第22卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 22, No. 4
1996 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1996

研究简报

抽象神经自动机的一个极限定理[1)]

西 广 成
(中国科学院自动化研究所 北京 100080)

关键词：抽象神经自动机，Gibbs 分布.

1 引言

一旦神经元群以各种形式排列成神经网络，随之也就产生了神经场[1]. 神经网络与神经场的对立统一在人类脑神经系统中形成了广阔的空间通道与空间效应. 这种空间效应包括由脑电流产生的电磁效应、化学效应和热效应. 基于这样的事实，本文在文[2—7]的基础上，提出抽象神经自动机概念，给出抽象神经自动机的一个极限定理.

与以往的神经网络不同，抽象神经自动机是建立在无穷可数神经元集——$d(d \geqslant 1)$维整数格点集 T^d 上的随机元集合. 神经元之间用突触联系. 抽象神经自动机做为一种更完美的脑模型，将描述发生在大脑神经网络时空活动中的学习过程；作为认知模型，在学习、认识客观世界的过程中，当在微观与宏观两个方向上趋于无穷必获得唯一稳定解. 这个结论适用于抽象神经自动机的串联、并联、串并混合型以及同步与非同步、齐次与非齐次各种情况.

迄今，学习或自组织神经网络的许多模型已被研制出来，每个人都力图用自己的特殊模型使神经生物学的问题具体化. 抽象神经自动机理论途径可对各种不同随机神经网络模型给出一种一般的描述和证明. 这正是神经网络理论和实践进一步发展而急待解决的问题. 抽象神经自动机理论途径所以能当此重任，是因为这种思想是建立在自动机理论基础上的.

2 定义与定理

定义 1. 一个随机自动机 a 定义为带有一个函数对 (F,G) 的集合三元组 (Q,Y,Z)

$$a=((Q,Y,Z),(F,G)). \tag{1}$$

1) 国家自然科学基金资助课题.
本文于 1992 年 12 月 7 日收到

其中Q是有限状态空间；Y是输入有限集；Z是输出有限集；F：$Y\times Q^2\to[0,1]$，使得$\forall y\in Y$，$\forall q\in Q$，有

$$\sum_{q'\in Q}F(y,q,q')=1; \tag{2}$$

G：$Q\times Z\to[0,1]$，使得$\forall q\in Q$，有

$$\sum_{z\in Z}G(q,z)=1. \tag{3}$$

实际上，$F(y,q,q')$表示输入为y时状态从q到q'的概率；$G(q,z)$表示状态为q时输出为z的概率。

定义 2. 一个随机自动机网络S定义为一个d维神经元(格点)集T^d与一个函数对(R,C)的二元组

$$S=(T^d,(R,C)). \tag{4}$$

其中，$R:T^d\to A$，A表示定义在三元组(Q,Y,Z)上的所有自动机a的集合；$C:T^d\times Z\to Y$。实际上，$R(t)$是对应于$t\in T^d$的自动机；C是某网络$N\subset S$的联接变换。对任意$f\in Z^{T^d}$，$t_0\in T^d$，当神经元$t\in T^d$有输出$f(t)$时，$C(t_0,f)=y$是t_0接收的输入。为处理简单，选择$Q=\{0,1\}$。$Y(t)=\{0,1\}^{N(t)}$，其中$N(t)$是神经元$t\in T^d$的邻域。

定义 3. 在网络S上的抽象神经自动机是一随机元集$\{\xi(t),t\in T^d\}$，$\xi(t)$:

$$(\Omega,A,P)\to(\{0,1\}^{T^d}=X,B(X),\mu).$$

其中(Ω,A,P)，$(X,B(X),\mu)$是两个概率空间，A的定义如前；$B(X)$是X上柱集产生的σ-代数。

定义 4. 与任意有限子集$\tilde{L}=(t_1,\cdots,t_n)\subset T^d$对应，有概率分布$\mu(x_{t_i}$，$x_{t_i}\in Q$，$i=1,\cdots,n)$，使$\mu\{\xi(t_i)=x_{t_i}$，$i=1,\cdots,n\}=\mu_{\tilde{L}}(x_{t_i},x_{t_i}\in Q$，$i=1,\cdots,n)$，并满足相容性条件——对任意$L=(t_1,\cdots,t_m)\subset\tilde{L}$，

$$\sum_{x_{t_{m+1}}\in Q,\cdots,x_{t_n}\in Q}\mu_{\tilde{L}}(x_{t_i},i=1,\cdots,n)=\mu_L(x_{t_i},i=1,\cdots,m). \tag{5}$$

概率分布族$\mu=\{\mu_{\tilde{L}}(\cdot)\}$称为抽象神经自动机$\{\xi(t),t\in T^d\}$的概率分布。

定义 5. 条件概率分布族$\Lambda\{\lambda_{\tilde{L},x(t)}((x_{t_i},i=1,\cdots,n)|x(t),\ t\in T^d\backslash\tilde{L})\}$使

$$\mu\{(\xi(t_i)=x_{t_i},i=1,\cdots,n)|\xi(t),t\in T^d\backslash\tilde{L}\}$$
$$=\lambda_{\tilde{L},x(t)}((x_{t_i},i=1,\cdots,n)|x(t),t\in T^d\backslash\tilde{L}) \tag{6}$$

以概率1成立，称为抽象神经自动机的条件分布。函数$x(t)$取值于Q。

定义 6. 当$L=(t_1,\cdots,t_m)\subset T^d$时，对任意$x_1\in Q,\cdots,x_m\in Q$，以及对任意函数$x(t),t\in T^d\backslash L$，概率分布

$$\lambda_L((x_1,\cdots,x_m)|x(t))=\frac{1}{\Phi_L(x(t))}\exp\{-\beta U_L((x_1,\cdots,x_m)|x(t))\} \tag{7}$$

称为边界条件为$x(t)$的L中的 Gibbs 分布。其中，

$$\Phi_L(x(t))=\sum_{x_1\in Q,\cdots,x_m\in Q}\exp\{-\beta U((x_1,\cdots,x_m)|x(t))\}; \tag{8}$$

β 是常数且 $0 < \beta < +\infty$，与随机自动机网络的"温度"成反比；U_L 称为势，它定义为

$$U_L((x_1, \cdots, x_m) | x(t)) = -c \sum_{i=1}^{m} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1, j \neq i}^{m} x_i x_j U(t_i - t_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{t \in T^d \setminus L} x_i x(t) U(t_i - t) \tag{9}$$

上式中，c 为化学势的值。

定义 7. 抽象神经自动机的条件分布由式(8)给出，那么，它及其分布被称为 Gibbs 的。

引理 1. 假定随机自动机网络工作状态的变化，每次最多允许有限个神经元改变自己的状态，使得 $L_1 \subset L_2 \subset \cdots, \sum_i L_i = T^d$. 令 ϕ_{L_i} 是具有不同边界条件的子集 L_i 内的 gibbs 分布的闭凸包，则 $\phi_{L_1} \supset \phi_{L_2} \supset \cdots$.

证明. 由定义 5 得，当 $\tilde{L} \subset L$, $\tilde{L} = (t, \cdots, t_n)$, $L \setminus \tilde{L} = (u_1, \cdots, u_m)$, $x_{t_i}, x_{u_j} \in Q$, 并且，$L\tilde{x}(t) = x(t) t \in T^d \setminus L$, $\tilde{x}(u_j) = x_{u_j}$, $j = 1, \cdots, m$ 时，抽象神经自动机的条件相容性可表示为

$$\lambda_{L, x(t)}(x_{t_i}, x_{u_j}, i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m) = \lambda_{\tilde{L}, \tilde{x}(t)}(x_{t_i}, i = 1, \cdots n) \sum_{(x(t_i) \in Q, i = 1, \cdots, n)} \lambda_{L, x(t)} \cdot (x_{t_i}, x_{u_j}, i = 1, \cdots, n; \ j = 1, \cdots, m), \tag{10}$$

从而可得 $\phi_{L_i} \supset \phi_{L_{i+1}}$，证毕。

引理 2.[8] 设 R 是完备的度量空间，又设 $M_i = \{x | \rho(x, x_i) \leqslant \varepsilon_i\}$ 是 R 中的一套闭球，$M_1 \supset M_2 \supset \cdots$，如果球的半径 $\varepsilon_i \to 0$，则必有唯一的一点 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$.

对任意 $L_i \subset T^d$, $i = 1, \cdots$, $\sum_i L_i = T^d$，显然，势 U_L 在 X 上连续，$\{0, 1\}$ 是有限紧集，X 在直积拓扑意义上也是紧的。U_{L_i} 形如 U_L，符合在 L_i 上至少存在一个关于 U_{L_i} 的 gibbs 分布条件。这时，关于抽象神经自动机动力学性质，有以下基本结果。

定理. 假定随机自动机网络每次工作状态变化，允许有限个神经元改变自己的状态，使得 $L_1 \subset L_2 \subset \cdots$, $\sum_i L_i = T^d$. 则抽象神经自动机在极限状态有唯一的 gibbs 分布。极限状态是指 $i \to \infty$, $\varepsilon_i \to 0$, $i = 1, 2, \cdots$.

证明. 把抽象神经自动机的一切形如式(7)的分布所形成的集合，看作由全体有界函数 $H = \{h_L(x_1, \cdots, x_{n+m})\}$, $L \subset T^d$, $x_1 \in Q, \cdots, x_{n+m} \in Q$ 组成的完备度量空间 R 的子集，则由引理 1、引理 2，定理得证。

上述定理说明，抽象神经自动机在学习、认识客观世界的过程中，当微观与宏观两个方向上趋于无穷时必定获得唯一稳定解。这个结论适用于抽象神经自动机的串联、并联、串并混合型以及同步与非同步、齐次与非齐次各种情况。

推论. 假定抽象神经自动机存在唯一的 Gibbs 分布 μ，其参数为 $(\beta, c, U(\cdot|\cdot))$，$\mu_i$ 是参数为 $(\beta_i, c_i, U_{L_i}(\cdot|\cdot))$ 的抽象神经自机的 Gibbs 分布序列，并且当 $i \to \infty$ 有

$\beta_i \to \beta$, $c_i \to c$, 则 $\mu_i \to \mu$.

证明. 由空间X的紧性和 $U(\cdot|\cdot)$ 的连续性,推论所说的事实是显然的.

由上述定理和推论,模拟退火算法的收敛性、Boltzmann 机算法的收敛性、Gibbs 取样器算法的收敛性,在各自相应的条件下都是不难理解的.

参 考 文 献

[1] Shun—ichi Amari. Field Theory of Self-organizing Neural Nets. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 1983, **13**:741-748

[2] Ackley D H, Hinton GE, Sejnowski TJ. A learning algorithm for Boltzmann machines. Cog. Sci., 1985, 9:147—169.

[3] Kirkpatrick S, Gelatt CD, Vecchi MP. Optimization by simulated annealing. *Science*, 1983, **220**:671—680.

[4] Geman S, Geman D. Stochastic relaxation, Gibbs' distributions, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1984, **6**:721—741.

[5] 西广成. 神经网络系统学习过程初探. 自动化学报, 1991, **17**(3): 311—316.

[6] 西广成. 联想 Boltzmann 神经网络模型. 全国人工智能和智能计算机学术会议论文集, 1991,130—135.

[7] Xi Guangcheng. Intelligent control with relative entropy minimizing. Proceedings of the 3rd Pacific Rim International Conference on Artificial Intelligence, 1994, **2**:1079—1082.

[8] 夏道行等. 实变函数论与泛函分析(下册). 北京: 人民教育出版社, 1979.

A LIMIT THEOREM FOR ABSTRACT NEURAL AUTOMAT

XI GUANGCHENG

(*Institute of Automation, Chinese Academy of Science, Beijing* 100080)

Key words: Abstract neural automat, Gibbs' distribution.