研究简报

线性连续随机系统的容错约束方差控制设计[1)]

王子栋　　郭 治
(南京理工大学自动控制系　南京　210094)

关键词: 线性连续随机系统，约束方差控制，容错控制，完整性.

1　引言及问题描述

在随机控制问题中，系统的性能指标常常直接表现为系统稳态状态方差的上界形式. 起源于八十年代后期，如今日臻完善的协方差控制理论[1-2]为解决这类约束方差控制问题提供了直接有效的方法. 另一方面，使控制系统对可能的部件故障具有容错性，在理论及应用中均极具研究价值. 基于此，本文首次提出并研究线性连续随机系统的容错约束方差控制设计问题.

考虑如下线性时不变连续随机系统

$$dx(t) = [Ax(t) + Bu(t)]\mathrm{d}t + Ddw(t). \tag{1}$$

其中，状态 $x \in R^{n_x}$ 控制 $u \in R^{n_u}$, $w \in R^{n_w}$ 为 Wiener 过程，其增量协方差为 $I_{n_w}\mathrm{d}t$，且与 $x(0)$ 不相关. A, B, D 为适维常数阵且 $DD^{\mathrm{T}} > 0$, (A, B) 及 (A, D) 分别是可稳的和可扰的.

为表示执行器的可能失效，在控制器和控制对象之间引入切换阵 $F = \mathrm{diag}[f_1 f_2 \cdots f_{n_u}]$，其中 $f_i (i = 1, 2, \cdots, n_u)$ 为 0 或 1，且分别对应着第 i 个执行器失效或正常[3]. 考虑状态反馈控制 $u(t) = Gx(t)$，则表征执行器可能失效的闭环系统成为

$$dx(t) = [(A + BFG)x(t)]\mathrm{d}t + Ddw(t).$$

定义稳态状态协方差为 $X = \lim_{t\to\infty} E[x(t)x^{\mathrm{T}}(t)]$，则若闭环系统稳定，$X$ 即为连续 Lyapunov 方程 $(A + BFG)X + X(A + BFG)^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}} = 0$ 的唯一正定解[2]. 进一步，用 Ω 表示对角元素为 1 和 0 的各种组合的对角阵 F (除零矩阵外)的集合. 这样，本文考虑的问题是设计状态反馈控制器 G，使

1) 对 $\forall F \in \Omega$，闭环矩阵 $A + BFG$ 保持渐近稳定.

1) 国家自然科学基金及高等学校博士学科点专项科研基金资助课题.
本文于 1994 年 1 月 15 日收到

2) 闭环系统各状态分量的稳态方差满足 $[X]_{ii} \leqslant \sigma_i^2 (i = 1,2,\cdots,n_x)$，其中，给定方差约束应不小于由传统最小方差控制获得的最小方差。

2 主要结果

定理 1. 设 $F \in \Omega$ 为任意给定的切换阵，若存在常数 $\varepsilon > 0$，使如下代数矩阵方程

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \varepsilon BB^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1} PG^{\mathrm{T}} GP + DD^{\mathrm{T}} = 0. \tag{2}$$

有正定解 $P > 0$，则：1) 闭环系统保持渐近稳定，即 $A + BFG$ 渐近稳定。2) 闭环系统稳态状态协方差 X 存在且满足 $X \leqslant P$。

证明. 利用关系式 $(\varepsilon^{\frac{1}{2}} BF - \varepsilon^{-\frac{1}{2}} PG^{\mathrm{T}})(\varepsilon^{\frac{1}{2}} BF - \varepsilon^{-\frac{1}{2}} PG^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \geqslant 0$，$FF^{\mathrm{T}} \leqslant I$，$DD^{\mathrm{T}} > 0$ 以及 Lyapunov 稳定性理论即可证得。

定义 1. 给定满足 $[P]_{ii} \leqslant \sigma_i^2 (i = 1,2,\cdots,n_x)$ 的正定阵 P。若存在控制器 G 及参数 $\varepsilon > 0$，使 (2) 式关于 P 成立，则该正定阵 P 称为可配置的。

说明. 若 $P > 0$ 可配置，则由定理 1 知，$A + BFG$ 渐近稳定且有

$$[X]_{ii} \leqslant [P]_{ii} \leqslant \sigma_i^2 (i = 1,2,\cdots,n_x),$$

从而容错约束方差设计问题得以解决。为此，需给出 $P > 0$ 可配置的充要条件及相应的配置该 P 的反馈控制器的解析表达式。

定理 2. 给定满足 $[P]_{ii} \leqslant \sigma_i^2 (i = 1,2,\cdots,n_x)$ 的正定阵 P，则该正定阵 P 是可配置的当且仅当存在 $\varepsilon > 0$，使 $AP + PA^{\mathrm{T}} + \varepsilon BB^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}} \leqslant 0$ 且此式左端部分的秩不大于 n_u。

证明. 只需注意到 (2) 式可重写为

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \varepsilon BB^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}} = -\varepsilon^{-1} (GP)^{\mathrm{T}} GP \leqslant 0$$

且 GP 的维数为 $n_u \times n_x (n_u \leqslant n_x)$ 即可。

定理 3. 若给定的满足 $[P]_{ii} \leqslant \sigma_i^2 (i = 1,2,\cdots,n_x)$ 的正定阵 P 可配置，则所有配置该正定阵 P 的控制器 G 可表示为

$$G = \varepsilon^{\frac{1}{2}} V^{\mathrm{T}} T P^{-1}. \tag{3}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为满足定理 2 条件的参数，$V \in R^{n_u \times n_u}$ 为任意正交阵（即 $VV^{\mathrm{T}} = I$），T 为 $\Sigma \triangleq -(AP + PA^{\mathrm{T}} + \varepsilon BB^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}})$ 的平方根因子(即 $TT^{\mathrm{T}} = \Sigma$) 且 $T \in R^{n_u \times n_x}$。

证明. 若 $P > 0$ 可配置，则由定理 2，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\Sigma \geqslant 0$，且有

$$(GP)^{\mathrm{T}} GP = (\varepsilon^{\frac{1}{2}} T)^{\mathrm{T}} (\varepsilon^{\frac{1}{2}} T),$$

则定理 3 易得。

定理 4. 给定稳态状态方差约束 $\sigma_i^2 (i = 1, 2, \cdots, n_x)$，若存在正定阵 $P > 0$ 满足定理 2 的条件，则期望的容错约束方差控制器 G 可由 (3) 式获得。

说明. 在具体设计时，可构造含参数的代数 Lyapunov 方程

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \varepsilon BB^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}} + M = 0,$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为设计参数，M 为最大秩是 n_u 的 $n_x \times n_x$ 维半正定阵。注意到 A 稳定时，该方程总存在正定解 P，因而可适当调整参数 ε 及 M，寻找满足给定方差约束的正定解 P，

必要时可采用局部数值搜索的方法。大量仿真算例说明了该设计方法的直接性与有效性。进一步的研究将集中于利用文中设计过程所蕴含的自由度(如 ε、M、V 的选取)，达到其它新的指标约束(如相应于结构参数扰动的鲁棒性等)。

参　考　文　献

[1] Xu JH, Skelton RE. An improved covariance assignment theory for discrete systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1990, **AC-37**(10): 1588—1591.

[2] Skelton R E, Iwasaki T. Liapunov and covariance controllers. *Int. J. Contr.*, 1993, **57**(3): 519—536.

[3] Shieh LS, *et al.* Optimal pole-placement for state-feedback systems possessing integrity. *Int. J. Systems Sci.*, 1988, **19**(8): 1419—1435.

VARIANCE-CONSTRAINED FAULT-TOLERANT CONTROL FOR LINEAR CONTINUOUS STOCHASTIC SYSTEMS

WANG ZIDONG　　GUO ZHI

(Dept of Automatic Control, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, P. R. China)

Key words: Linear continuous stochastic systems, constrained variance control, fault-tolerant control, integrity

(上接第 461 页)

Title	1997	Place	Deadline	Further Information
IFAC/(IFIP/IFORS) Symposium Transportation Systems	June 16-18	Chania Crete, Greece	30 Nov. 1996	Prof. Markos Papageorgiou Dynamic Symstems and Sim. Lab. Technical University of Crete GR-73100 Chania, Greece FAX + 30/821 69568 e-mail:markos @ dssl. tuc. gr
IFAC Symposium Robust Control Design	June 25-27	Budapest Hungary	30 Sept. 1996	Ms. Csilla Banyasz Computer and Automation Res. Inst. POB 63, H-1518 Budapest, Hungary FAX + 36/1/1667 503 e-mail:h10kev @ huella. bitnet
1997 European Control Confere-nce (in cooperation with IFAC)	July 1-4	Brussels Belgium	1 Sept. 1996	M. Gevers/G. Bastin CESAME, Batiment Euler B-1348 Louvain la Neuve, Belgium FAX + 32/10/472 180 e-mail: gevers @ auto. ucl. ac. be

(待续)