



时不变线性 Itô 随机系统均方稳定性的充要条件

邓飞其 冯昭枢 刘永清

(华南理工大学自动化系 广州 510641)

关键词: 线性随机系统, 均方稳定性, 充要条件, 系数矩阵, Hurwitz 性质.

1 引言

在随机系统模型中, Itô 型随机系统是最重要的类型之一, 许多具有有色噪声的系统都可以借用 Itô 型随机系统加以研究^[1]. 关于 Itô 型随机系统的稳定性与控制问题, 已有许多研究成果, 如文献 [1--6] 等. 然而有些基本问题并未得到圆满的解决, 例如, Itô 型线性随机系统的均方稳定性就尚未有理想的结果.

在以往文献中, 关于 Itô 型线性随机系统的稳定性结果主要是由 R. Z. Has'minskii 等人取得的^[2]文献[5]讨论了线性 Itô 随机系统的稳定性, 其中只对 n 阶线性随机微分方程给出了渐近稳定性的充要条件; 对时不变线性 Itô 随机系统建立了二阶矩方程, 并未加严格证明地指出了系统平衡态均方稳定性的充要条件, 然而并未将矩方程系数矩阵简单表示出来, 因而其结果还不够实用. 本文适当地选取二阶矩, 对线性 Itô 随机系统建立了二阶矩方程, 明确地表示了其系数矩阵. 与文献相比, 本文结果具有完整性、实用性.

2 主要结果

考虑线性 Itô 随机系统

$$dx = A(t)xdt + \sum_{j=1}^m F_j(t)x dW_j(t), \quad (1)$$

其中 $x \in R^n$, $A(\cdot)$ 、 $F_j(\cdot) \in R^{n \times n}$, $W(t) = [W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t)]^T (t \geq 0)$ 是定义在完全概率空间 (Q, \mathcal{F}, P) 上具有独立分量的 m 维标准 Wiener 过程. 下面定义 $A \oplus A = I_n \otimes A + A \otimes I_n$, 而 \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积^[3]. 关于随机系统均方稳定性的定义, 见文献[1].

1) 国家自然科学基金资助的项目.
本文于 1994 年 10 月 31 日收到

记 $[x] = x \otimes x$. 经推导有

$$dE[x]/dt = \left[A(t) \oplus A(t) + \sum_{j=1}^m F_j(t) \otimes F_j(t) \right] E[x], \quad (2)$$

定理 1. (1) 之平衡态均方稳定(一致稳定、渐近稳定)的充要条件是: 确定型线性系统

$$\dot{y} = \left[A(t) \oplus A(t) + \sum_{j=1}^m F_j(t) \otimes F_j(t) \right] y \quad (3)$$

之零解稳定(一致稳定、渐近稳定).

定理 2. 当 (1) 为时不变系统 ($A, F_j = \text{const.}$) 时, (1) 之平衡态均方渐近稳定的充要条件是: 矩阵 $M = A \oplus A + \sum_{j=1}^m F_j \otimes F_j$ 稳定(具有 Hurwitz 性质).

3 解的均方表达式、Lyapunov 函数

下设 $A, F_j = \text{const.}$. 由 (2) 易求得 (1) 之解的均方表达式

$$E[x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2]^T = K e^{(A \oplus A + \sum_{j=1}^m F_j \otimes F_j)(t-t_0)} E[x(t_0)], \quad (4)$$

其中

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

(1) (n+1) ((n-1)n+1)

对 (2), 我们有确定型的 Lyapunov 函数 $V = E[x]^T P E[x]$, 其中 P 是下述 Lyapunov 方程之正定解

$$\left(A \oplus A + \sum_{j=1}^m F_j \otimes F_j \right)^T P + P \left(A \oplus A + \sum_{j=1}^m F_j \otimes F_j \right) = -Q (Q > 0). \quad (6)$$

4 扰动分析

考虑扰动系统

$$dx = [Ax + \Phi(t, x)] dt + \sum_{j=1}^m F_j x dW_j, \quad (7)$$

其中 $\Phi(t, x)$ 满足

$$\|\Phi(t, x)\|_2 \leq k \|x\|_2 (k = \text{const.}). \quad (8)$$

定理 3. 若 $\text{Re} \lambda(M) < 0$, 且

$$k < \{2 \sqrt{2n} n^2 \|(M \oplus M)^{-1}\|_F\}^{-1}, \quad (9)$$

则 (7) 之平衡态均方渐近稳定.

注. 可采用上述确定型 Lyapunov 函数证明定理 3. 记

$$\beta = \frac{1}{2} - 4n^5 k^2 \|(M \oplus M)^{-1}\|_F^2 (> 0),$$

则可得

$$\dot{V} \leq -\beta E[x]^T E[x], \quad (10)$$

从而得定理 3 之结论. 这种方法可用于更多问题的研究.

参 考 文 献

- [1] 刘永清, 冯昭枢. 大型动力系统的理论与应用, 卷 4: 随机、稳定与控制. 广州: 华南理工大学出版社, 1992. 49, 73.
- [2] Feng Zhaoshu, Liu Yongqing. Stability Analysis and Stabilization Synthesis of Stochastic Large-Scale Systems. Beijing & New York: Science Press, 1995.
- [3] Ladde GS, Lakshmikantham V. Random Differential Inequalities. New York: Academic Press, 1980.
- [4] Has'minskii RZ. Necessary and sufficient condition for the asymptotic stability of linear stochastic systems. Theory Prob. Appl. 1967, 12:144—147.
- [5] Has'minskii RZ. Stochastic Stability of Differential Equations. Nauka, Moscow, 1969. English Translation: Sijthoff and Nordhoff. Alphen aan den Rijn The Netherlands, 1980. 199—243.
- [6] 郭雷. 时变随机系统. 长春: 吉林科学技术出版社, 1993.
- [7] 胡宣达. 随机微分方程稳定性理论. 南京: 南京大学出版社, 1986.
- [8] 陈公宁. 矩阵理论与应用. 北京: 高等教育出版社, 1990.
- [9] 邓飞其, 冯昭枢, 刘永清. 矩阵方程 $A^T P + PA + \sum_{i=1}^m F_i^T P F_i = -Q$ 的解及其应用. 控制理论与应用. 1996, 13(2): 163—168.

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR MEAN-SQUARE STABILITY OF TIME-INVARIANT LINEAR ITÔ STOCHASTIC SYSTEMS

DENG FEIQI FENG ZHAOSHU LIU YONGQING

(Department of Automation, South China University of Technology, Guangzhou 510641)

Key words: Linear stochastic systems, mean-square stability, necessary and sufficient condition, coefficient matrices, Hurwitz property.