{7}$$

$$0 = \Phi(x_1). \tag{8}$$

2.2 机器手的协调控制

考虑双机器手搬运一个质量为 m 的重物，其运动方程为[2]

$$A_1(\theta_1)\ddot{\theta}_1 + B_1(\theta_1)\dot{\theta}_1 + C_1(\theta_1) = R_1u_1 + d_{11}(\theta_1)G_1 + d_{12}(\theta_1)F_1,$$

$$A_2(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + B_2(\theta_2)\dot{\theta}_2 + C_2(\theta_2) = R_2u_2 + d_{21}(\theta_2)G_2 + d_{22}(\theta_2)F_2,$$

$$m\ddot{x} = F_2 - F_1,\quad m\ddot{y} = \mu F_2 + \mu F_1 - mg,$$

$$0 = -x + \frac{d_2}{2} + l_{11}\sin\theta_{11} + l_{12}\sin\theta_{12} - \frac{d_1}{2},$$

$$0 = -x + \frac{d_2}{2} + l_{21}\sin\theta_{21} + l_{22}\sin\theta_{22} - \frac{d_1}{2},$$

其中 $G_1 = \mu F_1$，$G_2 = \mu F_2$，$\theta_1 = (\theta_{11},\theta_{12})$ 和 $\theta_2 = (\theta_{21},\theta_{22})$ 分别是机器手 1 和 2 的关节角，u_1 和 u_1 分别是机器手 1 和 2 的控制力距，x 和 y 是物体的质心坐标，其它参数见文[2]。令 $x_1 = (\theta_1^{\mathrm{T}},\theta_2^{\mathrm{T}},x,y)^{\mathrm{T}}, x_2 = \dot{x}_1$，$\lambda = (G_1,G_2,F_1,F_2)^{\mathrm{T}}$，则上述方程可表示为(6)—(8)式。

从上述例子可以看出，这两个实际系统均可由仿射非线性广义系统 (1.1) 来描述。另外，还有许多实际问题可由上述仿射非线性奇异系统来建模[3—5]。实际上，绝大多数实际问题在建模过程中，均可遇到某种等式约束，即最原始的模型是由广义系统来描述的。

3 模型简化

本节将讨论仿射非线性广义系统的简化问题，即将约束参数 λ 从系统方程中解出来。为此先引入一些定义。对于 $f(x) = [f_1(x),\cdots,f_n(x)]^{\mathrm{T}}$，$h(x)$和 $g(x) = [g_1(x),\cdots,g_n(x)]^{\mathrm{T}}$ 定义

$$L_f^0h(x)=h(x),\ L_fh(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_i}f_i(x),\quad L_f^{k+1}h(x)=L_f(L_f^kh(x)),$$

$$L_gL_f^0h(x)=L_gh(x),\quad L_gL_fh(x)=L_g(L_fh(x)),\quad L_gL_f^{k+1}h(x)=L_g(L_f^{k+1}h(x)).$$

对于 $p:R^n\to R_n\times R_r$ 定义

$$L_pL_f^kh(x)=(L_pL_f^kh(x),\cdots,L_pL_f^kh(x)).$$

对于系统 (1)—(3) 定义

$$\rho^i=\max\{k:L_pL_f^{k-1}q_i(x)=0,\forall x\},\quad a(x)=(L_f^{\rho^1+1}q_1(x),\cdots,L_f^{\rho^m+1}q_m(x))^{\mathrm T},$$

$$A(x)=\begin{bmatrix}L_{p_1}L_f^{\rho^1}q_1(x) & \cdots L_{p_m}L_f^{\rho^m}q_1(x)\\ \vdots & \vdots\\ L_{p_1}L_f^{\rho^m}q_m(x) & \cdots L_{p_m}L_f^{\rho^m}q_m(x)\end{bmatrix},$$

$$N=\{x:q_i(x)=L_fq_i(x)=\cdots=L_f^{\rho^i}q_i(x)=0,\quad i=1,\cdots,m,\ x\in M\},$$

$$\gamma_i=\max\{k:L_gL_f^{k-1}q_i(x)=0,\ \forall x\},$$

$$b(x)=(L_f^{\gamma^i+1}q_1(x),\cdots,L_f^{\gamma^m+1}q_m(x))^{\mathrm T},$$

$$B(x)=[B_1(x)^{\mathrm T},\cdots,B_m(x)^{\mathrm T}]^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}L_{g_1}L_f^{\gamma^1}q_1(x) & \cdots & L_{g_m}L_f^{\gamma^1}q_1(x)\\ \vdots & & \vdots\\ L_{g_m}L_f^{\gamma^m}q_m(x) & \cdots & L_{g_m}L_f^{\gamma^m}q_m(x)\end{bmatrix},$$

$$B^*(x)=[B_1^*(x)^{\mathrm T},\cdots,B_m^*(x)^{\mathrm T}]^{\mathrm T},$$

$$B_i^*(x)=\begin{cases}0, & \text{if } \rho^i<\gamma^i,\\ B_i(x), & \text{if } \rho^i=\gamma^i.\end{cases}$$

若对于 $k<\infty$，$L_pL_f^kq_i(x)=0$，那么定义 ρ^i 为∞。若 $\rho^i=\infty$，则系统 (1)—(3) 的解不唯一[6]. 所以假设 $\rho^i<\infty$，$i=1,\cdots,m$。若对于 $k<\infty$，$L_gL_f^kq_i(x)=0$，那么定义 γ^i 为∞。

定理 3.1. 如果 1) $\rho^i\leqslant\gamma^i$，$i=1,\cdots,m$；2) $A(x)$ 非奇异；3) $x(0)\in N,z(0)=A(x(0))^{-1}a(x(0))-A(x(0))^{-1}B^*(x(0))u(0)$；则系统 (1)，(2) 可等价地转化为流形 N上的系统

$$\dot x=f'(x)+g'(x)u,\tag{9}$$
$$\lambda=h'(x)+d'(x)u,$$

其中 $f'(x)=f(x)-p(x)A(x)^{-1}a(x)$，$g'(x)=g(x)-p(x)A(x)^{-1}B^*(x)$， (10)

$$h'(x)=-A(x)^{-1}a(x),\ d'(x)=-A(x)^{-1}B^*(x).$$

证明. 将 $q_i(x)$ 对时间求导,直到 (ρ^i+1) 次为止,则有

$$\frac{\mathrm d^{\rho^i+1}q_i(x)}{\mathrm dt^{\rho^i+1}}=L_f^{\rho^i+1}q_i(x)+B_i^*(x)u+L_pL_f^{\rho^i+1}q_i(x)\lambda,\quad i=1,\cdots,m.$$

令上式为 0 ,并以向量形式书写，可得 $a(x)+B^*(x)u+A(x)\lambda=0$. 由于 $A(x)$ 非奇异,则可唯一地解出 λ，即

$$\lambda=-A(x)^{-1}a(x)-A(x)^{-1}B^*(x)u.\tag{11}$$

将 (11) 式代入 (1) 式可得

$$\dot x=f(x)-p(x)A(x)^{-1}a(x)+[g(x)-p(x)A(x)^{-1}B^*(x)]u.\tag{12}$$

(11),(12)式就是所要转化的最后形式. 下面需要证明 (1),(2) 式同 (11),(12) 式等价.

从上述推导可知,(1),(2)式的解一定是(11),(12)式的解。另外,上述推导还表明(11),(12)式的解满足

$$\frac{\mathrm{d}^{\rho^i+1}q_i(x)}{\mathrm{d}t^{\rho^i+1}}=0,\quad i=1,\cdots,m.$$

当条件(3)成立时有

$$q_i(x(0))=0,\ \frac{\mathrm{d}q_i(x(0))}{\mathrm{d}t}=0,\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^{\rho^i+1}q_i(x(0))}{\mathrm{d}t^{\rho^i+1}}=0,\ i=1,\cdots,m.$$

因此(11),(12)式的解也满足

$$q_i(x)=0,\ \frac{\mathrm{d}q_i(x)}{\mathrm{d}t}=0,\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^{\rho^i+1}q_i(x)}{\mathrm{d}t^{\rho^i+1}}=0,\ i=1,\cdots,m.$$

所以(11),(12)式的唯一解也是(1),(2)式的解。定理证毕。

4　跟踪控制

本节将讨论非线性奇异系统(1),(2)的跟踪控制问题。假设期望跟踪的输出为 yd,控制目的是寻找反馈 $u=\alpha(x)+\beta(x)\lambda$,使闭环系统

$$\dot{x}=f(x)+g(x)\alpha(x)+[p(x)+g(x)\beta(x)]\lambda,$$
$$0=q(x),\ y=h(x)+d(x)\lambda$$

的输出跟踪期望输出,即当 $t\to\infty$ 时 $y(t)\to y_d(t)$。

跟踪控制算法

步骤 1. 计算 $\rho^i, A(x)$, $B^*(x)$和 $a(x)$。如果定理中的条件成立,则将系统(1),(2)变为

$$\dot{x}=f'(x)+g'(x)u,\tag{13}$$
$$y=h'(x)+d'(x)u,\tag{14}$$

其中

$$f'(x)=f(x)-p(x)A(x)^{-1}a(x),\ g'(x)=g(x)-p(x)A(x)^{-1}B^*(x),$$
$$h'(x)=h(x)-d(x)A(x)^{-1}a(x)d'(x)=-d(x)A(x)^{-1}B^*(x).$$

步骤 2. 引入如下定义:

$$k^i=\begin{cases}0, & d_i'(x)\neq 0,\\ \max\{k: L_{g'}L_{f'}^{k-1}h_i'(x)=0,\forall x), & d_i'(x)=0,\end{cases}$$

$$e_i(x)=\begin{cases}h_i'(x), & d_i'(x)\neq 0,\\ L_{f'}^{k^i+1}h_i'(x), & d_i'(x)=0,\end{cases}$$

$$E_i(x)=\begin{cases}d_i'(x), & d_i'(x)\neq 0,\\ L_{g'}L_{f'}^{k^i}h_i'(x), & d_i'(x)=0,\end{cases}$$

$$e(x)=[e_1(x),\cdots,e_r(x)]^{\mathrm{T}},\ E(x)=(E_1(x)^{\mathrm{T}},\cdots,E_r(x)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}.$$

如果对于 $k<\infty$, $L_pL_f^kq_i(x)=0$,那么定义 k^i 为∞。令 $E_i^*(x)$ 表示 $E_i(x)^{-1}$ 的第 i 行,并选反馈

$$u_i = E_i^*(x)[y_{id}^{(k^i+1)}(t) - e_i(x)] - E_i^*(x)\sum_{j=1}^{k^i} a_i^j[L_{f^i}^j h_i'(x) - y_i^{(j)}(t)], \tag{15}$$

其中 $(a_i^1,\cdots,a_i^{k^i})$ 是 Hurwitz，即多项式 $s^{k^i} + a_i^{k^i}s^{k^i-1} + \cdots + a_i^2 s + a_i^1 = 0$ 的所有零点均有负实部. 下面证明 (15) 式是跟踪控制器，为此对 $y_i(t)$ 求导，直到 $(k^i + 1)$ 次

$$y_i^{(1)}(t) = L_{f^i}h_i'(x),$$

$$\cdots$$

$$y_i^{(k^i)}(t) = L_{f^i}^{k^i}h_i'(x),$$

$$y_i^{(k^i+1)}(t) = L_{f^i}^{k^i+1}h_i'(x) + L_{g^i}L_{f^i}^{k^i}h_i'(x)u.$$

令 $e_{ij}(t) = y_i^{(j)}(t) - y_{id}^{(j)}(t)$，则在控制器 (15) 的作用下，跟踪误差方程为

$$\dot{e}_i^1(t) = e_i^2(t),$$

$$\cdots,$$

$$\dot{e}_i^{k^i-1}(t) = e_i^{k^i}(t),$$

$$\dot{e}_i^{k^i}(t) = -a_{i1}e_i^1(t) - \cdots - a_i^{k^i}e_i^{k^i}(t).$$

因为 $(a_i^1,\cdots,a_i^{k^i})$ 是 Hurwitz，所以当 $t\to\infty$ 时 $e_i^j(t)\to 0$，即当 $t\to\infty$ 时 $y_i^{(j)}(t)\to y_{id}^{(j)}$. 因此 (15) 式是跟踪控制器. 将上述过程归纳为如下定理:

定理 4.1. 如果 1) $\rho^i \leqslant \gamma^i$, $i = 1,\cdots,m$; 2) $A(x)$ 非奇异; 3) $E(x)$ 非奇异，则跟踪控制问题可解，且跟踪控制器由 (15) 式给出.

5 结语

本文针对一类有普遍实际背景的仿射非线性广义系统，提出了一种新的分析方法，借助于此方法，可很方便地将许多实际问题中的广义系统模型转化成正常系统，从而使非线性正常系统的方法和结论可用于非线性广义系统的分析与控制问题. 所以运用此方法，可解决许多非线性广义系统的控制问题，如能控性、能观性、稳定性、反馈解耦、跟踪控制等等. 因此，本文的方法将会对非线性广义系统的研究起到一定的推动作用.

参　考　文　献

[1] McClamroch N H, Wang D W. Feedback stabilization and tracking of constrained robots. *IEEE Trans. Auto. Control*, 1988, **33**: 419—426.

[2] Laroussi K, Hemami H, Goddard R. Coordination of two planar robots in lifting. *IEEE J. of Robotics and Auto.*, 1988, **4**: 77—85.

[3] Bloch A M, McClamroch N H. Stabilization of Hamiltonian systems with constraints. in Analysis an Control of Nonlinear Systems, Edited by C I Byrnes *et. al.*, Elsevier Science Publishers, 1988.

[4] You L S, Chen B S. Tracking control designs for both holonomic and non-holonomic constrained mechanical systems: a unified viewpoint. *Int. J. Control*, 1993, **58**: 587—612.

[5] Campbell S L. Singular Systems of Differential Equations. Vol. II, London: Pitman, 1982.

[6] Liu Xiaoping. Solvability of nonlinear singular systems-Part II: the case with inputs. In: Proc. of ACC, 1995.

ANALYSIS OF AFFINE NONLINEAR SINGULAR SYSTEMS

LIU XIAOPING　　LU SHOUYIN

(*Department of Automatic Control, Northeastern University, Shenyang* 110006)

ABSTRACT

This paper discusses a kind of affine nonlinear singular systems for robot control problems. A method is given, by which nonlinear generalized systems can be simlified into regular systems. Based on such a method, tracking control problems are investigated, and sufficient conditions for the solvability of tracking control problemed are derived.

Key words: Generalized systems, nonlinear systems, robot control.

刘晓平　1962 年生于黑龙江省. 分别于 1984 年、1987 年和 1989 年在东北大学获学士、硕士和博士学位，现为东北大学自控系教授，博士导师. 已在国内外学术杂志及会议上发表论文 100 多篇. 目前研究方向为：广义系统、非线性系统、机器人系统及复杂控制系统.

鲁守银　1968 年生于山东省嘉祥县. 分别于 1991 年和 1995 年在山东师范大学和东北大学获学士、硕士学位. 现为东北大学自控系博士生. 主要研究方向为：非线性系统的鲁棒控制、机器人系统.